Abitur 2021 Mathematik Stochastik III

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X = 0) = P(X = 5)$, $P(X = 1) = P(X = 4)$ und $P(X = 2) = P(X = 3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist.

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4};\; P(B) = \frac{6}{6^4}$$

Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15% der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden.
Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familie höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

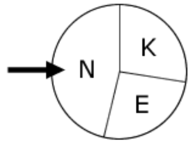
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht.

Teilaufgabe Teil B 2c (5 BE)

Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% liegen.

Teilaufgabe Teil B 3 (6 BE)

Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wirft man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung). Wird Sektor K erzielt, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors N beträgt 160°. Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E.



Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

Teilaufgabe Teil B 4a (2 BE)

Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.

Teilaufgabe Teil B 4b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat.

Teilaufgabe Teil B 4c (3 BE)

Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90% ist.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0;1;2;3;4;5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X=0)=P(X=5)$, $P(X=1)=P(X=4)$ und $P(X=2)=P(X=3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \le k)$ für $k \in \{0;1;2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \le k)$	0,05	0,20	0,50			

Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \le k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1

Erläuterung: *kumulative Verteilungsfunktion*

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=k-1)+P(X=k)$$

Aus $P(X \le 1) = P(X=0)+P(X=1)$ folgt durch Umstellung:

$$P(X=1) = P(X \le 1) - P(X=0)$$

$P(X=1) = P(X \le 1) - P(X=0) = 0,20 - 0,05 = 0,15$

Erläuterung: *kumulative Verteilungsfunktion*

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k - 1) + P(X = k)$$

Aus $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ folgt durch Umstellung:

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,50 - 0,05 - 0,15 = 0,3$$

Erläuterung: *kumulative Verteilungsfunktion*

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k - 1) + P(X = k)$$

Aus obiger Definition geht hervor:

$$P(X \leq k) = \underbrace{P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k - 1)}_{P(X \leq k-1)} + P(X = k)$$

$$P(X \leq k) = P(X \leq k - 1) + P(X = k)$$

$$P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + \underbrace{P(X = 3)}_{=P(X=2)} = 0,50 + 0,3 = 0,8$$

$$P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + \underbrace{P(X = 4)}_{=P(X=1)} = 0,8 + 0,15 = 0,95$$

$$P(X \leq 5) = P(X \leq 4) + \underbrace{P(X = 5)}_{=P(X=0)} = 0,95 + 0,05 = 1$$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Binomialverteilung

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1

$n = 5$

Aus Symmetriebedingung folgt: $p = 0,5$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(X = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1 - p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1 - p)^n$$

X ist nicht binomialverteilt, da z.B. $P_{0,5}^5(X = 0) = 0,5^5 = \frac{1}{32} \neq 0,05$.

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}; \; P(B) = \frac{6}{6^4}$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1

Ereignis beschreiben

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$$

Erläuterung: *Laplace-Wahrscheinlichkeit*

Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit (jede Kasse wird mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt) gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ günstige Fälle} \\ \leftarrow \text{ mögliche Fälle} \end{array}$$

$|\Omega| = 6^4$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus $n = 6$ verschiedenen Kassen $k = 4$ hintereinander auszuwählen mit Berücksichtigung der Reihenfolge $\left(n^k\right)$.

$|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, dass die 4 Familien hintereinander 4 verschiedene Kassen auswählen. Für die erste Familie gibt es 6 Möglichkeiten, für die zweite nur 5 (da 1 bereits ausgewählt wurde), für die dritte nur 4 (da 2 bereits ausgewählt wurden) und für die vierte nur 3 (da 3 bereits ausgewählt wurden).

$\Rightarrow$ A: „Die vier Familien zahlen an vier verschiedenen Kassen.“

$$P(B) = \frac{6}{6^4}$$

Erläuterung: *Laplace-Verteilung*

Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit (jede Kasse wird mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt) gilt:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ günstige Fälle} \\ \leftarrow \text{ mögliche Fälle} \end{array}$$

$|\Omega| = 6^4$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus $n = 6$ verschiedenen Kassen $k = 4$ hintereinander auszuwählen mit Berücksichtigung der Reihenfolge $\left(n^k\right)$.

$|B| = 6$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, dass alle 4 Familien dieselbe Kasse auswählen. Entweder alle Kasse 1 oder alle Kasse 2 etc. Insgesamt: $1+1+1+1+1+1 = 6$ Möglichkeiten.

$\Rightarrow$ B: „Alle vier Familien zahlen an derselben Kasse.“

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15% der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden.
Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familie höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Binomialverteilung

$p = P(\text{„Bollerwagen“}) = 0{,}15$

$n = 200$

A : „Mindestens 25 Bollerwagen werden ausgeliehen“

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,15$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 0,85$

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n	Anzahl der Züge („Länge“ der Bernoulli-Kette)	hier : $n = 200$

$P(A) = P_{0,15}^{200}(X \geq 25)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(„mindestens k Treffer“) $= 1 - P$(„höchsten k-1 Treffer“)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

$P(A) = 1 - P_{0,15}^{200}(X \leq 24) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,13682 \approx 86,3\%$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Wahrscheinlichkeit

