Abitur 2022 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

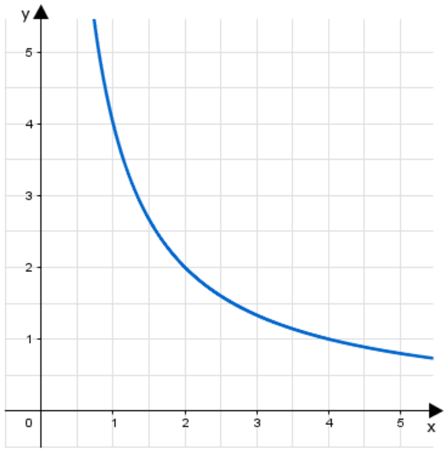


Abb. 1

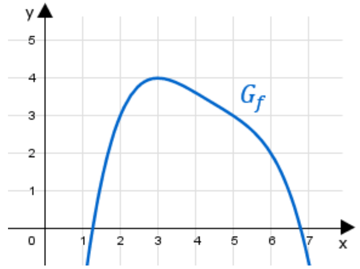
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx}$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1; 4]$ überein.

Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).
Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.



Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(zur Kontrolle: 0 und 10)

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$; y-Koordinate des Hochpunkts: 10)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f. Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

I $\quad f''(x) = \dfrac{50}{(x^2 - 10x) \cdot \sqrt{10x - x^2}}$ $\qquad$ II $\quad f''(x) = \dfrac{50}{(10x - x^2) \cdot \sqrt{10x - x^2}}$

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5 - x) = f(5 + x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5 - x)$ und $f(5 + x)$ geeignet umformen.
Begründen Sie damit, dass der Graph G_f symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 5$ ist.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \dfrac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$ an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

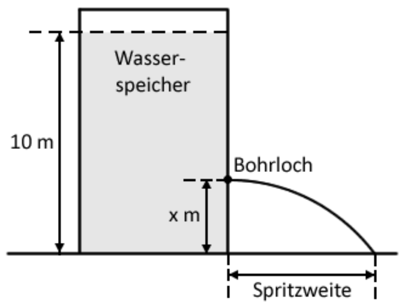
Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2|f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

Teilaufgabe Teil B h (5 BE)

Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt $A(s|0)$ mit $s \in]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f. Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen.

Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.



Teilaufgabe Teil B i (1 BE)

Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3,6|9,6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil B j (5 BE)

Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist.

Teilaufgabe Teil B k (4 BE)

Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g: t \mapsto 0,25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde.
Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x+1$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$\Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nullstellen einer Funktion

Ansatz: $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$\frac{x^2+2x}{x+1}=0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$x^2+2x=0$

$x\cdot(x+2)=0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a\cdot b=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=0 \quad \text{und/oder} \quad b=0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $x_1^N=0$

2. $x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x_2^N=-2$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y=3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Eigenschaften einer Funktion

z.B. $h(x)=\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$

Erläuterung:

„Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert“ , d.h. der Nenner darf nicht den Wert 0 annehmen.

$$\Rightarrow \quad h(x)=\frac{\dots}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$$

„ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y=3$ als waagrechte Asymptote“ , d.h. der Grenzwert für $x\to\infty$ hat den Wert 3

$$\Rightarrow \quad h(x)=\frac{3x^2}{x^2+1} \qquad \left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}=3\right)$$

„und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$“

$$\Rightarrow \quad h(x)=\frac{3x^2+4}{x^2+1}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x\mapsto \dfrac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

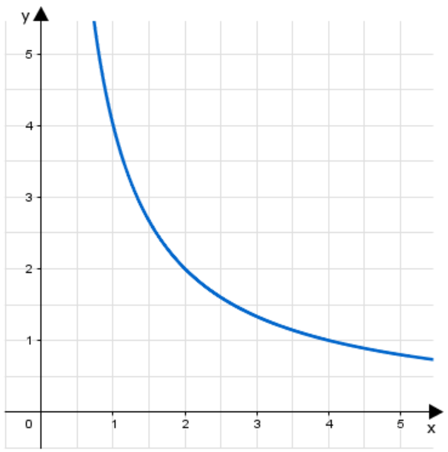


Abb. 1

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx}$

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Bestimmtes Integral

$$\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx} = \int_1^e \frac{4}{x}\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Ausklammern, Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gilt folgende Rechenregel für Integrale:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx \quad = \quad c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Der Faktor 4 wird aus dem Integral ausgeklammert, damit im Integral die Funktion $\frac{1}{x}$ stehen bleibt.

$$\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx} = 4 \cdot \int_1^e \frac{1}{x}\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ \mathrm{dx} = \ln|g(x)| + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = \ln|x|$$

$$\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx} = [4\ln|x|]_1^e$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

