Abitur 2021 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f.

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

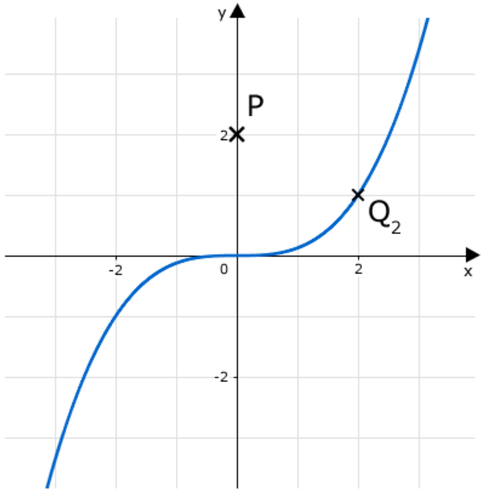
Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Der Graph von f schließt mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a\ (a|f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0|2)$ und Q_2.



Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a.

(zur Kontrolle: $m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}$)

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{6x}{x^2 - 4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an.
Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ und $]2;+\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\dfrac{6\cdot\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$)

Die Punkte $A(3|3,6)$ und $B(8|0,8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Strecke [AB].

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[A\,B]$ eingeschlossen wird.

Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c}: x \mapsto \dfrac{a\,x+b}{x^2+c}$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

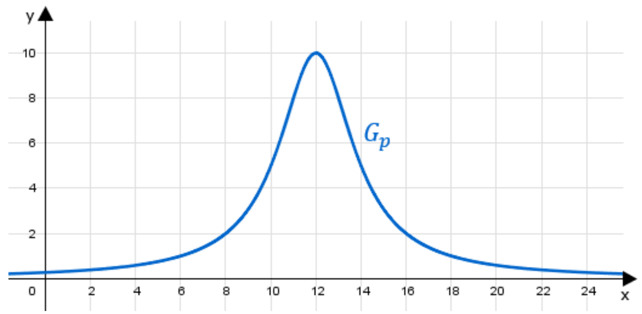
Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\dfrac{a\,x^2+2b\,x-a\,c}{\left(x^2+c\right)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p: x \mapsto \dfrac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \dfrac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt.

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Die Funktion p besitzt im Intervall $[4;12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil B 3d (3 BE)

Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).

Die in $[4;20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.

Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4;20]$.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$f(x) = e^{2x+1}$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel für Exponentialfunktionen:
>
> $f(x) = e^{g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
>
> In diesem Fall ist $g(x) = 2x + 1$ und $g'(x) = 2$.

$f'(x) = 2e^{2x+1}$

Da $f'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$, ist f streng monoton zunehmend und damit umkehrbar.

Umkehrfunktion bestimmen

$y = e^{2x+1}$

Erläuterung: *Vertauschen der Variablen*

Um die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f zu bestimmen, vertauscht man die Variablen x und y in der Funktionsgleichung und löst die Gleichung nach y auf.

Einfaches Beispiel:

$f(x) = x + 2$

$y = x + 2$

Vertauschen:

$x = y + 2$

Auflösen:

$y = x - 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$

$x = e^{2y+1} \qquad |\ln$

$\ln x = 2y + 1$

$2y = \ln x - 1$

$y = \frac{1}{2}(\ln x - 1)$

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \left(x^2 - 9x\right) \cdot \sqrt{2 - x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = \left(x^2 - 9x\right) \cdot \sqrt{2 - x}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$g(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $2 - x$, muss größer oder gleich Null sein.

$2 - x \geq 0$

$-x \geq -2 \qquad | \cdot (-1)$

$x \leq 2$

$\Rightarrow \quad D_g =]-\infty; 2]$

Nullstellen einer Funktion

Ansatz: $g(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$0 = \left(x^2 - 9x\right) \cdot \sqrt{2 - x}$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $x^2 - 9x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad (x_2 = 9 \notin D_g)$

2. $2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

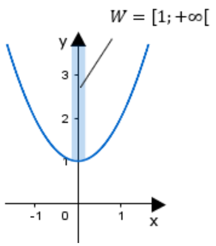
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Wertemenge einer Funktion

Die Funktion x^2+1 nimmt Werte im Intervall $[1; +\infty[$ an.

