Abitur 2020 Mathematik Geometrie V

Die Strecke [PQ] mit den Endpunkten $P(8|-5|1)$ und Q ist Durchmesser einer Kugel mit Mittelpunkt $M(5|-1|1)$.

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten von Q und weisen Sie nach, dass der Punkt $R(9|-1|4)$ auf der Kugel liegt.

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist.

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Mehrzweckhalle, die auf einer horizontalen Fläche steht und die Form eines geraden Prismas hat.

Die Punkte $A_1(0|0|0)$, $A_2(20|0|0)$, A_3 und $A_4(0|10|0)$ stellen im Modell die Eckpunkte der Grundfläche der Mehrzweckhalle dar, die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 die Eckpunkte der Dachfläche. Diejenige Seitenwand, die im Modell in der x_1x_3-Ebene liegt, ist 6 m hoch, die ihr gegenüberliegende Wand nur 4 m.

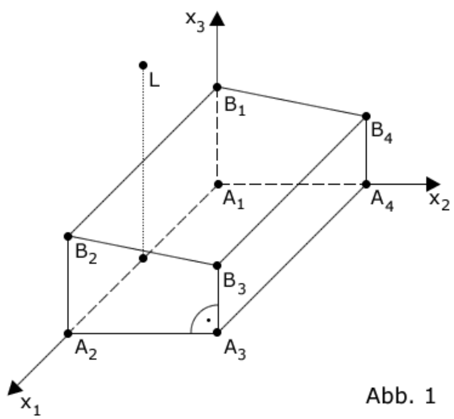


Abb. 1

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. die Mehrzweckhalle ist 20 m lang.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Punkte B_2, B_3 und B_4 an und bestätigen Sie, dass diese Punkte in der Ebene $E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$ liegen.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche gegenüber der Horizontalen.

Teilaufgabe Teil B c (6 BE)

Der Punkt $T(7|10|0)$ liegt auf der Kante $[A_3A_4]$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob es Punkte auf der Kante $[B_3B_4]$ gibt, für die gilt: Die Verbindungsstrecken des Punktes zu den Punkten B_1 und T stehen aufeinander senkrecht. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.

Der Punkt L, der vertikal über dem Mittelpunkt der Kante $[A_1A_2]$ liegt, veranschaulicht im Modell die Position einer Flutlichtanlage, die 12 m über der Grundfläche angebracht ist. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle beleuchtet – mit Ausnahme des Schattenbereichs in der Nähe der Hallenwände – das gesamte Gelände um die Halle.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Die Punkte L, B_2 und B_3 legen eine Ebene F fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform.

(zur Kontrolle: $F: 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$)

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Die Ebene F schneidet die x_1x_2-Ebene in der Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

(zur Kontrolle: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$)

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Die Abbildung 2 zeigt den Grundriss des Hallenmodells in der $x_1 x_2$-Ebene. Stellen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Schattenbereich der Flutlichtanlage in der Abbildung exakt dar.

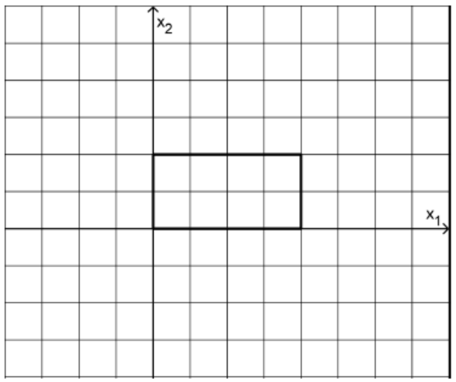


Abb. 2

Lösung

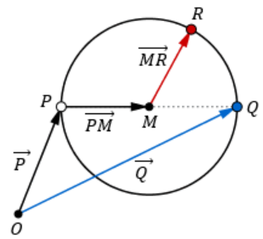
Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Die Strecke [PQ] mit den Endpunkten $P(8|-5|1)$ und Q ist Durchmesser einer Kugel mit Mittelpunkt $M(5|-1|1)$.

Berechnen Sie die Koordinaten von Q und weisen Sie nach, dass der Punkt $R(9|-1|4)$ auf der Kugel liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Lage eines Punktes



$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{P} + 2 \cdot \left(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{P}\right)$$

$$\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q(2|3|1)$$

Länge einer Strecke

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{R} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{MR}\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$r = \left|\overrightarrow{PM}\right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Erläuterung:

Der Abstand des Punktes R zum Mittelpunkt M der Kugel ist gleich dem Radius r der Kugel. Somit liegt R auf der Kugel selbst.

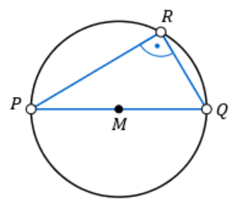
$\Rightarrow \quad R$ liegt auf Kugel

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Thaleskreis



R liegt auf dem Thaleskreis über der Strecke $[PQ]$.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Mehrzweckhalle, die auf einer horizontalen Fläche steht und die Form eines geraden Prismas hat.

Die Punkte $A_1(0|0|0)$, $A_2(20|0|0)$, A_3 und $A_4(0|10|0)$ stellen im Modell die Eckpunkte der Grundfläche der Mehrzweckhalle dar, die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 die Eckpunkte der Dachfläche. Diejenige Seitenwand, die im Modell in der x_1x_3-Ebene liegt, ist 6 m hoch, die ihr gegenüberliegende Wand nur 4 m.

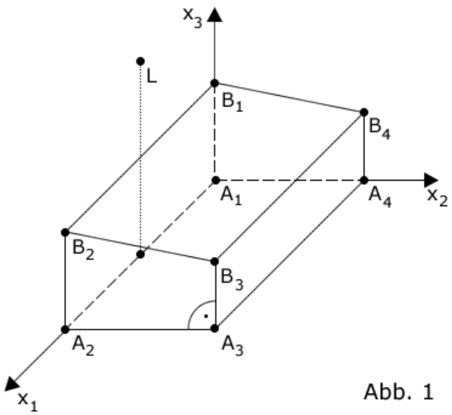


Abb. 1

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. die Mehrzweckhalle ist

20 m lang.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte B_2, B_3 und B_4 an und bestätigen Sie, dass diese Punkte in der Ebene $E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$ liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lage eines Punktes

$B_2(20|0|6)$
$B_3(20|10|4)$
$B_4(0|10|4)$

Prüfen, ob die Punkte in der Ebene $E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$ liegen:

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Liegt ein Punkt P in einer Ebene E, so erfüllen seine Koordinaten die Ebenengleichung.

$0 + 5 \cdot 6 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 \in E$
$10 + 5 \cdot 4 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_3 \in E$
$10 + 5 \cdot 4 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_4 \in E$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche gegenüber der Horizontalen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

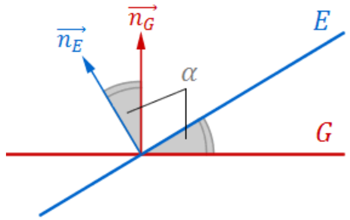
Winkel zwischen zwei Ebenen

$E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E: $\quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der x_1x_2-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Ebenen*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0+0+5}{\sqrt{0+1^2+5^2}\cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

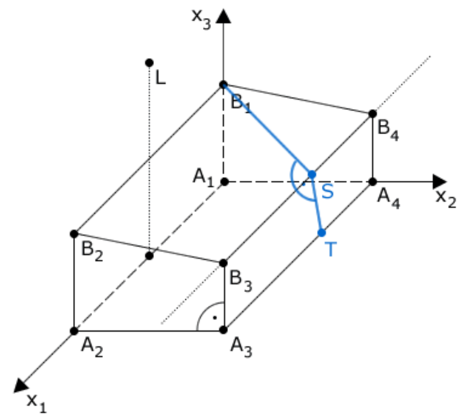
$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right) \approx 11{,}31°$$

Teilaufgabe Teil B c (6 BE)

Der Punkt $T(7|10|0)$ liegt auf der Kante $[A_3A_4]$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob es Punkte auf der Kante $[B_3B_4]$ gibt, für die gilt: Die Verbindungsstrecken des Punktes zu den Punkten B_1 und T stehen aufeinander senkrecht. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Geradengleichung aufstellen