$p = 0,15$

$q = 1 - p = 0,85$

B : „Die fünfte Familie ist die erste, die einen Bollerwagen ausleiht“

$P(B) = \underbrace{0,85^4}_{\text{4 x Niete}} \cdot \underbrace{0,15}_{\text{1 x Treffer}} \approx 7,8\%$

Teilaufgabe Teil B 2c (5 BE)

Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,15 = 30$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Erwartungswert von X : $\mu = n \cdot p$

Wahrscheinlichkeit

1. Berechnung z.B. im Bereich: $30 - 6 \leq X \leq 30 + 6$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“

$P_{0,15}^{200}(24 \leq X \leq 36) = P_{0,15}^{200}(X \leq 36) - P_{0,15}^{200}(X \leq 23)$

$P_{0,15}^{200}(24 \leq X \leq 36) \overset{\text{TW}}{=} 0,89872 - 0,09592 = 0,8028 \geq 75\%$

Anpassung des Bereichs: $30 - 5 \leq X \leq 30 + 5$

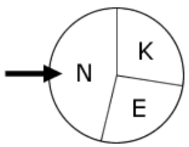
$P_{0,15}^{200}(25 \leq X \leq 35) = P_{0,15}^{200}(X \leq 35) - P_{0,15}^{200}(X \leq 24)$

$P_{0,15}^{200}(25 \leq X \leq 35) \overset{\text{TW}}{=} 0{,}86127 - 0{,}13682 = 0{,}72445 < 75\%$

$\Rightarrow$ kleinster Bereich: { 24; ... ;36}

Teilaufgabe Teil B 3 (6 BE)

Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wirft man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung). Wird Sektor K erzielt, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors N beträgt 160°. Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E.



Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$P(N) = \dfrac{160°}{360°} = \dfrac{4}{9}$

Sei $P(K) = p$ die Wahrscheinlichkeit den Sektor K zu erzielen.

$P(E) = 1 - \dfrac{4}{9} - p = \dfrac{5}{9} - p$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn:

Ereignis ω	Keine 6 gewürfelt **oder** 6 gewürfelt und Sektor N gedreht	6 gewürfelt und Sektor K gedreht	6 gewürfelt und Sektor E gedreht
$G = g_i$	0 €	28 €	36 €
$P(G = g_i)$	p_0	$\frac{1}{6} \cdot p$	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{9} - p\right)$

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Erwartungswert für den Gewinn: $E(G) = 3$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$0 \cdot p_0 + 28 \cdot \dfrac{1}{6}p + 36 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{9} - p\right) = 3$

$\dfrac{1}{6} \cdot \left[28p + 36 \cdot \left(\dfrac{5}{9} - p\right)\right] = 3$

$28p + 20 - 36p = 18$

$-8p = -2$

$p = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Sektor K: $360° \cdot \dfrac{1}{4} = 90°$

$\Rightarrow$ Sektor E: $360° - 160° - 90° = 110°$

Teilaufgabe Teil B 4a (2 BE)

Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4a

Wahrscheinlichkeit

E: „Nicht alle 3 Anstecker haben dasselbe Motiv"

$\overline{E}$: „Alle 3 Anstecker haben dasselbe Motiv"

Erläuterung: *Gegenereignis*

Für die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses $\overline{E}$ gilt: $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)$

Durch Umstellung der Gleichung ergibt sich: $P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right)$

$P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right)$

Erläuterung: *Laplace-Wahrscheinlichkeit*

Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit (jedes Motiv wird mit derselben Wahrscheinlichkeit gedruckt) gilt:

$$P\left(\overline{E}\right) = \frac{|\overline{E}|}{|\Omega|} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ günstige Fälle} \\ \leftarrow \text{ mögliche Fälle} \end{array}$$

$|\Omega| = 5^3$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus $n = 5$ verschiedenen Motiven $k = 3$ hintereinander auszuwählen mit Berücksichtigung der Reihenfolge $\left(n^k\right)$.

$|\overline{E}| = 5 \cdot 1 \cdot 1$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, dass alle 3 Anstecker dasselbe Motiv haben. Für den ersten Anstecker gibt es 5 Möglochkeiten, für die anderen dann jeweils nur 1.

$$P(E) = 1 - \frac{5 \cdot 1 \cdot 1}{5^3} = \frac{24}{25}$$

Teilaufgabe Teil B 4b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4b

Wahrscheinlichkeit

Insgesamt gibt es n^3 Möglichkeiten für die Auswahl der drei Motive.

Wenn die Motive paarweise verschieden sein sollen, gibt es für den ersten Anstecker n Möglichkeiten, für den zweiten $n-1$ und für den dritten $n-2$ Möglichkeiten.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man damit:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$$

Teilaufgabe Teil B 4c (3 BE)

Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90% ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4c

Wahrscheinlichkeit

$$\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2} > 0,9 \qquad |\cdot n^2$$

$$(n-1)\cdot(n-2) > 0,9n^2$$

$$n^2 - 3n + 2 > 0,9n^2 \qquad |-0,9n^2$$

$$0,1n^2 - 3n + 2 > 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-0,8}}{0,2}$$

$$n_1 \approx 29,3\ ;\ n_2 \approx 0,7$$

Es müssen mindenstens 30 verschiedene Motive sein.