# Abitur 2020 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto x \cdot \ln\left(x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich $D_h$.

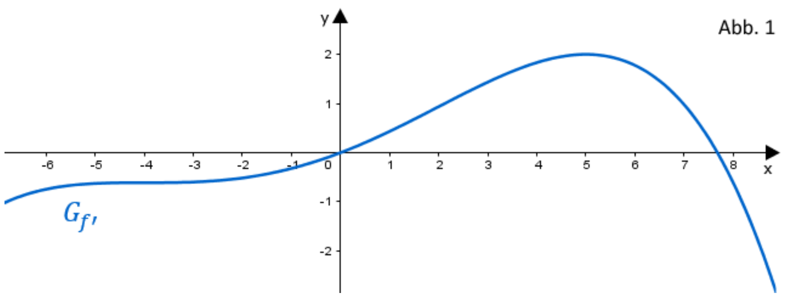
**Teilaufgabe Teil A 1a** (2 BE)

Geben Sie $D_h$ an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion $h'$ von $h$ gilt: $h'(x) = \ln\left(x^2\right) + 2$.

**Teilaufgabe Teil A 1b** (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von $h$.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion $f'$ einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion $f$. Nur in den Punkten $\left(-4|f'(-4)\right)$ und $\left(5|f'(5)\right)$ hat der Graph $G_{f'}$ waagrechte Tangenten.




**Teilaufgabe Teil A 2a** (2 BE)

Begründen Sie, dass $f$ genau eine Wendestelle besitzt.

**Teilaufgabe Teil A 2b** (2 BE)

Es gibt Tangenten an den Graphen von $f$, die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion $f'$ in der Abbildung 1 Näherungswerte für die $x$-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von $f$ jeweils eine solche Tangente hat.





Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m: x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von $f$ wird mit $G_f$ und der Graph von $g_m$ mit $G_m$ bezeichnet.

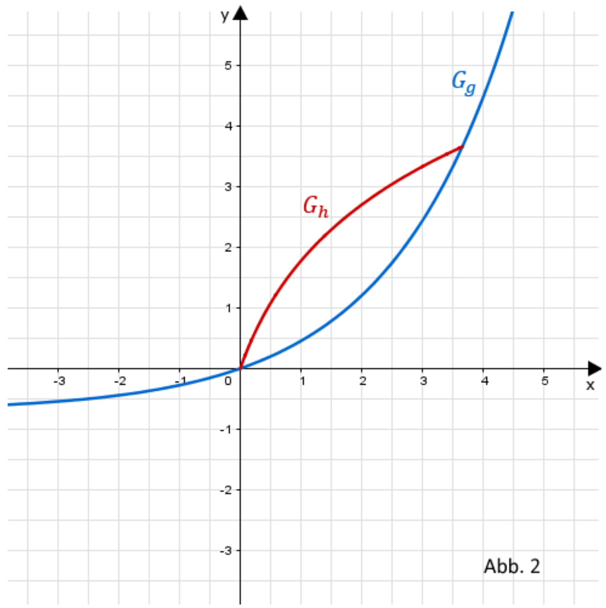
**Teilaufgabe Teil A 3a** (3 BE)

Skizzieren Sie $G_f$ in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen $G_f$ und $G_4$.

**Teilaufgabe Teil A 3b** (2 BE)

Es gibt Werte von $m$, für die die Graphen $G_f$ und $G_m$ jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von $m$ an.

Gegeben ist die Funktion $g$ mit $g(x) = 0,7 \cdot e^{0,5x} - 0,7$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $g$ ist umkehrbar. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen $G_g$ von $g$ sowie einen Teil des Graphen $G_h$ der Umkehrfunktion $h$ von $g$.



**Teilaufgabe Teil A 4a** (2 BE)

Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von $G_h$ ein.

**Teilaufgabe Teil A 4b** (2 BE)

Betrachtet wird das von den Graphen $G_g$ und $G_h$ eingeschlossene Flächenstück. Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term $2 \cdot \int\limits_0^{2,5} (x - g(x))\ \mathrm{d}x$ berechnet werden kann.