Richtungsvektor der Geraden $B_3\,B_4$: $\quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn B_4 als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B_4}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden $B_3\,B_4$.

$$B_3\,B_4: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{B_4}} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad S(\mu|10|4) \quad$ allgemeiner Punkt auf der Kante $[B_3\,B_4]$ (mit $\mu \in [0;20]$)

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{B_1S} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{B_1} = \begin{pmatrix} \mu \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \mu \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\overrightarrow{B_1S} \circ \overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} \mu \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mu - 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu \cdot (\mu - 7) - 8 = \mu^2 - 7\mu - 8$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{B_1S} \circ \overrightarrow{TS} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^2 - 7\mu - 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\mu + 1) \cdot (\mu - 8) = 0$$

Erläuterung:

Damit der Punkt $S(\mu|10|4)$ auf der Kante $[B_3\,B_4]$ liegt, gilt für μ: $\mu \in [0; 20]$.
Der Wert $\mu = -1$ muss also ausgeschlossen werden.

$$\Rightarrow \quad \mu = 8$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\mu = 8$ wird in $S(\mu|10|4)$ eingesetzt.

$$\Rightarrow \quad S(8|10|4)$$

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Der Punkt L, der vertikal über dem Mittelpunkt der Kante $[A_1A_2]$ liegt, veranschaulicht im Modell die Position einer Flutlichtanlage, die 12 m über der Grundfläche angebracht ist. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle beleuchtet – mit Ausnahme des Schattenbereichs in der Nähe der Hallenwände – das gesamte Gelände um die Halle.

Die Punkte L, B_2 und B_3 legen eine Ebene F fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform.

(zur Kontrolle: $F: 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Ebene aus drei Punkte

$L(10|0|12)$, $B_2(20|0|6)$, $B_3(20|10|4)$

Richtungsvektoren der Ebene F:

$$\overrightarrow{LB_2} = \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LB_3} = \overrightarrow{B_3} - \overrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

L sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene F.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ der Ebene F bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LB_2} \times \overrightarrow{LB_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\dfrac{1}{20}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_F} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$$

Hier (L ist Aufpunkt):

$$F : \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_F}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{L}}$$

$F : 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 30 + 0 + 60$

$F : 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Die Ebene F schneidet die x_1x_2-Ebene in der Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

(zur Kontrolle: $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Schnitt zweier Ebenen

$F : 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$ (s. Teil B Teilaufgabe d)

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Die Gerade g liegt in der x_1x_2-Ebene, d.h. die x_3-Koordinate aller Punkte ist 0.

Für alle Punkte $P\ (x_1|x_2|x_3)$ der Geraden g gilt: $x_3 = 0$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Gerade g liegt in der Ebene F. Die Koordinaten aller Punkte $P \in F$ erfüllen somit die Ebenengleichung.

Wegen $P \in F$ folgt: $3x_1 + x_2 + 0 - 90 = 0 \iff x_2 = 90 - 3x_1$

Sei $x_1 = \mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \quad x_2 = 90 - 3\mu$

$$\Rightarrow \quad P(\mu|90-3\mu|0)$$

$$\Rightarrow \quad g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternative Lösung

Sei $x_2 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad \lambda = 90 - 3x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 30 - \frac{1}{3}\lambda$$

$$\Rightarrow \quad P(30 - \frac{1}{3}|\lambda|0)$$

$$\Rightarrow \quad g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Die Abbildung 2 zeigt den Grundriss des Hallenmodells in der x_1x_2-Ebene. Stellen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Schattenbereich der Flutlichtanlage in der Abbildung exakt dar.

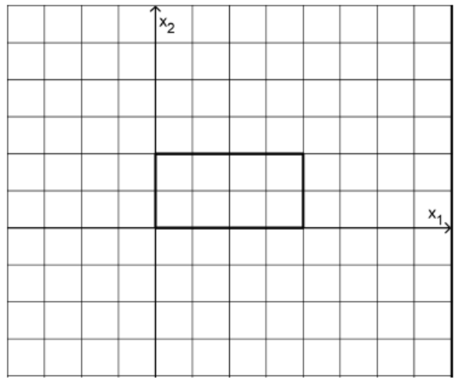


Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Skizze