

## Abitur 2019 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist ein Rechteck  $ABCD$  mit den Eckpunkten  $A(5|-4|-3)$ ,  $B(5|4|3)$ ,  $C(0|4|3)$  und  $D$ .

### Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten von  $D$  und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts  $M$  der Strecke  $[AC]$  an.

### Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Dreiecke  $BCM$  und  $ABM$  den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen zu berechnen.

### Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

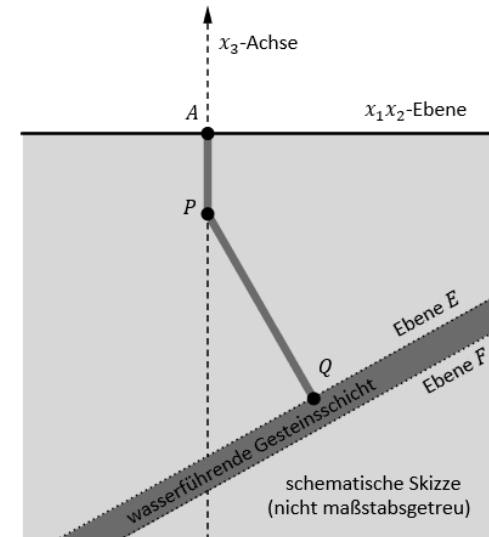
Die Ebene  $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$  enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

### Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die  $x_1x_2$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken  $[AP]$  und  $[PQ]$  mit den Punkten  $A(0|0|0)$ ,  $P(0|0|-1)$  und  $Q(1|1|-3,5)$  beschrieben werden (vgl. Abbildung).



### Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.

### Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Beim Übergang zwischen den beiden Abschnitten des Bohrkanals muss die Bohrrichtung um den Winkel geändert werden, der im Modell durch den Schnittwinkel der beiden Geraden  $AP$  und  $PQ$  beschrieben wird. Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene  $E$  und die untere Begrenzungsfläche in einer zu  $E$  parallelen Ebene  $F$ . Die Ebene  $E$  enthält den Punkt  $Q$ . Die Strecke  $[PQ]$  steht senkrecht auf der Ebene  $E$  (vgl. Abbildung).

**Teilaufgabe Teil B c** (2 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  in Normalenform.

(zur Kontrolle:  $E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$ )

**Teilaufgabe Teil B d** (6 BE)

Der Bohrkanal wird geradlinig verlängert und verlässt die wasserführende Gesteinsschicht in einer Tiefe von 3600 m unter der Erdoberfläche. Die Austrittsstelle wird im Modell als Punkt  $R$  auf der Geraden  $PQ$  beschrieben. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $R$  und ermitteln Sie die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht auf Meter gerundet.

(zur Kontrolle:  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinate von  $R: 1,04$ )

Ein zweiter Bohrkanal wird benötigt, durch den das entnommene Wasser abgekühlt zurück in die wasserführende Gesteinsschicht geleitet wird. Der Bohrkanal soll geradlinig und senkrecht zur Erdoberfläche verlaufen. Für den Beginn des Bohrkanals an der Erdoberfläche kommen nur Bohrstellen in Betracht, die im Modell durch einen Punkt  $B(t| -t|0)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  beschrieben werden können.

**Teilaufgabe Teil B e** (3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass der zweite Bohrkanal die wasserführende Gesteinsschicht im Modell im Punkt  $T(t| -t| -4,3)$  erreicht, und erläutern Sie, wie die Länge des zweiten Bohrkanals bis zur wasserführenden Gesteinsschicht von der Lage der zugehörigen Bohrstelle beeinflusst wird.

**Teilaufgabe Teil B f** (4 BE)

Aus energetischen Gründen soll der Abstand der beiden Stellen, an denen die beiden Bohrkanäle auf die wasserführende Gesteinsschicht treffen, mindestens 1500 m betragen. Entscheiden Sie auf der Grundlage des Modells, ob diese Bedingung für jeden möglichen zweiten Bohrkanal erfüllt wird.