**Teilaufgabe Teil A 4c** (2 BE)

Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k: x \mapsto x - g(x)$ an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; die Abbildung 1 (Teil B) zeigt ihren Graphen $G_f$.

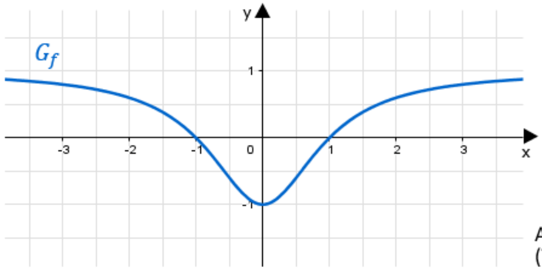



Abb. 1 (Teil B)

**Teilaufgabe Teil B 1a** (5 BE)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass $G_f$ symmetrisch bezüglich der $y$-Achse ist, und untersuchen Sie anhand des Funktionsterms das Verhalten von $f$ für $x \to +\infty$. Bestimmen Sie diejenigen $x$-Werte, für die $f(x) = 0,96$ gilt.





**Teilaufgabe Teil B 1b** (4 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von $G_f$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$)

**Teilaufgabe Teil B 1c** (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente $t$ an $G_f$ im Punkt $(3|f(3))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem $t$ die x-Achse schneidet, und zeichnen Sie $t$ in die Abbildung 1 (Teil B) ein.

Nun wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int\limits_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ betrachtet; ihr Graph wird mit $G_F$ bezeichnet.

**Teilaufgabe Teil B 2a** (5 BE)

Begründen Sie, dass $F$ in $x = 0$ eine Nullstelle hat, und machen Sie mithilfe des Verlaufs von $G_f$ plausibel, dass im Intervall $[1;3]$ eine weitere Nullstelle von $F$ liegt.
Geben Sie an, welche besondere Eigenschaft $G_F$ im Punkt $(-1|F(-1))$ hat, und begründen Sie Ihre Angabe.

**Teilaufgabe Teil B 2b** (2 BE)

Die Gerade mit der Gleichung $y = x - 1$ begrenzt gemeinsam mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks und den sich daraus ergebenden Näherungswert für $F(1)$ an.

**Teilaufgabe Teil B 2c** (5 BE)

Die Abbildung 2 (Teil B) zeigt den Graphen $G_f$ sowie den Graphen $G_g$ der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Beschreiben Sie, wie $G_g$ aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \cos x$ hervorgeht, und berechnen Sie durch Integration von $g$ einen weiteren Näherungswert für $F(1)$.

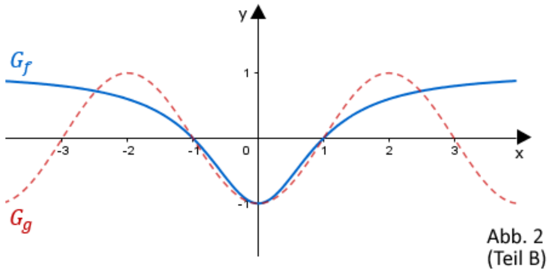



Abb. 2
(Teil B)

(zur Kontrolle: $F(1) \approx -\frac{2}{\pi}$)

**Teilaufgabe Teil B 2d** (4 BE)

Berechnen Sie das arithmetische Mittel der beiden in den Aufgaben 2b und 2c berechneten Näherungswerte. Skizzieren Sie den Graphen von $F$ für $0 \leq x \leq 3$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in der Abbildung 1 (Teil B).

Für jeden Wert $k > 0$ legen die auf $G_f$ liegenden Punkte $P_k\ (-k|f(-k))$ und $Q_k\ (k|f(k))$ gemeinsam mit dem Punkt $R(0|1)$ ein gleichschenkliges Dreieck $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}$ fest.