Erläuterung: *Parabel*



Die Funktion $\frac{1}{x^2+1}$ nimmt somit Werte im Intervall $]0; 1]$ an.

Erläuterung: *Grenzwert*

$$\lim_{x^2+1\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\to\infty} = 0$$

$$\lim_{x^2+1\to 1} \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\to 1} = 1$$

Die Funktion $h(x)$ nimmt ihrerseits Werte im Intervall $]-\infty; 0]$ an.

Erläuterung: *Grenzwert*

$$\lim_{\frac{1}{x^2+1}\to 0} \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{\frac{1}{x^2+1}\to 1} \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 0$$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = -2x^{-\frac{1}{2}}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$

$$F'(x) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = f(x)$$

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Der Graph von f schließt mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Flächenberechnung

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 1 und $b > 1$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{dx}$$

$$1 = \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

$F(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ ist Stammfunktion von $f(x)$ (s. Teilaufgabe Teil A 3a).

$$1 = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$1 = -\frac{2}{\sqrt{b}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{1}}\right)$$

$$1 = -\frac{2}{\sqrt{b}} + 2$$

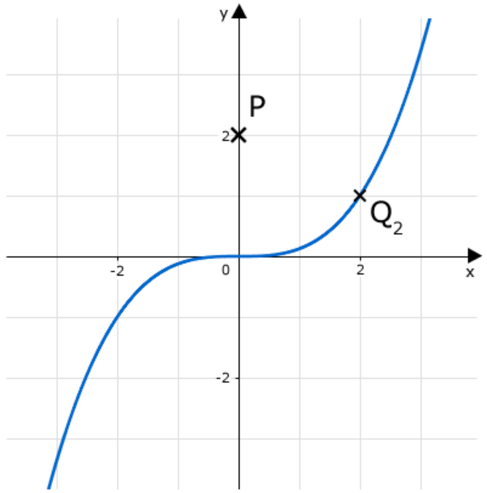
$$\frac{2}{\sqrt{b}} = 1 \qquad |^2$$

$$\frac{4}{b} = 1$$

$$b = 4$$

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a\ (a|f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0|2)$ und Q_2.

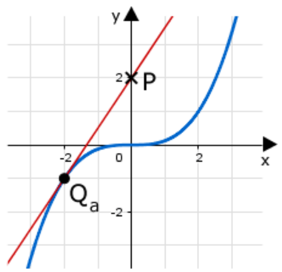


Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a.

(zur Kontrolle: $m_a = \dfrac{a^3 - 16}{8a}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Steigung einer linearen Funktion



Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden, die durch die Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ verläuft, ist gegeben durch:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_a = \frac{f(a) - 2}{a - 0} = \frac{\frac{1}{8}a^3 - 2}{a} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \left(a^3 - 16\right)}{a} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^3 - 16}{a} = \frac{a^3 - 16}{8a}$$

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Tangentengleichung ermitteln

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2$$

Es soll gelten: $\quad f'(a) = m_a \quad (a \neq 0)$

$$\frac{3}{8}a^2 = \frac{a^3 - 16}{8a} \qquad | \cdot 8a$$

$$3a^3 = a^3 - 16$$

$$2a^3 = -16$$

$$a^3 = -8$$

$$a = -2$$

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{6x}{x^2 - 4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an.
Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Asymptoten bestimmen

Senkrechte Asymptoten: $x = -2$; $x = 2$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{6x}^{\to \infty}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\to \infty}} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{x \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{\underbrace{x - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}}_{\to \infty}} = 0$$