**Lösung****Teilaufgabe Teil A 1a** (3 BE)

Gegeben ist ein Rechteck  $ABCD$  mit den Eckpunkten  $A(5|-4|-3)$ ,  $B(5|4|3)$ ,  $C(0|4|3)$  und  $D$ .

Ermitteln Sie die Koordinaten von  $D$  und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts  $M$  der Strecke  $[AC]$  an.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a****Lage eines Punktes**

$$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punkt  $D$  bestimmen:

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(0|-4|-3)$$

**Mittelpunkt einer Strecke**

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(2,5|0|0)$$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes  $M$  zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  lautet:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

#### Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Dreiecke  $BCM$  und  $ABM$  den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen zu berechnen.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

*Flächeninhalt eines Dreiecks*

$$A_{\Delta BCM} = \frac{1}{2} \cdot h_{\Delta BCM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot h_{\Delta ABM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

#### Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Die Ebene  $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$  enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

*Koordinaten von Punkten ermitteln*

$$P(x_1|x_1|x_1)$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Liegt ein Punkt  $P$  in einer Ebene  $E$ , so erfüllen seine Koordinaten die Ebenengleichung.

$$3x_1 + 2x_1 + 2x_1 = 6$$

$$7x_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \quad P \left( \frac{6}{7} \mid \frac{6}{7} \mid \frac{6}{7} \right)$$

#### Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

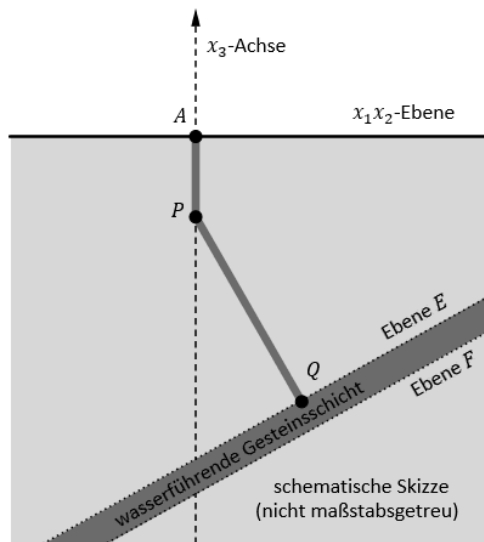
*Abstand Gerade - Ebene*

z. B.: Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung  $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Es gibt aber unendlich viele Ebenen, die echt parallel zu dieser Geraden sind.

#### Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die  $x_1 x_2$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken  $[AP]$  und  $[PQ]$  mit den Punkten  $A(0|0|0)$ ,  $P(0|0|-1)$  und  $Q(1|1|-3,5)$  beschrieben werden (vgl. Abbildung).



Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

#### *Länge eines Vektors*

$$\vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag)  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{8,25}$$

Erläuterung:

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.

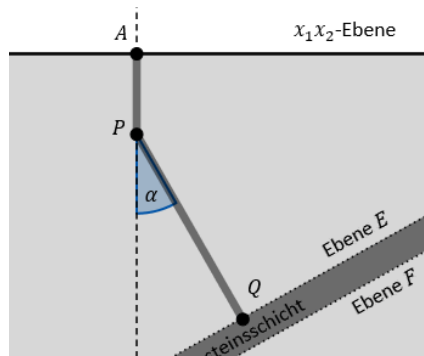
$$(1 + \sqrt{8,25}) \cdot 1000 \text{ m} \approx 3872 \text{ m}$$

### Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Beim Übergang zwischen den beiden Abschnitten des Bohrkanals muss die Bohrrichtung um den Winkel geändert werden, der im Modell durch den Schnittwinkel der beiden Geraden AP und PQ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

#### *Winkel zwischen zwei Vektoren*



$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \quad (\text{s. Teilaufgabe Teil B a})$$

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AP} \circ \vec{PQ}}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{PQ}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 + 0 + 2,5}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2,5^2}} = \frac{2,5}{\sqrt{8,25}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{2,5}{\sqrt{8,25}} \right) \approx 29,5^\circ$$

### Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene  $E$  und die untere Begrenzungsfläche in einer zu  $E$  parallelen Ebene  $F$ . Die Ebene  $E$  enthält den Punkt  $Q$ . Die Strecke  $[PQ]$  steht senkrecht auf der Ebene  $E$  (vgl. Abbildung).

