Abitur 2018 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil A 1 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{3x-5}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Geben Sie D an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3|f(3))$.

Teilaufgabe Teil A 2 (5 BE)

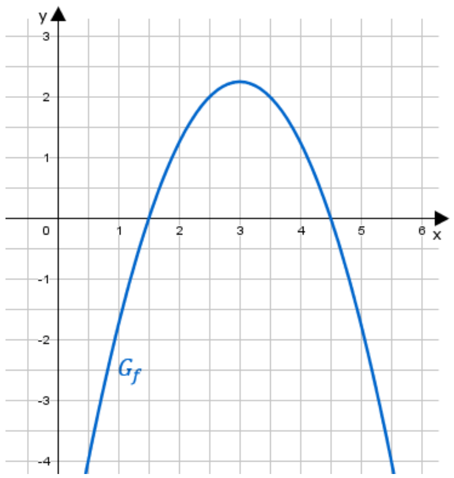
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 3 (4 BE)

Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_3^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

Wie viele Nullstellen hat F? Machen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung plausibel.



Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

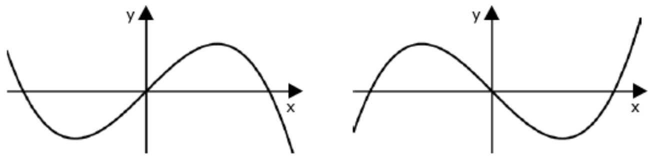


Abb. 1 Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

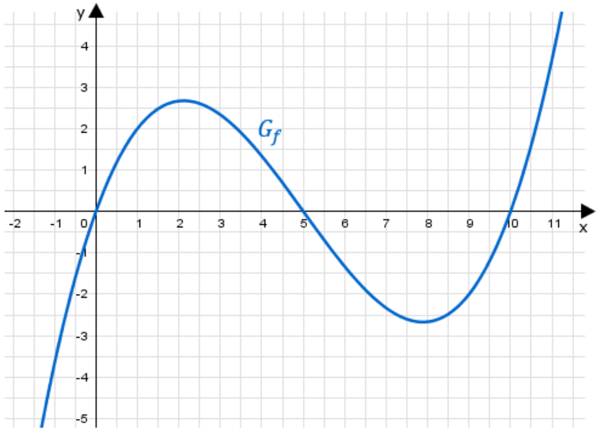


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f.

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 15x^2 + 50x\right)$)

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 25x\right)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Ermitteln Sie, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist.

Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ betrachtet.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

F_1 hat für $0 \leq x \leq 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat.

Teilaufgabe Teil B 1f (2 BE)

Begründen Sie, dass F_1 höchstens vier Nullstellen hat.

Teilaufgabe Teil B 1g (6 BE)

Für $0 \leq x \leq 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h

- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen,
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen,
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h.

Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K : x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 2 zeigt den Graphen von K.

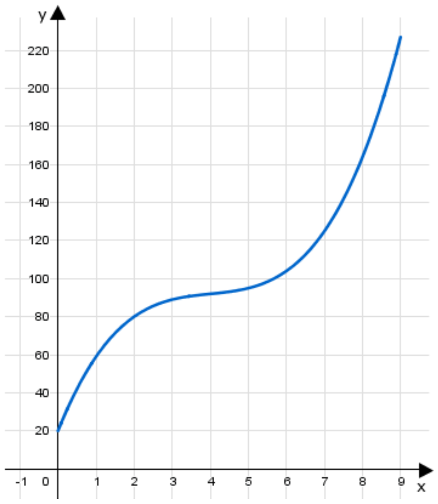


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2

α) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

β) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{3x-5}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Geben Sie D an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3|f(3))$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \sqrt{3x-5}$

> Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*
>
> $f(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $3x-5$, muss größer oder gleich Null sein.