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty; -2[$, $]-2; 2[$ und $]2; +\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{6 \cdot \left(x^2 + 4\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Monotonieverhalten einer Funktion

$f(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 4}$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

> Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*
>
> Quotientenregel:
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$
>
> Hier ist $\quad u(x) = 6x \quad$ und $\quad v(x) = x^2 - 4$.
> Dann ist $\quad u'(x) = 6 \quad$ und $\quad v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{6 \cdot \left(x^2 - 4\right) - 6x \cdot 2x}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \frac{-6x^2 - 24}{\left(x^2 - 4\right)^2} = -\frac{6 \cdot \left(x^2 + 4\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ untersuchen:

$$f'(x) = -\frac{6 \cdot \overbrace{\left(x^2 + 4\right)}^{>0}}{\underbrace{\left(x^2 - 4\right)^2}_{>0}} =< 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

> Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*
>
> Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.
>
> Es gilt:
>
> Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton steigend.
>
> Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow$ streng monoton fallend in allen Teilintervallen

Steigung eines Funktionsgraphen

$m = f'(0) = -\dfrac{24}{16} = -\dfrac{3}{2}$

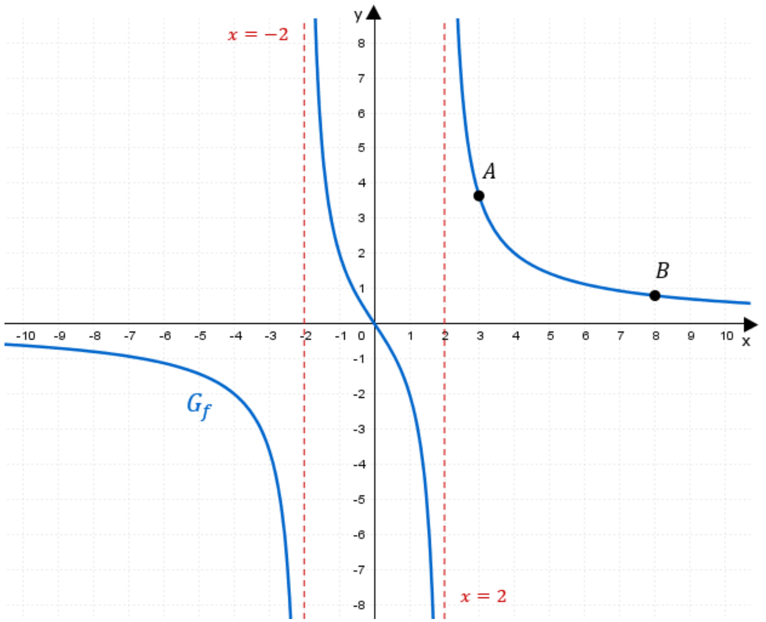
Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Die Punkte $A(3|3,6)$ und $B(8|0,8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Strecke [AB].

Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Skizze

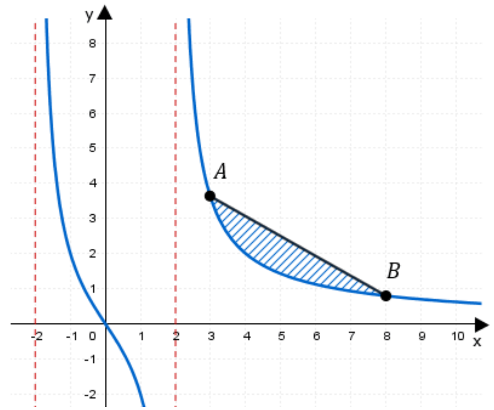


Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

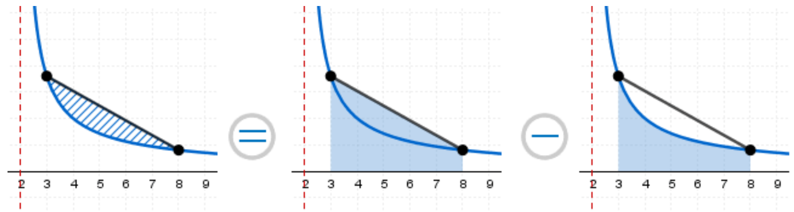
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[A\,B]$ eingeschlossen wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Die Fläche, die die Strecke $[A\,B]$ mit der x-Achse zwischen 3 und 8 einschließt, entspricht dem Flächeninhalt eines Trapezes mit Seitenlängen 3,6 und 0,8 und Höhe 5.