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  in Normalenform.

(zur Kontrolle:  $E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$ )

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

#### Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor  $\vec{n}_E$  der Ebene  $E$  bestimmen:

$$\vec{n}_E = 4 \cdot \vec{PQ} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt  $P$  aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E: \vec{n}_E \circ \vec{X} = \vec{n}_E \circ \vec{P}$$

Hier ( $S_2$  ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_E} \circ \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix}}_{\vec{Q}}$$

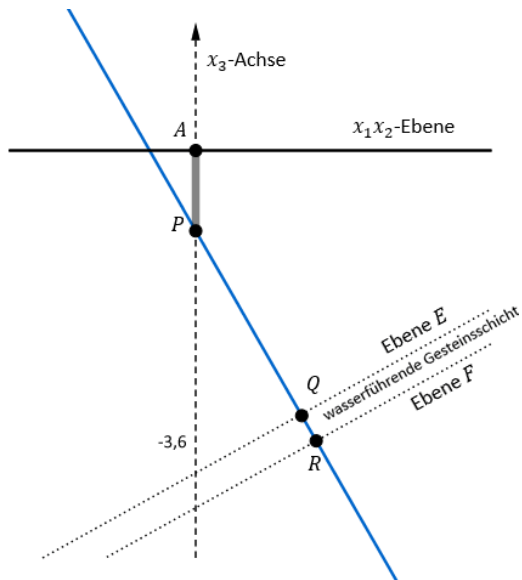
$$E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 4 + 4 + 35$$

$$E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$$

**Teilaufgabe Teil B d** (6 BE)

Der Bohrkanal wird geradlinig verlängert und verlässt die wasserführende Gesteinsschicht in einer Tiefe von 3600 m unter der Erdoberfläche. Die Austrittsstelle wird im Modell als Punkt  $R$  auf der Geraden  $PQ$  beschrieben. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $R$  und ermitteln Sie die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht auf Meter gerundet.

(zur Kontrolle:  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinate von  $R$ : 1,04)

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B d****Geradengleichung aufstellen**

$$\text{Gerade } PQ: \quad \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{P}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix}}_{\vec{PQ}}$$

Allgemeiner Punkt auf der Geraden  $PQ$ :  $(\lambda|\lambda| -1 - 2,5\lambda)$

**Erläuterung:**

Der Punkt  $R$  liegt auf der Geraden  $PQ$  in einer Tiefe von 3600 m, d.h. seine  $x_3$ -Koordinate hat den Wert  $-3600 : 1000 = -3,6$ .

$$R(\lambda|\lambda| - 3,6)$$

$$-1 - 2,5\lambda = -3,6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2,6}{-2,5} = 1,04$$

$$R(1,04|1,04| - 3,6)$$

**Länge einer Strecke**

$$\vec{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1,04 \\ 1,04 \\ -3,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,04 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{QR}| = \sqrt{0,04^2 + 0,04^2 + (-0,1)^2} = \sqrt{0,0132}$$