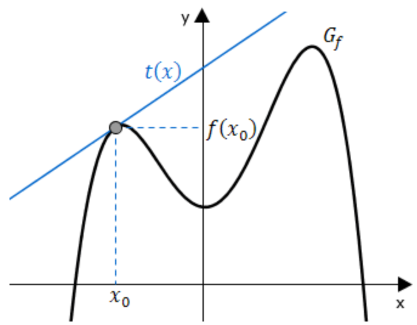
$3x - 5 \geq 0$

$x \geq \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow \quad D = \left[\dfrac{5}{3}; \infty\right[$

Tangentengleichung ermitteln

Tangentengleichung t im Punkt $(3|f(3))$:

> Erläuterung: *Gleichung der Tangente*
>
> Formel für die Tangentengleichung:
>
> $t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$
>
> 
>
>
> Hier ist $x_0 = 3$.

$t : y = (x - x_0) \cdot f'\,(x_0) + f\,(x_0)$

$t : y = (x - 3) \cdot f'\,(3) + f\,(3)$

Nebenrechnungen:

$f(3) = \sqrt{3 \cdot 3 - 5} = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(3x-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

$f'(3) = \dfrac{3}{2\sqrt{3 \cdot 3 - 5}} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad t : y = \dfrac{3}{4}\,(x-3) + 2 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$

Teilaufgabe Teil A 2 (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.

Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Steigung eines Funktionsgraphen

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

$f'(0) = 0 + 0 - 15 = -15$

Waagerechte Tangenten

$f(5) = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$

$f'(5) = -75 + 90 - 15 = 0$

$\Rightarrow \quad x$-Achse ist Tangenten im Punkt $A(5|0)$

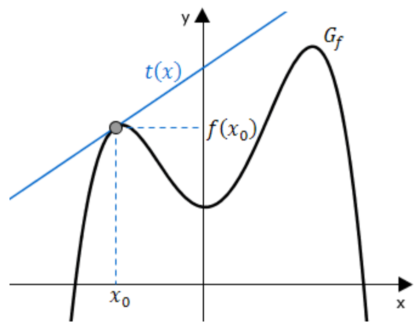
Tangentengleichung ermitteln

Tangentengleichung t im Punkt $B(-1|f(-1))$:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = -1$.

$t : y = (x - x_0) \cdot f'\ (x_0) + f\ (x_0)$

$t : y = (x + 1) \cdot f'\ (-1) + f\ (-1)$

Nebenrechnungen:

$f(-1) = -(-1) + 9 + 15 - 25 = 0$

$f'(-1) = -3 - 18 - 15 = -36$

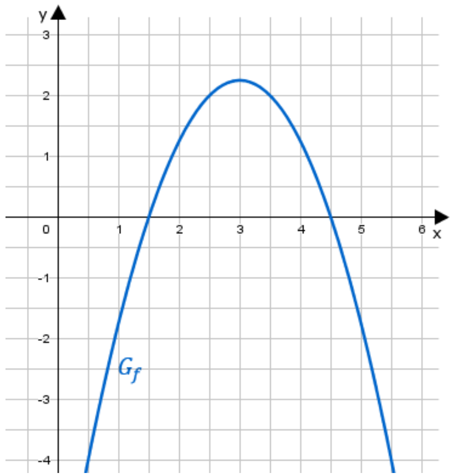
$\Rightarrow \quad t : y = -36(x + 1) = -36x - 36$

Teilaufgabe Teil A 3 (4 BE)

Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_3^x f(t)\ \mathrm{dt}$.

Wie viele Nullstellen hat F? Machen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung plausibel.



Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3

Eigenschaften der Integralfunktion

F hat 3 Nullstellen.

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{dt} = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

1) Am Intergrationsanfang $x = 3$

2) Rechts von der rechten Nullstelle von f

3) Links von der linken Nullstellen von f

Wegen der Monotonie von f kann es keine weiteren Nullstellen geben.