**Teilaufgabe Teil B 3a** (5 BE)

Berechnen Sie für $k = 2$ den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{R}$ (vgl. Abbildung 3).
Zeigen Sie anschließend, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}$ allgemein durch den Term $A(k) = \frac{2k}{k^2+1}$ beschrieben werden kann.

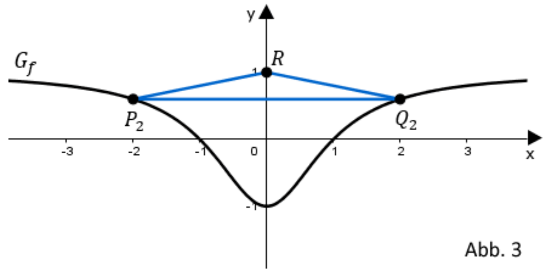



Abb. 3

**Teilaufgabe Teil B 3b** (6 BE)

Zeigen Sie, dass es einen Wert von $k > 0$ gibt, für den $A(k)$ maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von $k$ sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}$.

## Lösung

### Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto x \cdot \ln\left(x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich $D_h$.

Geben Sie $D_h$ an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion $h'$ von $h$ gilt: $h'(x) = \ln\left(x^2\right) + 2$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

***Definitionsbereich bestimmen***

$h(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right)$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> $\ln\left(x^2\right)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(h(x))$.
>
> Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert. Somit gilt für die Argumentfunktion: $h(x) > 0$.
>
> In diesem Fall: $x^2 > 0$

$x^2 > 0$

$\Rightarrow \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

***Erste Ableitung einer Funktion ermitteln***

$$h'(x) = 1 \cdot \ln\left(x^2\right) + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \ln\left(x^2\right) + 2$$





> Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Produktregel:
>
> $f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
>
> In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = \ln\left(x^2\right)$.
>
> Kettenregel für Logarithmusfunktionen:
>
> $v(x) = \ln(g(x)) \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
>
> Hier ist $g(x) = x^2$.
> Dann ist $g'(x) = 2x$.

### Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von $h$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

***Lage des Hochpunktes***

$h'(x) = \ln\left(x^2\right) + 2$

$h'(x) = 0$

$\ln\left(x^2\right) + 2 = 0$

$\ln\left(x^2\right) = -2 \qquad |e^x$

$x^2 = e^{-2} \qquad |\sqrt{\phantom{x}}$

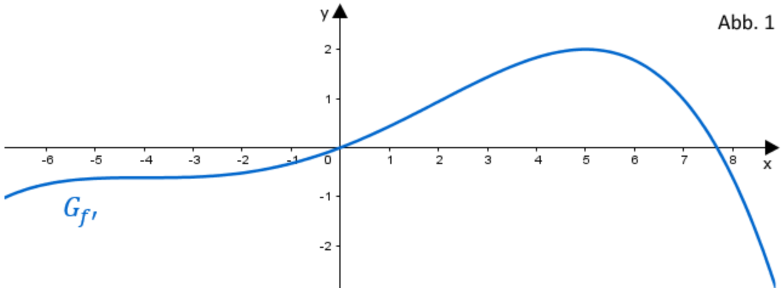
$\left(x_1 = \sqrt{e^{-2}}\right) \qquad x_2 = -\sqrt{e^{-2}} = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$

$$h\left(-e^{-1}\right) = -e^{-1} \cdot \ln\left(\left(-e^{-1}\right)^2\right) = -e^{-1} \cdot \underbrace{\ln\left(e^{-2}\right)}_{-2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow \quad \text{HOP}\left(-e^{-1} | 2e^{-1}\right)$

**Teilaufgabe Teil A 2a** (2 BE)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion $f'$ einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion $f$. Nur in den Punkten $\big(-4|f'(-4)\big)$ und $\big(5|f'(5)\big)$ hat der Graph $G_{f'}$ waagrechte Tangenten.




Begründen Sie, dass $f$ genau eine Wendestelle besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

***Eigenschaften der Ableitungsfunktion***

Dort, wo $f'$ eine Extremstelle besitzt, besitzt $f$ eine Wendestelle.

