Abitur 2019 Mathematik Stochastik IV

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“ ; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

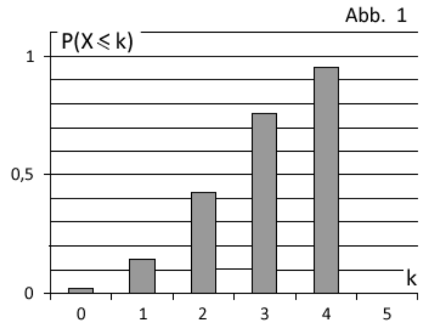
Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

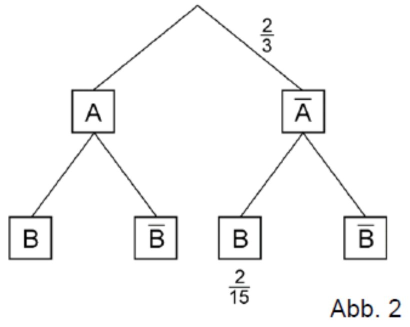
Teilaufgabe Teil A 2 (2 BE)

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Parameterwert $n = 5$. Dem Diagramm in Abbildung 1 kann man die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ entnehmen.
Ergänzen Sie den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert im Diagramm. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.



Teilaufgabe Teil A 3 (3 BE)

Das Baumdiagramm in Abbildung 2 gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.



Jeder sechste Besucher eines Volksfests trägt ein Lebkuchenherz um den Hals. Während der Dauer des Volksfests wird 25-mal ein Besucher zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Besucher, die ein Lebkuchenherz tragen.

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Besuchern höchstens ein Besucher ein Lebkuchenherz trägt.

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^{8} \left(25; \frac{1}{6}; i\right)$ berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

Teilaufgabe Teil B 2 (5 BE)

Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“ , „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

Die Inhaberin der Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.

Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15% der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10%.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Der Angestellte konnte bei der Durchführung des Tests zehn von 100 erwachsenen Besuchern dazu animieren, Lose zu kaufen. Er behauptet, dass er zumindest bei Personen mit Kind eine Erfolgsquote größer als 10% habe. Unter den 100 angesprochenen Besuchern befanden sich 40 Personen mit Kind. Von den Personen ohne Kind zogen 54 kein Los. Überprüfen Sie, ob das Ergebnis der Stichprobe die Behauptung des Angestellten stützt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“ ; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Zahl 2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Zahl 0}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Zahl 1}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Zahl 9}} = \frac{2}{625}$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Wahrscheinlichkeit

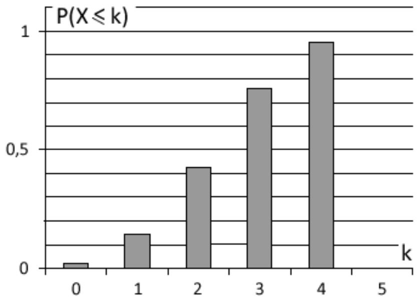
$$P(B) = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{2 und 9}} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{\text{9 und 2}} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{9 und 9}} = \frac{8}{25}$$

Teilaufgabe Teil A 2 (2 BE)

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Parameterwert $n = 5$. Dem Diagramm in Abbildung 1 kann man die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ entnehmen.
Ergänzen Sie den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert im Diagramm. Ermitteln

Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.

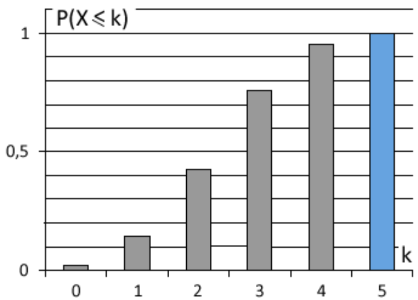
Abb. 1



Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$P(k \leq 5) = 1;$



$P(k = 2) \approx 0,42 - 0,14 = 0,28$

Teilaufgabe Teil A 3 (3 BE)

Das Baumdiagramm in Abbildung 2 gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.