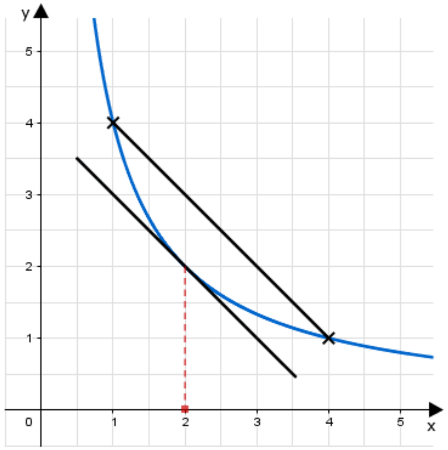
$$\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx} = 4\underbrace{\ln e}_{1} - 4\underbrace{\ln 1}_{0} = 4$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

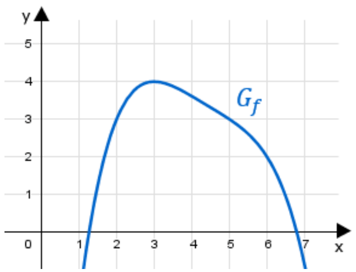
Mittleren Änderungsrate bestimmen



$x_0 \approx = 2$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).
Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.



Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Funktionswert berechnen

$f(6) = 2$

$g(6) = f(f(6)) = f(2) = 3$

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Waagerechte Tangenten

Erste Ableitung gleich Null setzen: $g'(x) = 0$

> Erläuterung: *Waagerechte Tangente*
>
> Die Steigung einer waagerechten Tangente ist gleich Null.

$f'\ (f(x)) \cdot f'(x) = 0$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

1. $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$

2. $f'\ (f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2;\ x_3 = 5$

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -x$ und $g'(x) = -1$.

$f_a'(x) = a \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -a \cdot e^{-x}$

$f_a'(0) = -a \cdot \underbrace{e^0}_{1} = -a$

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Tangentengleichung ermitteln

$f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$

$f_a'(x) = -a \cdot e^{-x}$

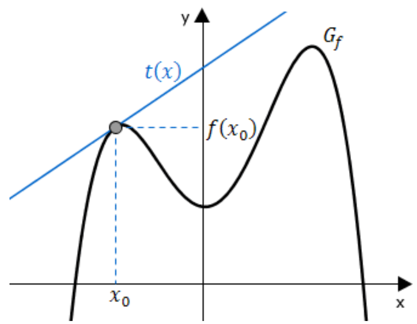
$f_a(0) = a + 3$

$f_a'(0) = -a$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = 0$.

$t: y = (x - 0) \cdot f_a'(0) + f_a(0)$

$t: y = -a\,x + a + 3$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Tangentensteigung soll positiv sein.

$-a > 0 \quad \Rightarrow \quad a < 0$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der x-Achse*

Schnittpunkt mit der x-Achse bedeutet: $y = 0$

$-a\,x + a + 3 = 0$

$-a\,x = -a - 3 \qquad | : (-a) \qquad (a \neq 0)$

$x = \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a}$

Erläuterung:

Die x-Koordinate des Schnittpunkts soll größer sein als $\frac{1}{2}$.

$1 + \frac{3}{a} > \frac{1}{2} \qquad | -1$

$\frac{3}{a} > -\frac{1}{2} \qquad | \cdot a \qquad (a < 0)$

(da die Ungleichung mit einer negative Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$3 < -\frac{1}{2}a \qquad | \cdot (-2)$

$-6 > a$

$a < -6$

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(zur Kontrolle: 0 und 10)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Nullstellen einer Funktion

Ansatz: $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$0 = 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$

$0 = 10x - x^2$

$0 = x \cdot (10 - x)$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $x_1 = 0$

2. $10 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 10$

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$; y-Koordinate des Hochpunkts: 10)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = 2 \cdot \sqrt{10x - x^2} = 2 \cdot \left(10x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $\quad u(x) = (\dots)^{\frac{1}{2}} \quad$ und $\quad v(x) = 10x - x^2$.
Dann ist $\quad u'(x) = \dfrac{1}{2}(\dots)^{-\frac{1}{2}} \quad$ und $\quad v'(x) = 10 - 2x$.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(10 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (10 - 2x)$$
$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{(10 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$\frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist genau dann null, wenn der Zähler null ist.

$10 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 5$

Lage des möglichen Extrempunkts:

$y^E = f\,(5) = 2 \cdot \sqrt{50 - 25} = 10 \quad \Rightarrow \quad E\,(5|10)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Vorzeichen der ersten Ableitung an der Stelle $x = 5$ untersuchen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$$x < 5: \quad \frac{\overbrace{10 - 2x}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{10x - x^2}}_{>0}} > 0$$

$$x > 5: \quad \frac{\overbrace{10 - 2x}^{<0}}{\underbrace{\sqrt{10x - x^2}}_{>0}} < 0$$

$\Rightarrow \quad E\,(5|10)$ Hochpunkt, da Vorzeichenwechsel von " +" nach " -" an der Stelle $x = 5$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f. Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

I $\quad f''(x) = \dfrac{50}{(x^2 - 10x) \cdot \sqrt{10x - x^2}} \qquad$ II $\quad f''(x) = \dfrac{50}{(10x - x^2) \cdot \sqrt{10x - x^2}}$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Krümmungsverhalten einer Funktion

I $\quad f''(x) = \dfrac{50}{\underbrace{(x^2 - 10x)}_{<0} \cdot \underbrace{\sqrt{10x - x^2}}_{>0}} < 0$

Erläuterung: *Parabel*

Der Graph der Funktion $x^2 - 10$ entspricht einer nach oben geöffneten Parabel mit Nullstellen 0 und 10.
Im Definitionsbereich $]0, 10[$ der zweiten Ableitung f'' nimmt die Parabel stets negative Werte an.

$\Rightarrow$ Term I entspricht $f''(x)$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''\left(x^W\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5 - x) = f(5 + x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5 - x)$ und $f(5 + x)$ geeignet umformen.
Begründen Sie damit, dass der Graph G_f symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 5$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f(x) = 2 \cdot \sqrt{10x - x^2} = 2 \cdot \sqrt{x \cdot (10 - x)}$

$f(5 - x) = 2 \cdot \sqrt{(5 - x) \cdot (10 - (5 - x))} = 2 \cdot \sqrt{(5 - x) \cdot (5 + x)}$

$f(5 + x) = 2 \cdot \sqrt{(5 + x) \cdot (10 - (5 + x))} = 2 \cdot \sqrt{(5 + x) \cdot (5 - x)}$

$\Rightarrow \quad f(5 - x) = f(5 + x)$

Der Graph G_f ist sysmmetrisch bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x = 5$, da wegen $f(5 - x) = f(5 + x)$ gilt, dass zwei x-Werte, die den gleichen Abstand zu $x = 5$ haben, den gleichen y-Werte zugeordnet ist.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \dfrac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$ an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Definitionsbereich bestimmen

$f'(x) = \dfrac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$f'(x)$ besteht aus einem Bruch mit der Wurzelfunktion $\sqrt{10x - x^2}$ im Nenner. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $10x - x^2$, muss größer als Null sein.

$10x - x^2 > 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Man bestimmt zunächst die Nullstellen, um anschließend den Bereich zu definieren, wo die Parabel positive Funktionswerte hat.

$10x - x^2 = 0$

$x \cdot (10 - x) = 0$

$x_1 = 0$

$10 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 10$

> Erläuterung: *Parabel*
>
> Der Graph der Funktion $10x - x^2$ entspricht einer nach unten geöffneten Parabel mit Nullstellen 0 und 10. Zwischen den Nullstellen nimmt die Parabel nur positive Werte ein.

$D_{f'} =]0; 10[$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{10 - 2x}^{\to 10}}{\underbrace{\sqrt{10x - x^2}}_{\to 0^+}} = \infty$$

Für $x \to 0$ wird die Steigung des Graphen beliebig groß.

> Erläuterung: *Grenzwert*
>
> Für $x \to 0$ nähert sich der Graph der Parabel $10x - x^2$ (eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 10) dem Wert 0 von rechts, d.h. $10x - x^2 \to 0^+$ und somit auch $\sqrt{10x - x^2} \to 0^+$.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

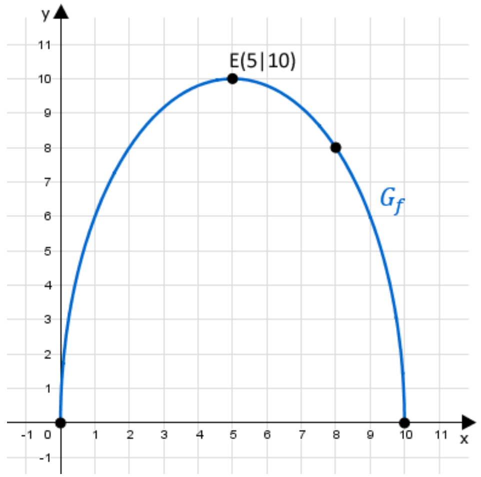
Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Funktionswert berechnen

$f(x) = 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$

$f(8) = 2 \cdot \sqrt{80 - 64} = 8$

Skizze

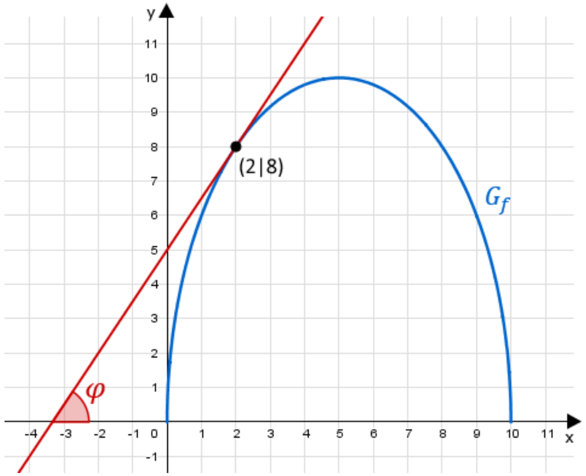


Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2|f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Schnittwinkel eines Graphen mit der x-Achse



$$f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$$
$$f'(2) = \frac{6}{\sqrt{16}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α, welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.