$\Rightarrow \quad f$ besitzt Wendestelle bei $x = 5$

$f'$ besitzt an der Stelle $x = -4$ einen Terrassenpunkt; Monotonie von $f'$ ändert sich an dieser Stelle nicht, somit ändert sich bei $f$ nicht das Krümmungsverhalten.

**Teilaufgabe Teil A 2b** (2 BE)

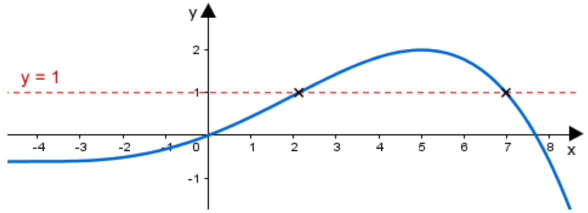
Es gibt Tangenten an den Graphen von $f$, die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion $f'$ in der Abbildung 1 Näherungswerte für die $x$-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von $f$ jeweils eine solche Tangente hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

***Eigenschaften der Ableitungsfunktion***








Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet $G_{f'}$ an den Stellen $x \approx 2$ und $x \approx 7$.

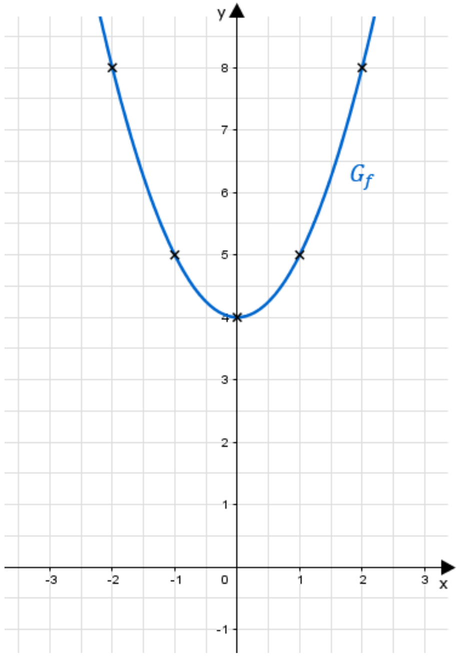
**Teilaufgabe Teil A 3a** (3 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f : x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m : x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von $f$ wird mit $G_f$ und der Graph von $g_m$ mit $G_m$ bezeichnet.

Skizzieren Sie $G_f$ in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen $G_f$ und $G_4$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

***Skizze***




***Schnittpunkt zweier Funktionen***

$g_4(x) = 4x$

$f(x) = g_4(x)$

$x^2 + 4 = 4x$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2$

$g_4(2) = 8$

$P(2|8)$





**Teilaufgabe Teil A 3b** (2 BE)

Es gibt Werte von $m$, für die die Graphen $G_f$ und $G_m$ jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von $m$ an.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b**

