Abitur 2018 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad f_2 : x \mapsto \ln\,(x+2)$$

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat.

Teilaufgabe Teil A 3 (5 BE)

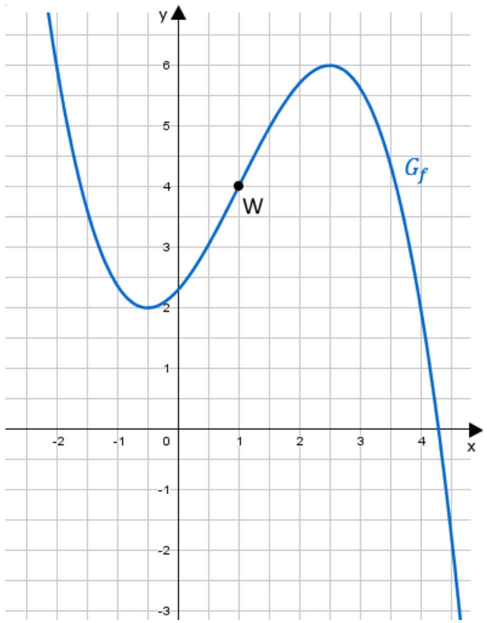
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 4 (3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1|4)$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für $f'(1)$ ermittelten Näherungswert.



Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

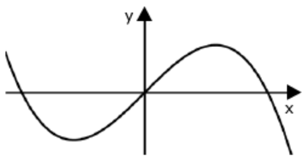


Abb. 1

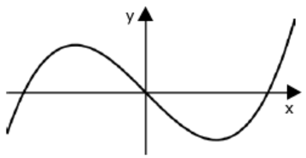


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \left((\ln x)^2 - 1\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

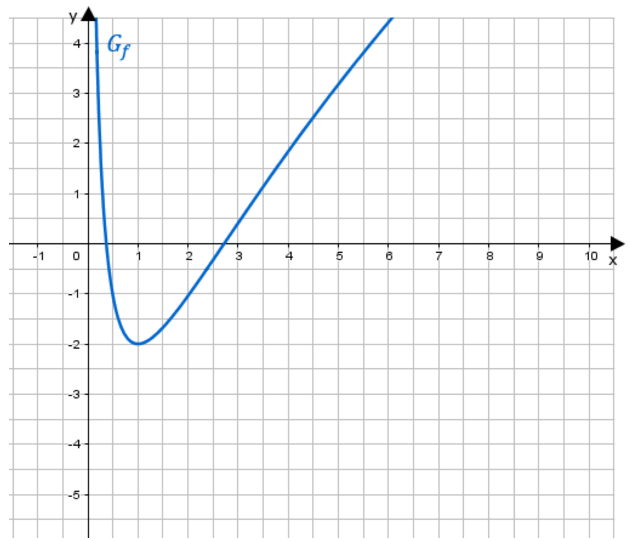


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$)

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt W besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.
(zur Kontrolle: x-Koordinate von W: e)

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ gilt. