Abitur 2022 Mathematik Geometrie VI

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q.
Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland.
Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken [AB], [BC] und [CD] mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

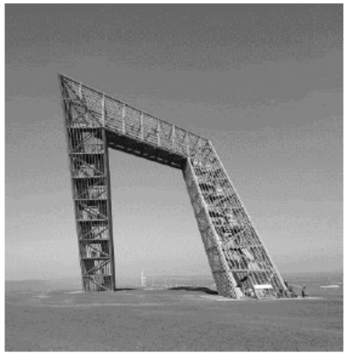


Abb. 1

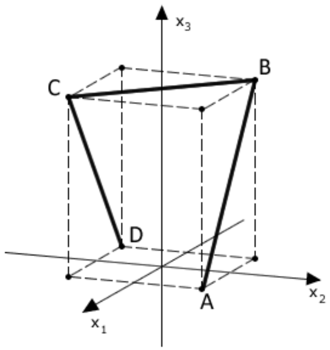


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3-Achse liegen.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2-Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.

Abb. 3

Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Der Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken [AB], [BC] und [CD] den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h:

$$\text{I } \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix},\ t \in [0;1] \qquad \text{II } \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \circ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \qquad \text{III } \overline{\mathrm{PQ}} = 28 - h$$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

Lösung

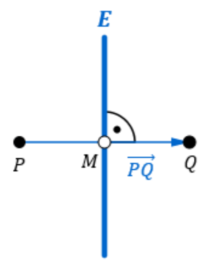
Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Ebene aus Punkt und Normalenvektor



$P(1|2|3)$, $Q(7|2|11)$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt einer Strecke

Mittelpunkt M zwischen P und Q:

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow M(4|2|7)$$

Ebenengleichung in Normalenform

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$$

Hier (M ist Aufpunkt):

$$E : \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{M}}$$

$E : 6x_1 + 8x_3 = 24 + 0 + 56$

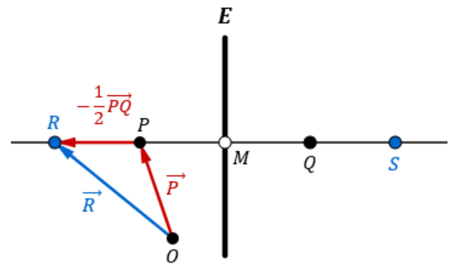
$E : 6x_1 + 8x_3 - 80 = 0$

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q.
Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Lage eines Punktes



$P(1|2|3)$, $Q(7|2|11)$

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$R(-2|2|-1)$

Alternative Lösung

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland.
Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken [AB], [BC] und [CD] mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

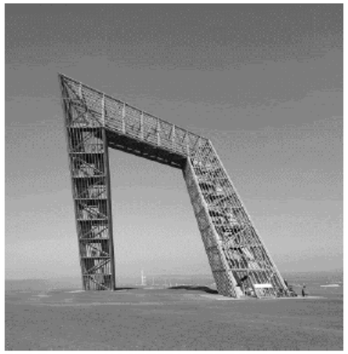


Abb. 1

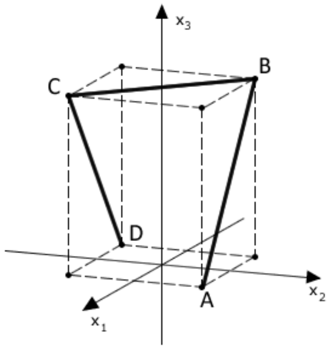


Abb. 2

Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3-Achse liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung von Vektoren

$B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$

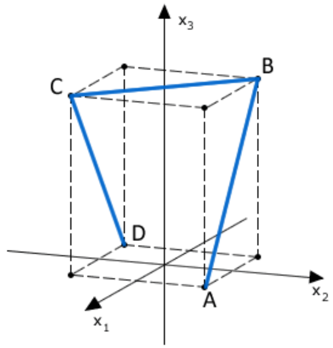
Die x_3-Koordinate der Punkte B und C ist gleich. Die x_1- und x_2-Koordinaten unterscheiden sich nur in ihren Vorzeichen.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Länge einer Strecke



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-22)^2 + 0 + 28^2} = \sqrt{1268}$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left| \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-22)^2 + 22^2 + 0} = \sqrt{968}$$

Erläuterung:

Die Strecken [AB] und [CD] sind gleich lang.

$l = 2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = 2 \cdot \sqrt{1268} + \sqrt{968} \approx 102\mathrm{m}$

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

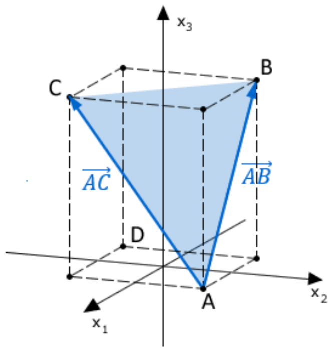
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Ebene aus drei Punkte



$A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ 28 \end{pmatrix}$$

A sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \cdot 28 \\ 22 \cdot 28 \\ 22 \cdot 22 \end{pmatrix} = 22 \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \\ 22 \end{pmatrix} = 44 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{44}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{44} \cdot 44 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$
>
> Hier (A ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 154 + 154 + 0$

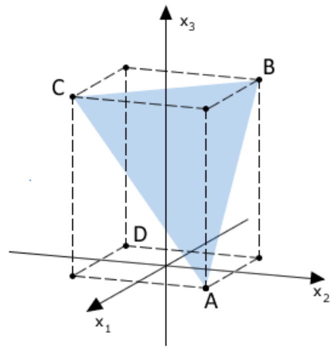
$E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 - 308 = 0$

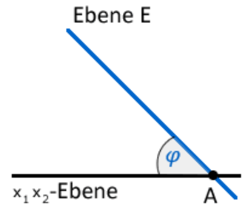
Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die $x_1 x_2$-Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Winkel zwischen zwei Ebenen

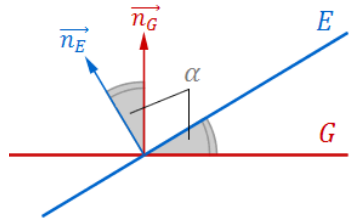




$E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 - 308 = 0$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E: $\quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

> Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*
>
> 
>
>
> Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der $x_1 x_2$-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

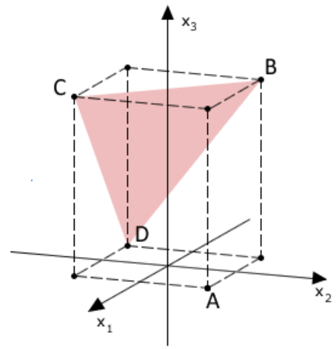
Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

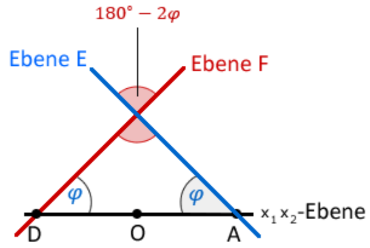
$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 11}{\sqrt{14^2 + 14^2 + 11^2} \cdot 1} = \frac{11}{\sqrt{513}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{513}}\right) \approx 60{,}94^\circ$$

Lagebeziehung von Ebenen





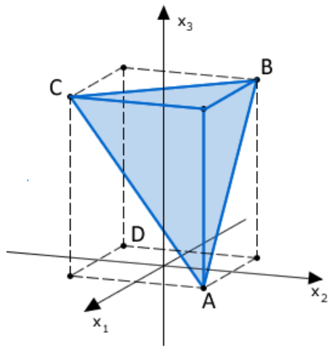
Term: $180^\circ - 2\varphi$

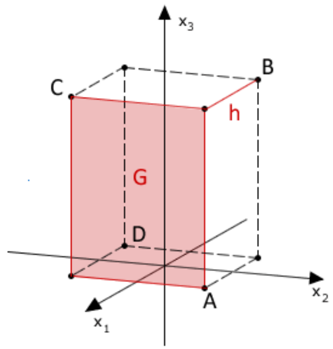
Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Volumen der Teilkörper

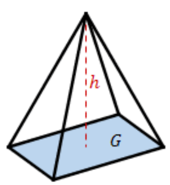




Sei G der Flächeninhalt der Seitenfläche des Quaders, die die Strecke [AC] enthält und lass es die Grundfläche des Quaders sein.
Sei weiterhin h die Länge der zur Grundfläche gehörigen Höhe des Quaders und V das Volumen des Quaders.

Dann gilt für das Volumen des pyramidenförmigen Teilkörpers:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide, Volumen eines Quaders*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

In diesem Fall ist die Grundfläche der Pyramide die Hälfte der Grundfläche des Quaders.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \cdot G_{\text{Pyramide}} \cdot h$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot G_{\text{Quader}} \cdot h$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot G_{\text{Quader}} \cdot h$$
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Quader}}$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.

Abb. 3

Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Lage des Vektors

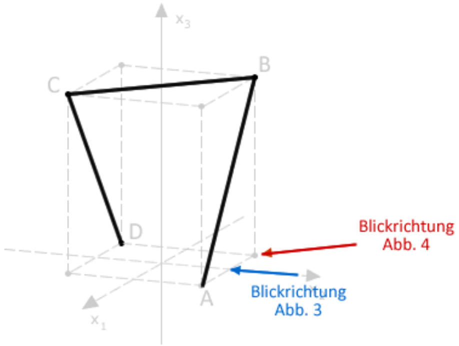


Abb. 3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abb. 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

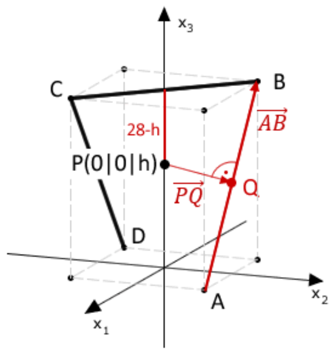
Der Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken [AB], [BC] und [CD] den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h:

I $\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$, $t \in [0;1]$ II $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \circ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ III $\overline{\mathrm{PQ}} = 28 - h$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Lage eines Punktes



Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Hier wird mit $t \in [0;1]$ die Gerade durch A mit Richtungsvektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ auf die Punkte der Strecke [AB] eingeschränkt.

I $\overrightarrow{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, $t \in [0;1]$

$\Rightarrow$ Q ist ein Punkt auf der Strecke [AB].

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

II $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$

$\Rightarrow$ Die Strecke [PQ] steht senkrecht auf die Strecke [AB]

$\Rightarrow$ $\overline{PQ}$ ist der Abstand von P zu [AB]

Erläuterung:

Der Abstand von P zur Strecke [BC] entspricht dem Abstand von P zum Punkt $(0|0|28)$. Dieser liegt auf der x_3-Achse und hat einen Abstand von $28 - h$ zu $P(0|0|h)$.

III $\overline{PQ} = 28 - h$

$\Rightarrow$ Der Abstand von P zu [AB] muss $28 - h$ entsprechen, dem Abstand von P zu [BC]