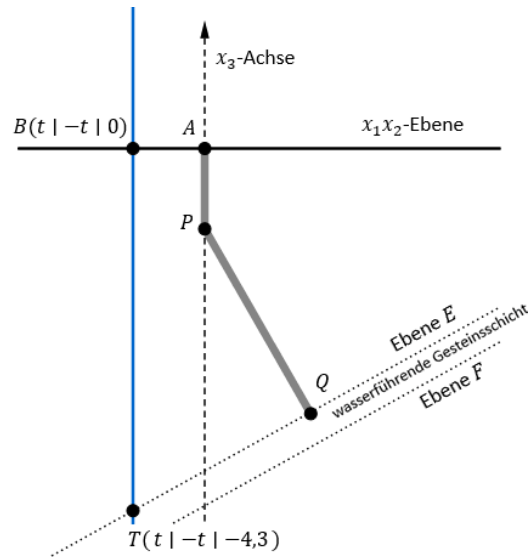
$$d = \sqrt{0,0132} \cdot 1000 \approx 115 \text{ m}$$

**Teilaufgabe Teil B e** (3 BE)

Ein zweiter Bohrkanal wird benötigt, durch den das entnommene Wasser abgekühlt zurück in die wasserführende Gesteinsschicht geleitet wird. Der Bohrkanal soll geradlinig und senkrecht zur Erdoberfläche verlaufen. Für den Beginn des Bohrkanals an der Erdoberfläche kommen nur Bohrstellen in Betracht, die im Modell durch einen Punkt  $B(t| - t|0)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  beschrieben werden können.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der zweite Bohrkanal die wasserführende Gesteinsschicht im Modell im Punkt  $T(t| - t| - 4,3)$  erreicht, und erläutern Sie, wie die Länge des zweiten Bohrkanals bis zur wasserführenden Gesteinsschicht von der Lage der zugehörigen Bohrstelle beeinflusst wird.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B e****Geradengleichung aufstellen**



Gerade  $h$  durch  $B$  senkrecht zur  $x_1 x_2$ -Ebene:  $h: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Schnitt Ebene und Gerade

$$E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$$

Gerade  $h$  mit Ebene  $E$  schneiden:  $h \cap E$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade  $g: \vec{X} = \vec{Q} + \lambda \cdot \vec{v}$  eine Ebene  $E$  in einem Punkt  $P$ , dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von  $\lambda$  (von  $g$ ) die Normalenform der Ebene  $E$ .

Man setzt  $g$  in  $E$  ein und löst nach  $\lambda$  auf.

Hier wird also  $h$  in  $E$  eingesetzt und nach  $\mu$  aufgelöst.

$$\begin{aligned} h \cap E: 4 \cdot t + 4 \cdot (-t) - 10 \cdot \mu - 43 &= 0 \\ 4t - 4t - 10\mu &= 43 \\ -10\mu &= 43 \\ \mu &= -4,3 \end{aligned}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} - 4,3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -4,3 \end{pmatrix}$$

Die Lage der Bohrstelle hat keinen Einfluss auf die Länge, da  $|\vec{BT}| = 4,3$  unabhängig von  $t$  ist.

### Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Aus energetischen Gründen soll der Abstand der beiden Stellen, an denen die beiden Bohrkanäle auf die wasserführende Gesteinsschicht treffen, mindestens 1500 m betragen. Entscheiden Sie auf der Grundlage des Modells, ob diese Bedingung für jeden möglichen zweiten Bohrkanal erfüllt wird.

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

#### Länge eines Vektors

$$T(t | -t | -4,3) \quad (\text{allgemeiner Bohrkanal-Punkt})$$

$$Q(1 | 1 | -3,5)$$

$$\vec{TQ} = \vec{Q} - \vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -4,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag)  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{TQ}| = \left| \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0,8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(1-t)^2 + (1+t)^2 + 0,8^2}$$

$$|\overrightarrow{TQ}| = \sqrt{1-2t+t^2+1+2t+t^2+0,64} = \sqrt{2t^2+2,64}$$

$$\Rightarrow \overline{TQ} \geq \sqrt{2,64} \approx 1,62 > 1,5$$

Damit beträgt der Abstand der beiden Bohrstellen für jeden möglichen zweiten Bohrkanal mindestens 1500 m.