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (3,6 + 0,8) \cdot 5$$

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 3 und 8 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_3^8 \frac{6x}{x^2-4}\,\text{dx}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3,6 + 0,8) \cdot 5 - \int\limits_3^8 \frac{6x}{x^2 - 4} \text{ dx}$$

Erläuterung: *Ausklammern, Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gilt folgende Rechenregel für Integrale:

$$\int\limits_a^b c \cdot h(x) d\,x \quad = \quad c \cdot \int\limits_a^b h(x) d\,x$$

Hier wird der Faktor 3 aus dem Integral ausgeklammert, damit im Integral eine Funktion der Form $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ stehen bleibt.

$$\underbrace{(x^2 - 4)}_{g(x)}{}' = \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

$$A = 11 - 3 \cdot \int\limits_3^8 \frac{2x}{x^2 - 4} \text{ dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\dfrac{2x}{x^2 - 4}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ dx} = \ln|g(x)| + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{2x}{x^2 - 4} \text{ dx} = \ln \left|x^2 - 4\right|$$

Hier ist die Nennerfunktion $g(x) = x^2 - 4$. Abgeleitet ergibt sie die Zählerfunktion $2x$.

$$A = 11 - 3 \cdot \left[\ln|x^2 - 4|\right]_3^8$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x) \text{ dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$A = 11 - 3\,(\ln 60 - \ln 5) \approx 3,55$ Flächeneinheiten

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c} : x \mapsto \dfrac{a\,x + b}{x^2 + c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Parameterwerte ermitteln

$$f_{a,b,c}(x) = \frac{a\,x + b}{x^2 + c}$$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 - 4}$$

$a = 6,\ b = 0,\ c = -4$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f_{0,b,c}(x) = \dfrac{b}{x^2+c}$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

$f_{0,b,c}(-x) = \dfrac{b}{(-x)^2+c} = \dfrac{b}{x^2+c} = f_{0,b,c}(x)$

$\Rightarrow$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse

Da $b \neq 0$ gilt: $f_{0,b,c}(x) \neq 0$ für alle $x \in D_{0,b,c}$

$\Rightarrow$ schneidet die x-Achse nicht

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Parameterwerte ermitteln

$f_{a,b,c}(x) = \dfrac{a\,x+b}{x^2+c}$

$D_{a,b,c} = \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c > 0$

$f_{a,b,c}(-x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f_{a,b,c}(-x) = -f_{a,b,c}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{-a\,x+b}{x^2+c} = \dfrac{-a\,x-b}{x^2+c} \quad \Rightarrow \quad b = 0$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\dfrac{a\,x^2+2b\,x-a\,c}{(x^2+c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Art von Extrempunkten ermitteln

$f'_{a,b,c}(x) = -\dfrac{a\,x^2+2b\,x-a\,c}{(x^2+c)^2}$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'_{a,b,c}(x) = 0$

$-\dfrac{a\,x^2+2b\,x-a\,c}{\underbrace{(x^2+c)^2}_{>0}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a\,x^2+2b\,x-a\,c = 0$

Erläuterung: *Diskriminante*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Diskriminante D.

$$D = b^2 - 4a\,c$$

Man unterscheidet drei Fälle:

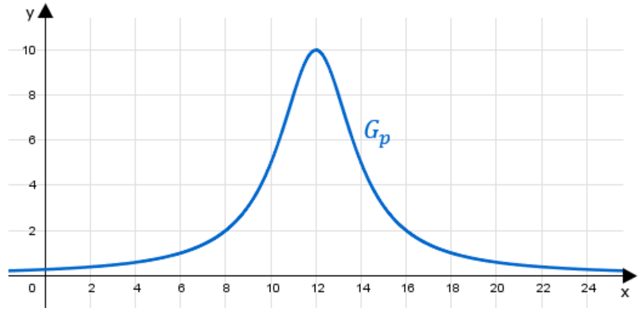
1. Die Diskriminante ist negativ: $D < 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
2. Die Diskriminante ist Null: $D = 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung
3. Die Diskriminante ist positiv: $D > 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen

Ist nach der Anzahl der Lösungen gefragt, dann untersucht man das Vorzeichen der Diskriminante.

$D = 4b^2 + 4a^2\,c > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 Nullstellen mit Vorzeichenwechsel

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p : x \mapsto \dfrac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto \dfrac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$p(x) = \frac{40}{(x-12)^2+4}$$
$$h(x) = \frac{5}{x^2+4}$$

1. Verschiebung um 12 Einheit entlang der positiven x-Achse

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{x^2+4} \to \frac{5}{(x-12)^2+4}$$

2. Streckung um dem Faktor 8 in y-Richtung

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{(x-12)^2+4} \to 8 \cdot \frac{5}{(x-12)^2+4}$$

Da der Graph von h symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, folgt somit, dass G_p symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ ist.

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Funktionswert berechnen

$$p(x) = \frac{40}{(x-12)^2+4}$$

Erläuterung:

Der Tageshochwert wird am Graphen der Funktion $p(x)$ abgelesen.

Tageshochwert: 10

40% davon: $0,4 \cdot 10 = 4$

$p(x) = 4$

$$\frac{40}{(x-12)^2+4} = 4 \qquad \Big| \cdot \Big((x-12)^2+4\Big)$$

$$40 = 4 \cdot \Big((x-12)^2+4\Big) \qquad | : 4$$

$$10 = (x-12)^2 + 4 \qquad | - 4$$

$$6 = (x-12)^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$\pm\sqrt{6} = x - 12$$

Erläuterung:

Gesucht ist ist die Uhrzeit am Nachmittag, d.h. für $x > 12$ (Stunden nach Mitternacht).

$$x_1 = 12 + \sqrt{6} \approx 14,449 \qquad \Big(x_2 = 12 - \sqrt{6}\Big)$$

Ab etwa 14:27 Uhr beträgt die Leistung der Anlage weniger als 40 % ihres Tageshöchstwerts.

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Die Funktion p besitzt im Intervall $[4; 12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Anwendungszusammenhang

Die Wendestelle entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die Zunahme der Leistung am größten ist.

Teilaufgabe Teil B 3d (3 BE)

Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).

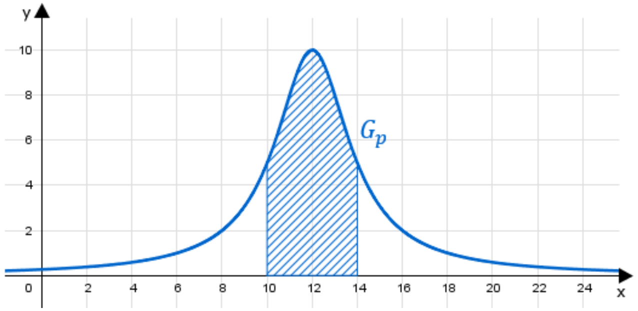
Die in $[4; 20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.

Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4; 20]$.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3d

Bestimmtes Integral



Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von p beträgt zwischen $x = 10$ und $x = 14$ etwa 31. Somit speist die Anlage zwischen 10:00 Uhr und 14:00 Uhr etwa 31 kWh elektrische Energie in das Stromnetz ein, wofür der Eigentümer eine Vergütung von etwa 3,10 € erhält.