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

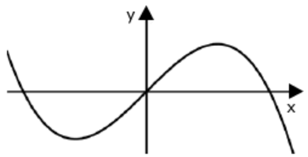


Abb. 1

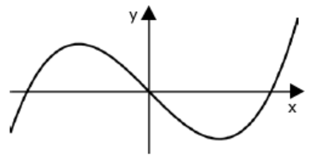


Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Monotonieverhalten einer Funktion

Abbildung 2 stellt einen Graphen von f_a dar, z.B. weil:

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty \qquad (\text{da } a > 0)$$

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x\,, \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Ableitungen bilden:

$$f_a'(x) = \frac{3}{a} \cdot x^2 - 1$$

$$f_a''(x) = \frac{6}{a} \cdot x$$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f' = 0$

$$\frac{3}{a} \cdot x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{3}{a} \cdot x^2 = 1 \qquad | \cdot \frac{a}{3}$$

$$x^2 = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Parameter a ermitteln:

$$3 = \pm\sqrt{\frac{a}{3}} \qquad | \cdot \sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3} = \pm\sqrt{a} \qquad |^2$$

$$a = 27$$

Prüfen, ob ein Extremum an der Stelle $x = 3$ vorliegt:

$$f_{27}''(3) = \frac{6}{27} \cdot 3 \neq 0$$

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit

Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

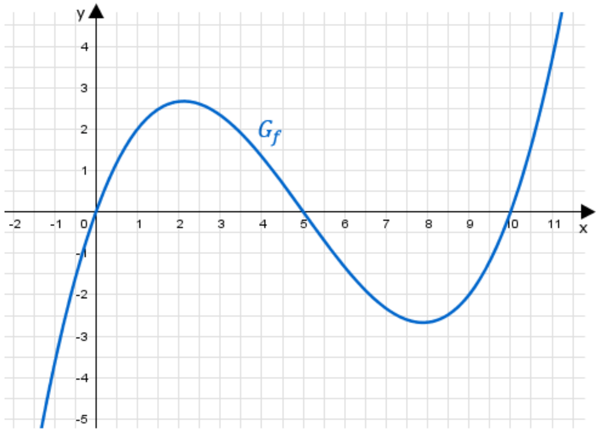


Abb. 1

Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f.

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 15x^2 + 50x\right)$*)*

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Parameterwerte ermitteln

f ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit Nullstellen $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$.

$$f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 5) \cdot (x - 10)$$

$$f(x) = a\,x \cdot (x - 5) \cdot (x - 10)$$

G_f verläuft durch den Punkt $(1|2)$:

$$2 = a \cdot 1 \cdot (1 - 5) \cdot (1 - 10)$$

$$2 = 36a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{18}x \cdot (x-5) \cdot (x-10) = \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 15x^2 + 50x\right)$$

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Wendepunkt ermitteln

Erste, zweite und dritte Ableitung bilden:

$f'(x) = \frac{1}{18}\left(3x^2 - 30x + 50\right)$

$f''(x) = \frac{1}{18}(6x - 30)$

$f'''(x) = \frac{6}{18}$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$6x - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = 5$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$f'''(x) = \frac{6}{18} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = 5$ ist Wendestelle

y-Koordinate des Wendepunkts ermitteln:

$y^W = f(5) = 0$

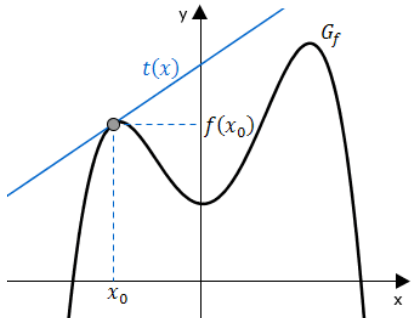
Wendetangente

Tangentengleichung:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = 5$.

$y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$

$y = -\frac{25}{18} \cdot (x - 5) + 0 = -\frac{25}{18}x + \frac{125}{18}$

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 25x\right)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Ermitteln Sie, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der

Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$g(x) = \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 25x\right)$$

Erläuterung:

$$g(x) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot \left(x^2 - 25\right) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot (x-5)(x+5)$$

G_g hat Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = -5$ und $x_3 = 5$.

$\Rightarrow$ Verschiebung um 5 Einheiten

Symmetrieverhalten einer Funktion

Da im Funktionsterm von g nur ungerade Exponenten von x vorkommen, ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung.

Wegen der Verschiebung von G_g um 5 Einheiten in postiver x-Richtung, ist G_f punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(5|0)$.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x) = \int\limits_1^x f(t)\ \mathrm{dt}$ betrachtet.

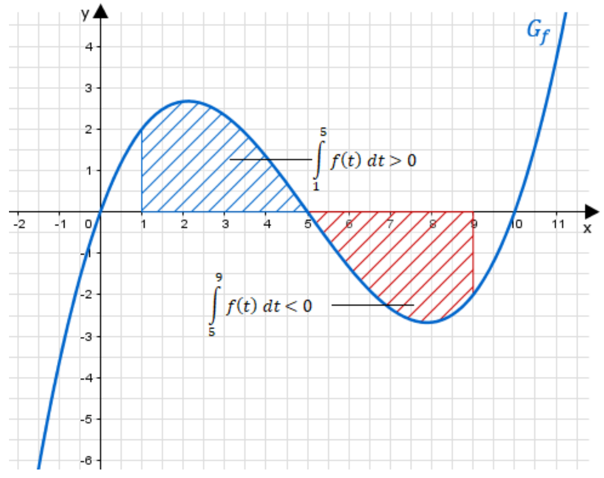
F_1 hat für $0 \le x \le 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Eigenschaften der Integralfunktion

$x = 1$, da Integrationsanfang

$x = 9$, wegen Flächenbilanz

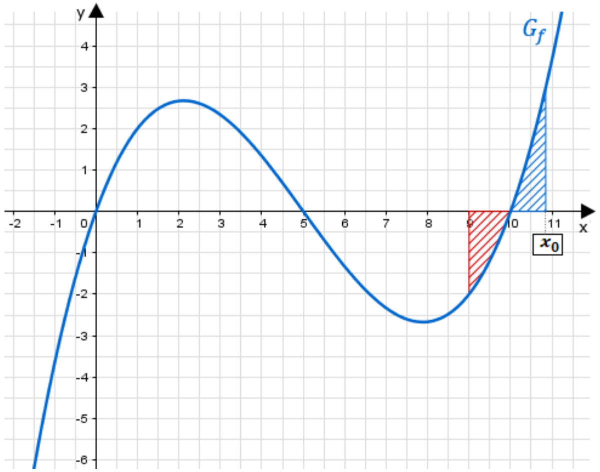


Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Eigenschaften der Integralfunktion



Es gibt ein $x_0 > 10$, sodass die Fläche, die sich zwischen $x = 9$ und diesem x oberhalb der x-Achse befindet genauso groß ist wie unterhalb.

Wegen der Nullstelle $x = 9$ der Integralfunktion folgt:

$$\int_1^{x_0} f(x)\ \mathrm{dx} = \underbrace{\int_1^9 f(x)\ \mathrm{dx}}_{=0} + \underbrace{\int_9^{x_0} f(x)\ \mathrm{dx}}_{=0} = 0$$

Teilaufgabe Teil B 1f (2 BE)

Begründen Sie, dass F_1 höchstens vier Nullstellen hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Stammfunktion

Da f eine ganzrationale Funktion 3.Grades ist, ist die ihre Stammfunktion F eine ganzrationale Funktion 4.Grades.

Eine ganzrationale Funktion 4.Grades kann höchstens 4 Nullstellen besitzen.