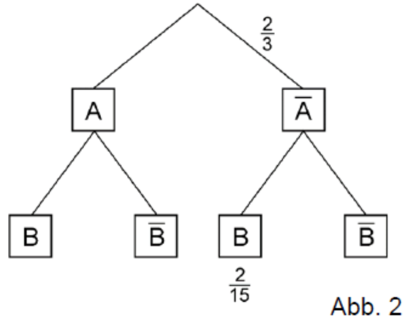
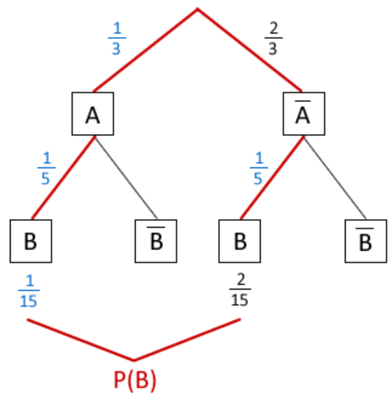


Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3

Wahrscheinlichkeit



$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{2/15}{2/3} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{5}$$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Jeder sechste Besucher eines Volksfests trägt ein Lebkuchenherz um den Hals. Während der Dauer des Volksfests wird 25-mal ein Besucher zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Besucher, die ein Lebkuchenherz tragen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Besuchern höchstens ein Besucher ein Lebkuchenherz trägt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P^{25}_{\frac{1}{6}}(X \leq 1) \overset{\text{TW}}{=} 0,06290 \approx 6,3\%$$

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^{8} \left(25; \frac{1}{6}; i\right)$ berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, dass unter den ausgewählten Besucher, mindestens fünf aber höchstens acht ein Lebkuchenherz tragen.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße X höchstens

um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert μ und Standardabweichung σ bestimmen:

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße, Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt:

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p$

Standardabweichung (Streuung) von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$$\mu = n \cdot p = 25 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{5^2 \cdot \frac{5}{6^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Wahrscheinlichkeit

Bereich der geforderten Abweichung bestimmen: $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu - \sigma = \frac{25}{6} - \frac{5\sqrt{5}}{6} \approx 2,3$$

$$\mu + \sigma = \frac{25}{6} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \approx 6,03$$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(B) = P^{25}_{\frac{1}{6}}(2,3 \leq X \leq 6,03)$$

Erläuterung:

Da es nur ganze Personen geben kann, muss der Bereich auf ganze Zahlen gerundet werden.

X soll **höchstens** um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen. Also muss X größer 3 und kleiner 6 sein.
($2 \leq X \leq 7$ wäre falsch.)

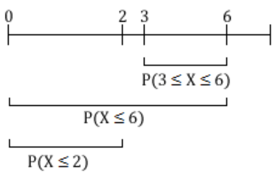
$P(B) = P_{\frac{1}{6}}^{25}(3 \leq X \leq 6)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$P(B) = P_{\frac{1}{6}}^{25}(X \leq 6) - P_{\frac{1}{6}}^{25}(X \leq 2) \overset{\text{TW}}{=} 0,89077 - 0,18869 = 0,70208$

$P(B) \approx 70,2\%$

Teilaufgabe Teil B 2 (5 BE)

Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“ , „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der

Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

K: „Kosten der Inhaberin“

Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle erstellen:

k_i in €	8	2	0,2
Ereignis	Donau	Main	Lech
$P(K = k_i)$	x	$4x$	$1-5x$

Erwartungswert $E(K)$ bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$E(K) = 8 \cdot x + 2 \cdot 4x + 0,2 \cdot (1-5x) = 15x + 0,2$

Erläuterung:

Einnahmen - Kosten = Gewinn

$1 - (15x + 0,2) = 0,35$

$1 - 15x - 0,2 = 0,35$

$-15x = -0,45$

$x = 0,03$

Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Die Inhaberin der Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.

Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15% der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10%.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

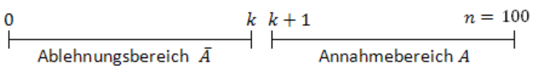
Nullhypothese: $H_0 : p \geq 0,15$

Stichprobenumfang: $n = 100$

Signifikanzniveau: $\alpha = 10\%$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Annahmebereich von H_0: $A = [k + 1, 100]$



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

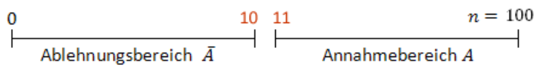
Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,15}^{100}(X \leq k) \leq 0,1$

$P_{0,15}^{100}(X \leq k) \leq 0,1$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 10$

Entscheidungsregel:



Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Der Angestellte konnte bei der Durchführung des Tests zehn von 100 erwachsenen Besuchern dazu animieren, Lose zu kaufen. Er behauptet, dass er zumindest bei Personen mit Kind eine Erfolgsquote größer als 10% habe. Unter den 100 angesprochenen Besuchern befanden sich 40 Personen mit Kind. Von den Personen ohne Kind zogen 54 kein Los. Überprüfen Sie, ob das Ergebnis der Stichprobe die Behauptung des Angestellten stützt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Hypothesentest - Entscheidungsregel

Nur 4 Personen mit Kind haben ein Los gezogen.

$\dfrac{4}{40} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad$ Ergebnis stützt die Aussage nicht.