***Schnittpunkt zweier Funktionen***

$x^2 + 4 = m\,x$

$x^2 - m\,x + 4 = 0$

$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 - 16$

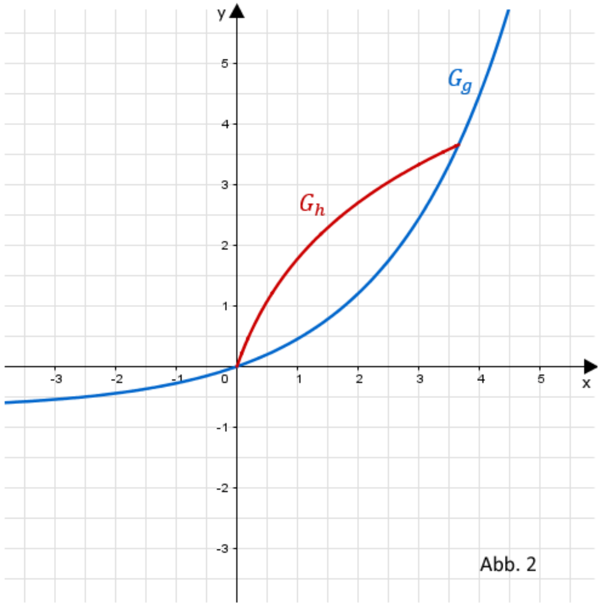
$m^2 - 16 < 0$

$m^2 < 16$

$-4 < m < 4$

**Teilaufgabe Teil A 4a** (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $g$ mit $g(x) = 0,7 \cdot e^{0,5x} - 0,7$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $g$ ist umkehrbar. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen $G_g$ von $g$ sowie einen Teil des Graphen $G_h$ der Umkehrfunktion $h$ von $g$.



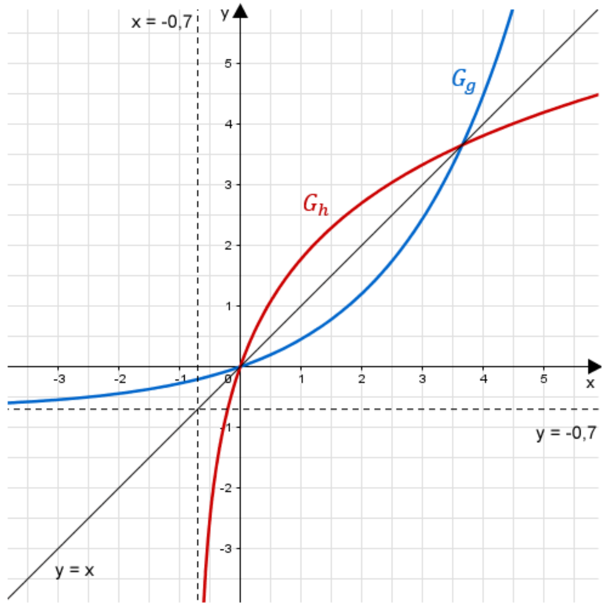

Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von $G_h$ ein.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a]

***Umkehrfunktion bestimmen***





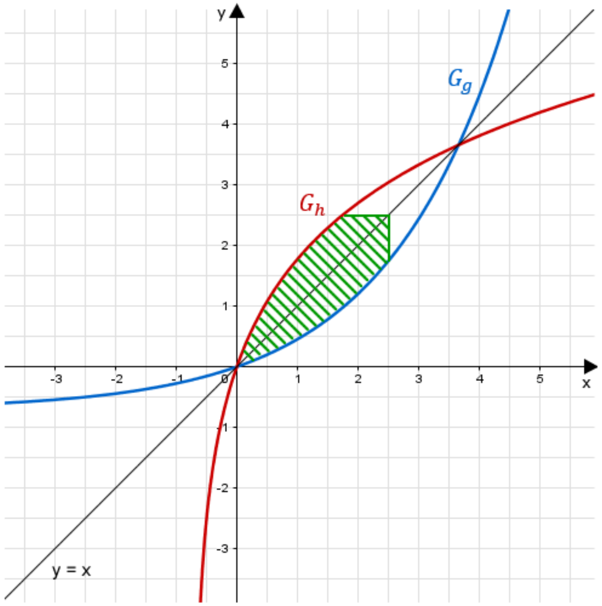



**Teilaufgabe Teil A 4b** (2 BE)

Betrachtet wird das von den Graphen $G_g$ und $G_h$ eingeschlossene Flächenstück. Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term $2 \cdot \int_0^{2{,}5} (x - g(x)) \, dx$ berechnet werden kann.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b]

***Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen***




### Teilaufgabe Teil A 4c (2 BE)

Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k : x \mapsto x - g(x)$ an.

### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4c

***Stammfunktion***

$k(x) = x - 0,7e^{0,5x} + 0,7$

$K(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1,4e^{0,5x} + 0,7x$

### Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)





Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$; die Abbildung 1 (Teil B) zeigt ihren Graphen $G_f$.

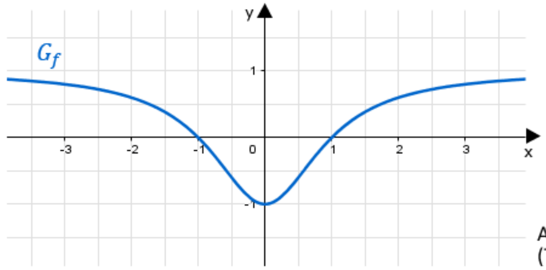



Abb. 1 (Teil B)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass $G_f$ symmetrisch bezüglich der $y$-Achse ist, und untersuchen Sie anhand des Funktionsterms das Verhalten von $f$ für $x \to +\infty$. Bestimmen Sie diejenigen $x$-Werte, für die $f(x) = 0,96$ gilt.

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

***Symmetrieverhalten einer Funktion***

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

$G_f$ ist achsensymmetrisch bezüglich der $y$-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

$G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$

$\Rightarrow$ $G_f$ ist achsensymmetrisch bezüglich der $y$-Achse

***Grenzwert bestimmen***

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 1$$

***Schnittpunkt zweier Funktionen***

$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0,96 \qquad |\cdot(x^2+1)$

$x^2 - 1 = 0,96x^2 + 0,96 \qquad |-0,96x^2+1$

$0,04x^2 = 1,96 \qquad |:0,04$

$x^2 = 49 \qquad |\sqrt{\phantom{x}}$

$x_{1,2} = \pm 7$

**Teilaufgabe Teil B 1b** (4 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von $G_f$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$)

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b**

***Monotonieverhalten einer Funktion***

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot\left(x^2+1-x^2+1\right)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ untersuchen:





$$f'(x) = \frac{\overbrace{4x}^{>0}}{\underbrace{\left(x^2+1\right)^2}_{>0}} > 0 \qquad \text{für} \qquad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{4x}^{<0}}{\underbrace{\left(x^2+1\right)^2}_{>0}} < 0 \qquad \text{für} \qquad x < 0$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist $G_f$ für $x \in [a;b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist $G_f$ für $x \in [a;b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist für $x \in ]-\infty;0]$ streng monoton fallend

$\Rightarrow \quad G_f$ ist für $x \in [0;+\infty[$ streng monoton steigend

**Teilaufgabe Teil B 1c** (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente $t$ an $G_f$ im Punkt $(3|f(3))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem $t$ die x-Achse schneidet, und zeichnen Sie $t$ in die Abbildung 1 (Teil B) ein.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c**

***Tangentengleichung ermitteln***

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

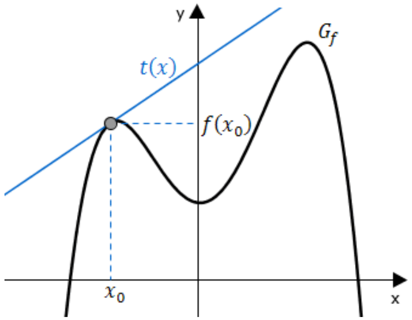
$f(3) = \frac{4}{5}$

$f'(3) = \frac{3}{25}$

Erläuterung:

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$




Hier ist $x_0 = 3$.

$t : y = (x - x_0) \cdot f'\ (x_0) + f\ (x_0)$

$t : y = (x - 3) \cdot f'\ (3) + f\ (3)$

$t : y = (x - 3) \cdot \frac{3}{25} + \frac{4}{5}$

$t : y = \frac{3}{25}x + \frac{11}{25}$

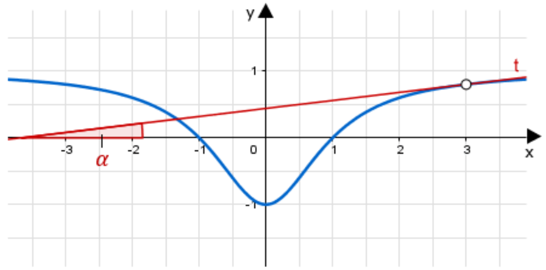
***Winkel bestimmen***

$\tan\alpha = \frac{3}{25} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{25}\right) \approx 6,84°$

***Skizze***








**Teilaufgabe Teil B 2a** (5 BE)

Nun wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ betrachtet; ihr Graph wird mit $G_F$ bezeichnet.