Teilaufgabe Teil B 1g (6 BE)

Für $0 \leq x \leq 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h

- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen,
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen,
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Funktionsgleichung ermitteln

$$h(x) = a\sin(b\,x) \qquad a, b \in \mathbb{R}_0^+$$

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

$$10 = \frac{2\pi}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\pi}{5} \quad \Rightarrow \quad h(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$$

$$\int_0^5 a\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)\ \mathrm{dx} = \frac{625}{72}$$

$$a \cdot \left[-\frac{5}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right]_0^5 = \frac{625}{72}$$

$$a \cdot \left[-\frac{5}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{5}\cdot 5\right) - \left(-\frac{5}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{5}\cdot 0\right)\right)\right] = \frac{625}{72}$$

$$a \cdot \left[-\frac{5}{\pi}\cos(\pi) + \frac{5}{\pi}\cos(0)\right] = \frac{625}{72}$$

$$a \cdot \left[\frac{5}{\pi} + \frac{5}{\pi}\right] = \frac{625}{72}$$

$$a \cdot \frac{10}{\pi} = \frac{625}{72} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{625}{72} \cdot \frac{\pi}{10} = \frac{125}{144}\pi$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = \frac{125}{144}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K : x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 2 zeigt den Graphen von K.

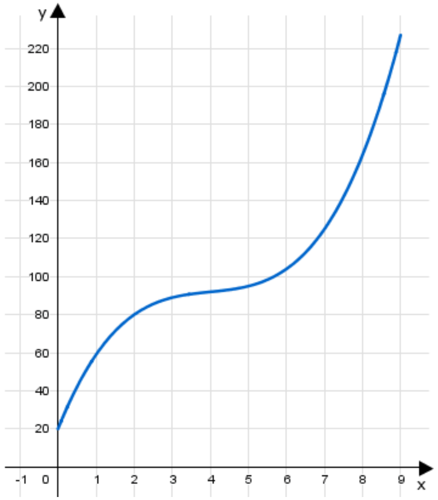


Abb. 2

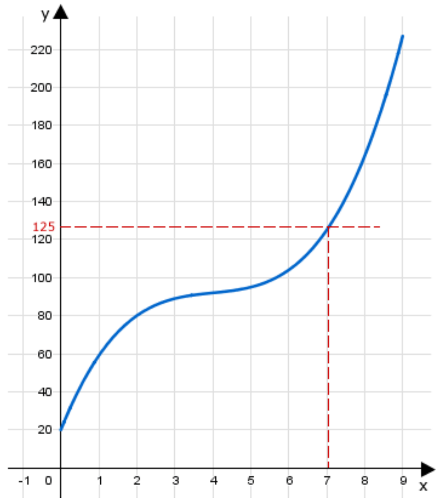
Geben Sie mithilfe von Abbildung 2

α) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

β) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionswert berechnen



α) ca. 7 m^3

Monotonieverhalten einer Funktion

G_K ist streng monoton steigend, d.h. mit zunehmender Produktionsmenge steigen die Kosten.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Funktionswert berechnen

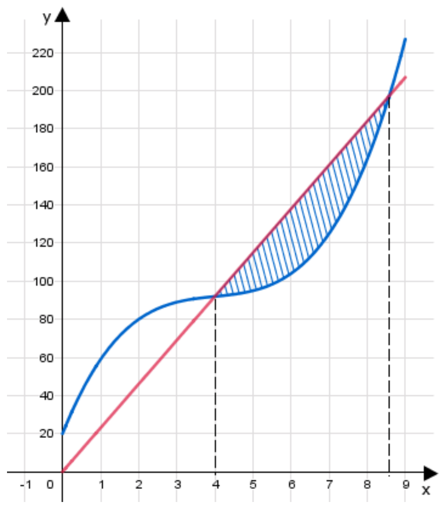
$$G(4) = E(4) - K(4) = 23 \cdot 4 - \left(4^3 - 12 \cdot 4^2 + 50 \cdot 4 + 20\right) = 0$$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Skizze



Gewinn: $4 < x < 8,6$

Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Extremwertaufgabe

$G(x) = 23x - x^3 + 12x^2 - 50x - 20$

$G(x) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 20$

$G'(x) = -3x^2 + 24x - 27$

$-3x^2 + 24x - 27 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-27)}}{-6}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 1,35 \;\;, \; x_2 = 6,65$

$G''(x) = -6x + 24$

$G''(1,35) = 15,9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Min

$G''(6,65) = -15,9 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Max

Für $x = 6,65\ \text{m}^3$ wird der Gewinn maximiert.