Abitur 2019 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die beiden Kugeln k_1 mit Mittelpunkt $M_1(1|2|3)$ und Radius 5 sowie k_2 mit Mittelpunkt $M_2(-3|-2|1)$ und Radius 5.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass sich k_1 und k_2 schneiden.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Schnittfigur von k_1 und k_2 ist ein Kreis. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius dieses Kreises.

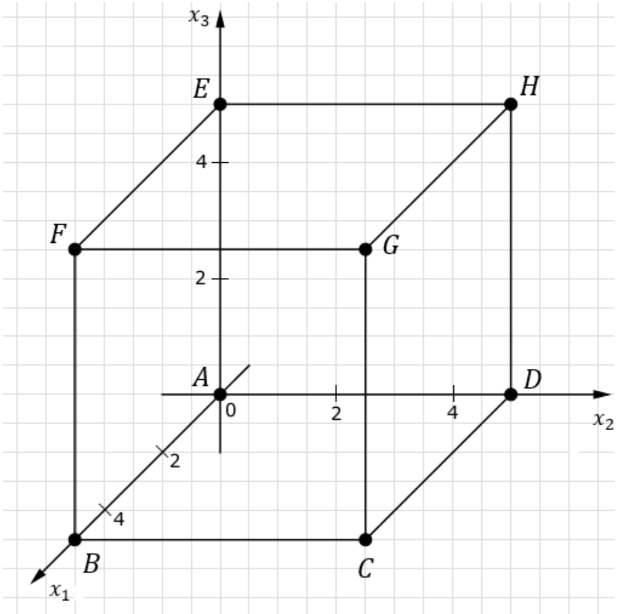
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Zeichnen Sie das Viereck $IJKL$ in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform.

(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade $g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche CDHG in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x_1 = 2,5$.

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Ein beliebiger Punkt $P\ (p_1|p_2|p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Kante $[FG]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann.

Lösung

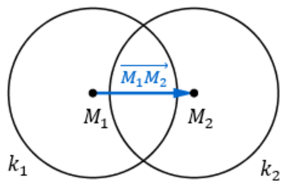
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben sind die beiden Kugeln k_1 mit Mittelpunkt $M_1(1|2|3)$ und Radius 5 sowie k_2 mit Mittelpunkt $M_2(-3|-2|1)$ und Radius 5.

Zeigen Sie, dass sich k_1 und k_2 schneiden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Länge eines Vektors



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2} - \overrightarrow{M_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

k_1 und k_2 schneiden sich, da $r_1 + r_2 = 5 + 5 = 10 > 6$.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Schnittfigur von k_1 und k_2 ist ein Kreis. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius dieses Kreises.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Mittelpunkt einer Strecke

M = Mittelpunkt der Strecke $[M_1\,M_2]$.

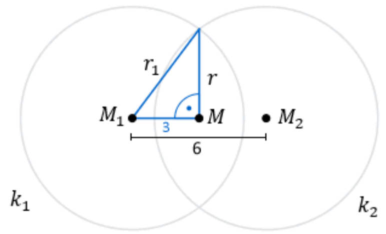
r = Radius des Kreises.

> Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*
>
> Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:
>
> $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(-1|0|2)$$

Länge einer Strecke



> Erläuterung: *Satz des Pythagoras*
>
> Der Mittelpunkt der Kugel k_1 (oder k_2) bildet zusammen mit dem Mittelpunkt M des Kreises und einer der Schnittpunkte der Kugeln ein rechtwinkliges Dreieck.

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{\left|\overrightarrow{M_1\,M_2}\right|}{2}\right)^2$$

$$5^2 = r^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$r^2 = 5^2 - 3^2$$

$$r^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad r = 4$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Die Ebene $E : 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Koordinaten von Punkten ermitteln

$P(x_1|x_1|x_1)$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Liegt ein Punkt P in einer Ebene E, so erfüllen seine Koordinaten die Ebenengleichung.

$3x_1 + 2x_1 + 2x_1 = 6$

$7x_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{6}{7}$

$\Rightarrow \quad P\left(\frac{6}{7}\middle|\frac{6}{7}\middle|\frac{6}{7}\right)$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

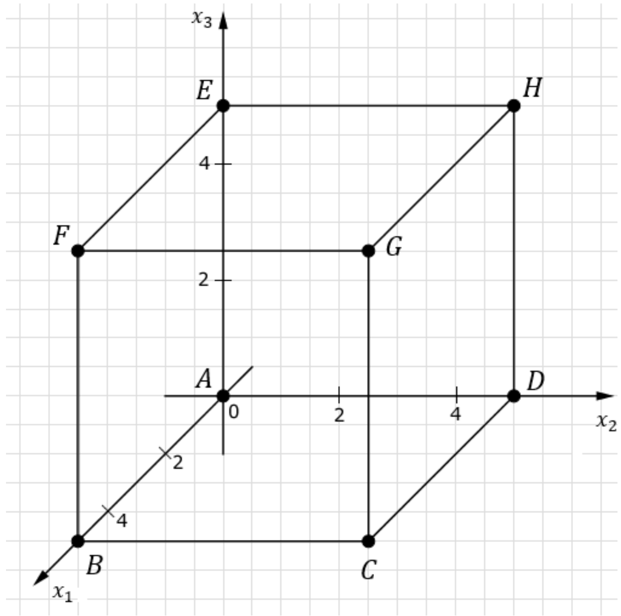
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Lagebeziehung von Ebenen

z. B.: Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Es gibt aber unendlich viele Ebenen, die echt parallel zu dieser Geraden sind.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

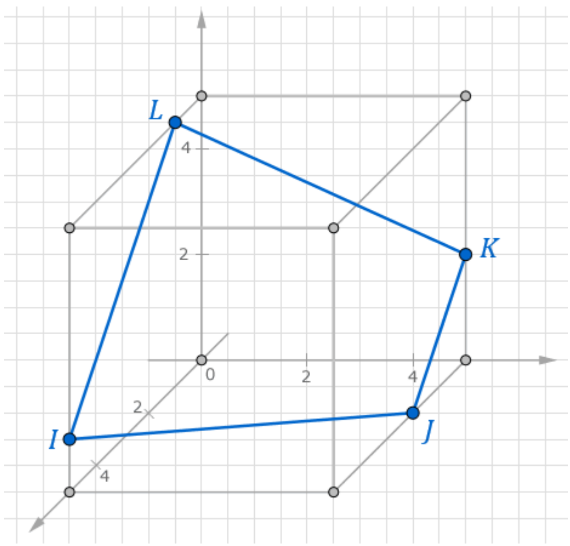
Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



Zeichnen Sie das Viereck $IJKL$ in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Skizze



Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{L} - \overrightarrow{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{K} - \overrightarrow{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k = 2 \\ k \in \mathbb{R} \\ k = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{IL} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$$

$\overrightarrow{IL}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{JK}$, also parallel.

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{J} - \overrightarrow{I} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{K} - \overrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

$$\left|\overrightarrow{LK}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\overrightarrow{LK}\right|$$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform.

(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene T:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{J} - \overrightarrow{I} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{L} - \overrightarrow{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$I(5|0|1)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene T.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_T}$ der Ebene T bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 - 0 \\ (-1) \cdot (-4) - (-3) \cdot 4 \\ 0 - 5 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\dfrac{1}{4}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_T} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (I ist Aufpunkt):

$$T: \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_T}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{I}}$$

$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 25 + 0 + 5$

$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

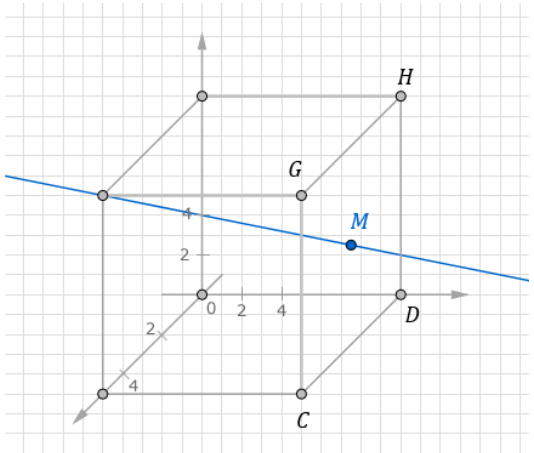
Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade $g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche CDHG in ihrem Mittelpunkt schneidet.

<u>**Lösung zu Teilaufgabe Teil B c**</u>

Parameterwerte ermitteln



Mittelpunkt der Würfelfläche $C\,D\,H\,G$: $M(2,5|5|2,5)$

> Erläuterung: *Punktkoordinaten, Einsetzen*
>
> Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so erfüllen die Punktkoordinaten die Geradengleichung.
>
> Hier wird der Punkt M in die Geradengleichung von g_a eingesetzt.

$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{I.} & 2,5 & = & 2,5 \\ \text{II.} & 5 & = & -10a\,\lambda \\ \text{III.} & 2,5 & = & 3,5 + \lambda\frac{2}{a} \end{array}$$

III. nach λ auflösen:

$$2,5 = 3,5 + \lambda\frac{2}{a} \qquad |-3,5$$

$$-1 = \lambda \cdot \frac{2}{a} \qquad | \cdot \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{a}{2}$$

$\lambda = -\frac{a}{2}$ in II. einsetzen:

$$5 = -10a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$5 = 5a^2$$

$$a^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1, \text{ da } a \in \mathbb{R}^+$$

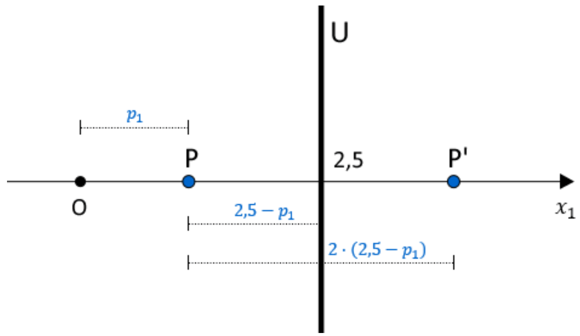
Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x_1 = 2,5$.

Ein beliebiger Punkt $P\ (p_1|p_2|p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Lage eines Punktes



U ist eine zur $x_2\,x_3$-Ebene parallele Ebene.

Die x_2 und x_3-Koordinaten des Bildpunktes P' sind die gleichen wie die von P.

$P'\ (p_1'|p_2|p_3)$

Für p_1' gilt: $\quad p_1' = p_1 + 2 \cdot (2,5 - p_1)' = 5 - p_1$

$P'\ (5-p_1|p_2|p_3)$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Schnitt Ebene und Gerade

$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

$$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$$

Gerade g_a mit Ebene T schneiden: $g_a \cap T$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also g_a in T eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$\begin{aligned} g_a \cap T: \quad 5 \cdot 2,5 + 4 \cdot (-10\lambda\, a) + 5 \cdot \left(3,5 + \tfrac{2\lambda}{a}\right) &= 30 \\ 12,5 - 40\lambda\, a + 17,5 + \tfrac{10\lambda}{a} &= 30 \\ -40\lambda\, a + \tfrac{10\lambda}{a} &= 0 \\ 40\lambda\, a &= \tfrac{10\lambda}{a} \\ 4a^2 &= 1 \\ a &= \tfrac{1}{2} \quad (a \in \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

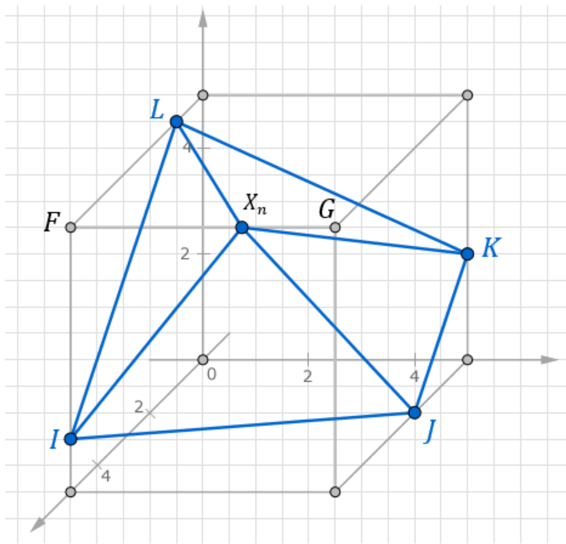
$g_{\frac{1}{2}}$ liegt somit in der Ebene T. Da jede Gerade in der Ebene U liegt, also auch $g_{\frac{1}{2}}$, liegt $g_{\frac{1}{2}}$ auch in der Ebene T'.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Kante $[FG]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Geradengleichung aufstellen



Strecke $[FG]$: $\quad \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{F}} + \alpha \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_2\text{-Achse}} \qquad \alpha \in [0;5]$

Allgemeiner Punkt auf der Strecke: $\quad X_n(5|\alpha|5)$

Abstand Punkt - Ebene

$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

$\overrightarrow{n_T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene

$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{66}$

Hesse-Normalenform T^{HNF} der Ebene aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$

$E^{\text{HNF}} : \dfrac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$T^{\text{HNF}} : \dfrac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{66}} = 0$

Abstand bestimmen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P, E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$E^{\text{HNF}} : \dfrac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$P(1|3| - 6)$

$d(P, E) = \left| \dfrac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\dfrac{9}{3} \right| = 3$

$h = d(X_n, T) = \left| \dfrac{5 \cdot 5 + 4 \cdot \alpha + 5 \cdot 5 - 30}{\sqrt{66}} \right| = \left| \dfrac{4\alpha + 20}{\sqrt{66}} \right|$

Prüfen, ob die Höhe 2 betragen kann:

$\left| \dfrac{4\alpha + 20}{\sqrt{66}} \right| = 2$

$\dfrac{4\alpha + 20}{\sqrt{66}} = \pm 2 \qquad | \cdot \sqrt{66}$

$4\alpha + 20 = \pm 2 \cdot \sqrt{66} \qquad | -20$

$4\alpha = \pm 2 \cdot \sqrt{66} - 20 \qquad | : 4$

$\alpha_{1,2} = \dfrac{\pm 2 \cdot \sqrt{66} - 20}{4}$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \dfrac{2 \cdot \sqrt{66} - 20}{4} \approx -0,94$

$\Rightarrow \quad \alpha_2 = \dfrac{-2 \cdot \sqrt{66} - 20}{4} \approx -9,06$

$\Rightarrow \quad h \neq 2$