Begründen Sie, dass $F$ in $x = 0$ eine Nullstelle hat, und machen Sie mithilfe des Verlaufs von $G_f$ plausibel, dass im Intervall $[1; 3]$ eine weitere Nullstelle von $F$ liegt.
Geben Sie an, welche besondere Eigenschaft $G_F$ im Punkt $(-1|F(-1))$ hat, und begründen Sie Ihre Angabe.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a**

***Eigenschaften der Integralfunktion***

$x_0$ = untere Integrationsgrenze

Anhand des Verlaufs von $G_f$ erkennt man, dass es eine Stelle $x_0$ mit $x_0 \in [1; 3]$ gibt, sodass $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_1^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t$ (Flächenbilanz). Damit ist $x_0$ eine weitere Nullstelle von $F$.

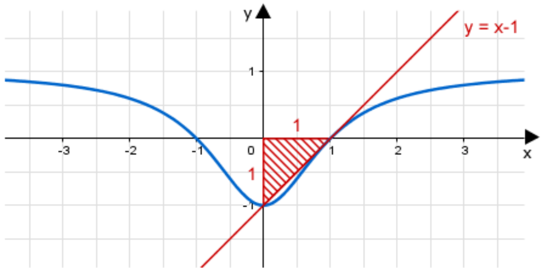
$G_F$ hat in $(-1|F(-1))$ einen Hochpunkt, da die Ableitung $f$ von $F$ an der Stelle $-1$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus hat.

**Teilaufgabe Teil B 2b** (2 BE)

Die Gerade mit der Gleichung $y = x - 1$ begrenzt gemeinsam mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks und den sich daraus ergebenden Näherungswert für $F(1)$ an.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b**

***Bestimmtes Integral***




$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$F(1) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{dt} \approx -\frac{1}{2}$$

**Teilaufgabe Teil B 2c** (5 BE)

Die Abbildung 2 (Teil B) zeigt den Graphen $G_f$ sowie den Graphen $G_g$ der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Beschreiben Sie, wie $G_g$ aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \cos x$ hervorgeht, und berechnen Sie durch Integration von $g$ einen weiteren Näherungswert für $F(1)$.





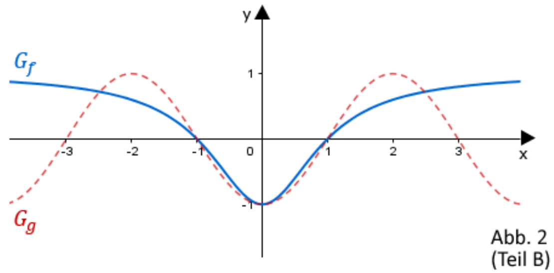



Abb. 2 (Teil B)

(zur Kontrolle: $F(1) \approx -\frac{2}{\pi}$)

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c**

***Verschiebung von Funktionsgraphen***

$G_g$ geht aus dem Graphen zu $x \mapsto \cos x$ hervor durch:

1) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$

$$\cos x \quad \rightarrow \quad \cos\left(\frac{x}{\frac{2}{\pi}}\right)$$

2) Spiegelung an der x-Achse

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \rightarrow \quad -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

***Bestimmtes Integral***

$$\int_0^1 g(t)\ \mathrm{dt} = \int_0^1 -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ \mathrm{dt}$$

$$\int_0^1 g(t)\ \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 g(t)\ \mathrm{dt} = -\frac{2}{\pi}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \left(-\frac{2}{\pi}\underbrace{\sin 0}_{0}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

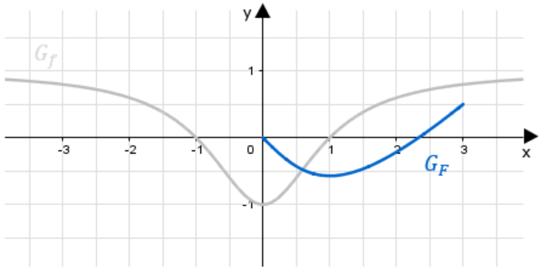
**Teilaufgabe Teil B 2d** (4 BE)

Berechnen Sie das arithmetische Mittel der beiden in den Aufgaben 2b und 2c berechneten Näherungswerte. Skizzieren Sie den Graphen von $F$ für $0 \leq x \leq 3$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in der Abbildung 1 (Teil B).

