Abitur 2022 Mathematik Stochastik III

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

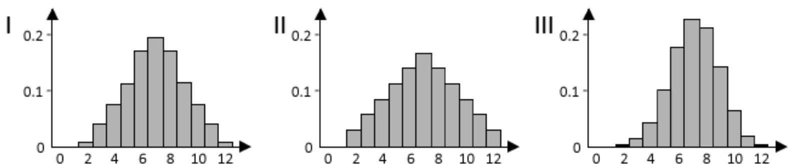
- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ übereinstimmt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5% der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0,05$.

Teilaufgabe Teil B 1a (6 BE)

Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1: „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen."
E_2: „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen."
E_3: „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pilzbefall."

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99% beträgt.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P\left(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$.

Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen einen nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70% der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.

Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen.

Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt."
T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen."

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.

(zur Kontrolle: $x = 13$)

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\overline{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ übereinstimmt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Ergebnisraum

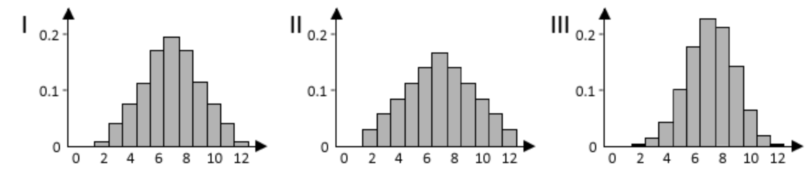
$P(X = 4)$: (3|1), (1|3), (2|2) 3 mögliche Ergebnisse

$P(X = 10)$: (6|4), (4|6), (5|5) 3 mögliche Ergebnisse

Alle Ergebnisse haben die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X: muss symmetrisch um die Augenzahl 7 sein $\Rightarrow$ I oder II

$$P(X=6)=P(X=5)+\frac{1}{36}$$
$$P(X=5)=P(X=4)+\frac{1}{36}$$

$\Rightarrow$ II, da stets der gleiche Wert $\frac{1}{36}$ addiert wird

Y: Wahrscheinlichkeitsverteilung ist nicht symmetrisch $\Rightarrow$ III

Teilaufgabe Teil B 1a (6 BE)

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5% der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p=0,05$.

Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1: „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen.“
E_2: „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen.“
E_3: „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pilzbefall.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Binomialverteilung

$n=15;\ p=0,05$

Erläuterung:

“ **Keine** der Pflanzen“ $\Rightarrow$ $X=0$

$$P\ (E_1)=P_{0,05}^{15}(X=0)\overset{\text{TW}}{=}0,46329$$

Erläuterung: *Ereignis*

“ **Höchstens zwei** Pflanzen“ $\Rightarrow$ $X\leq 2$

$$P\ (E_2)=P_{0,05}^{15}(X\leq 2)\overset{\text{TW}}{=}0,96380$$

Erläuterung: *Ereignis*

„12 oder 13 Pflanzen bleiben **ohne** Pilzbefall.“ $\Longleftrightarrow$ „2 oder 3 werden von Pilzen befallen.“

$$P\ (E_3)=P_{0,05}^{15}(X=2)+P_{0,05}^{15}(X=3)\overset{\text{TW}}{=}0,13475+0,03073=0,16548$$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99% beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ ... die Wahrscheinlichkeit dafür...**mindestens** 99 % beträgt“ $\Rightarrow$ $P\geq 0,99$

“ ... dass **mindestens** eine Pflanze “ $\Rightarrow$ $X\geq 1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n (Anzahl Pflanzen) mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,05$ angesehen werden.

$P_{0,05}^{n}(X \geq 1) \geq 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_{0,05}^{n}(X = 0) \geq 0,99$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0,95^n \geq 0,99$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0,95^n \geq 0,99 \qquad | -1$

$-0,95^n \geq -0,01 \qquad | \cdot(-1)$

(da die Ungleichung mit einer negative Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$0,95^n \leq 0,01$

$0,95^n \leq 0,01$

Erläuterung: *Rechenweg*

$0,95^n \leq 0,01 \qquad | \quad \ln()$

$\ln\,(0,95^n) \leq \ln(0,01)$

$n \cdot \ln(0,95) \leq \ln(0,01) \qquad | \quad : \ln(0,95)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,95}$

$n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,95}$

$n \geq 89,78$

$n = 90$ kleinster Wert

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$n = 400;\ p = 0,05$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Erwartungswert von X : $\mu = n \cdot p$

$\mu = 400 \cdot 0,05 = 20$

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Standardabweichung (Streuung) von X : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$\sigma = \sqrt{400 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = \sqrt{19} \approx 4,36$

Erläuterung:

X soll **höchstens** um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen.

$20 - 4,36 \leq X \leq 20 + 4,36$

$15,64 \leq X \leq 24,36$

Da es nur ganze Pflanzen geben kann, muss der Bereich auf ganze Zahlen gerundet werden.

$16 \leq X \leq 24$

$16 \leq X \leq 24$

$h_{\max} = \dfrac{24}{400} = 0,06$

$h_{\min} = \dfrac{16}{400} = 0,04$

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P\ (\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Standardabweichung einer Zufallsgröße

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq 0,75$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer Zufallsgröße um weniger als zwei Standardabweichungen vom Erwartungswert abweicht, beträgt mindestens $0,75$.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen einen nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70% der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.

Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen.

Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt.“
T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen.“

Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.

(zur Kontrolle: $x = 13$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Aus dem Text der Aufgabenstellung:

$|\Omega| = 150$

$|S| = 70\% \cdot 150 = 105$

$|S \cap T| = x$

$\left|\overline{S} \cap \overline{T}\right| = 3x$

$|T| = 19$

	T	$\overline{T}$	
S	x		105
$\overline{S}$		3x	
	19		150

Vierfeldertafel vervollständigen:

	T	$\overline{T}$	
S	x		105
$\overline{S}$	19-x	3x	45
	19		150

$19 - x + 3x = 45$

$2x = 26$

$x = 13$

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\overline{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

	T	$\overline{T}$	
S	13	92	105
$\overline{S}$	6	39	45
	19	131	150

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{\frac{13}{150}}{\frac{105}{150}} = \frac{13}{105} = 0{,}1238$$

$$P_{\overline{S}}(T) = \frac{P\left(\overline{S} \cap T\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \frac{\frac{6}{150}}{\frac{45}{150}} = \frac{6}{45} \approx 0{,}1333$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine behandelte Pflanze vom Pilz befallen wird, ist nur um ca. 1% kleiner als bei einer unbehandelten.