$f'(x_0) = \tan\varphi$

$\tan\varphi = 1,5$

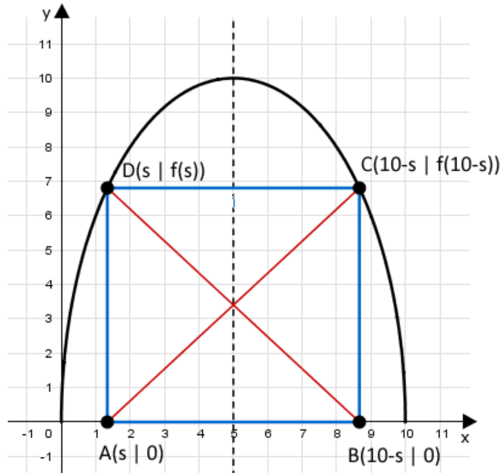
$\Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1} 1,5 = 56,31°$

Teilaufgabe Teil B h (5 BE)

Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt $A(s|0)$ mit $s \in]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f. Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B h

Länge einer Strecke



$f(x) = 2\sqrt{10x - x^2}$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Wegen der Symmetrie zur Geraden $x = 5$ ist die x-Koordinate des Punktes B gleich $10 - s$.

$B(10 - s|0)$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Punkt C hat die x-Koordinate des Punktes B und liegt auf dem Graph von f.

$C(10-s|f(10-s))$

$C\left(10-s|2\sqrt{10(10-s)-(10-s)^2}\right)$

$C\left(10-s|2\sqrt{100-10s-100+20s-s^2}\right)$

$C\left(10-s|2\sqrt{10s-s^2}\right)$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}10-s\\2\sqrt{10s-s^2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-2s\\2\sqrt{10s-s^2}\end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

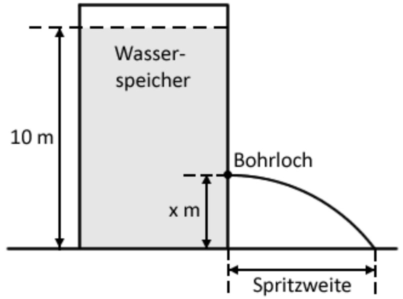
Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}|=\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(10-2s)^2+\left(2\sqrt{10s-s^2}\right)^2}=\sqrt{100-40s+4s^2+40s-4s^2}=10\text{ LE}$$

Teilaufgabe Teil B i (1 BE)

Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.



Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3{,}6|9{,}6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B i

Anwendungszusammenhang

Beträgt die Höhe des Bohrlochs 3,6 m, so beträgt die Spritzweite 9,6 m.

Teilaufgabe Teil B j (5 BE)

Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B j

Anwendungsaufgabe

$f(x)=2\sqrt{10x-x^2}$

$2\sqrt{10x-x^2}=6 \qquad |:2$

$\sqrt{10x-x^2}=3 \qquad |\,^2$

$10x-x^2=9$

$-x^2+10x-9=0$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{-2} = \frac{-10 \pm 8}{-2}$$

$x_1 = 1$ m; $\quad x_2 = 9$ m

$x_{\max} = 5$ m

Teilaufgabe Teil B k (4 BE)

Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g : t \mapsto 0,25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde.
Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B k

Flächenberechnung

$g(t) = 0,25t - 25 \qquad 0 \leq t \leq 100$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_t mit der x-Achse zwischen 0 und 60 (1 Minute = 60 Sekunden) einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_0^{60} g(t)\ \mathrm{dt}$$

$$V = \int_0^{60} g(t)\ \mathrm{dt}$$

$$V = \int_0^{60} (0,25t - 25)\ \mathrm{dt}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $0,25t - 25$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \int_0^{60} (0,25t - 25)\ \mathrm{dt} = 0,25 \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} - 25\frac{t^{0+1}}{0+1} = 0,25 \cdot \frac{t^2}{2} - 25t$$

$$V = \left[0,25 \cdot \frac{t^2}{2} - 25t\right]_0^{60}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$V = 0,25 \cdot \frac{60^2}{2} - 25 \cdot 60 - 0 = -1050$$

$V = 1050$ l