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d**

***Eigenschaften der Integralfunktion***

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) \approx -0,57$$



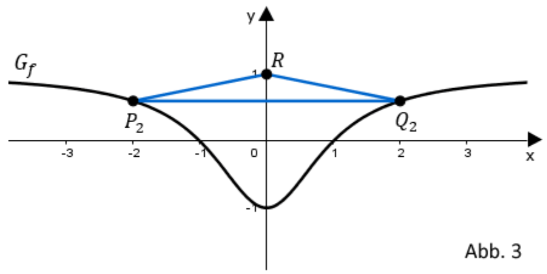

**Teilaufgabe Teil B 3a** (5 BE)

Für jeden Wert $k > 0$ legen die auf $G_f$ liegenden Punkte $P_k\ (-k|f(-k))$ und $Q_k\ (k|f(k))$ gemeinsam mit dem Punkt $R(0|1)$ ein gleichschenkliges Dreieck $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}$ fest.

Berechnen Sie für $k = 2$ den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks $\mathrm{P_2Q_2R}$ (vgl. Abbildung 3).
Zeigen Sie anschließend, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}$ allgemein durch den Term $A(k) = \dfrac{2k}{k^2+1}$ beschrieben werden kann.








**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a**

***Flächeninhalt eines Dreiecks***

$$f(2) = \frac{3}{5}$$

$$A_{\triangle \mathrm{P_2Q_2R}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (1 - f(2)) = 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

$$A_{\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (1 - f(k)) = k \cdot \left(1 - \frac{k^2-1}{k^2+1}\right) = k \cdot \left(\frac{k^2+1-k^2+1}{k^2+1}\right) = \frac{2k}{k^2+1}$$

**Teilaufgabe Teil B 3b** (6 BE)

Zeigen Sie, dass es einen Wert von $k > 0$ gibt, für den $A(k)$ maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von $k$ sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}$.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b**

***Extremwertaufgabe***

$$A(k) = \frac{2k}{k^2+1}$$

Erste Ableitung bilden:

$$A'(k) = \frac{2 \cdot \left(k^2+1\right) - 2k \cdot 2k}{\left(k^2+1\right)^2} = \frac{2-2k^2}{\left(k^2+1\right)^2}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle $x^E$ erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0,\quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $A'(k) = 0$

$$0 = \frac{2-2k^2}{\underbrace{\left(k^2+1\right)^2}_{>0}}$$

Erläuterung:

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$0 = 2 - 2k^2$

$k^2 = 1$

$k_{1,2} = \pm 1$

$\Rightarrow \quad k^E = 1$

Prüfen, ob es sich um eine Extremstelle handelt:

$A'(k) > 0$

$$\frac{2-2k^2}{\underbrace{\left(k^2+1\right)^2}_{>0}} > 0$$





Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv, wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ, wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$).

In diesem Fall ist der Nenner $\left(k^2+1\right)^2$ wegen dem Quadrat immer positiv.

Der Bruch ist somit positiv, falls der Zähler $2-2k^2$ auch positiv ist.

$2 - 2k^2 > 0$

$k^2 < 1$

$-1 < k < 1$

$A'(k) > 0$ für $-1 < k < 1$

$A'(k) < 0$ für $k \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; \infty[$

Vorzeichenwechsel von $A'(k)$ von “ +“ nach “ -“ an der Stelle $k = 1$.

$\Rightarrow \quad$ Maximum an $k = 1$

$$A(1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1} = 1$$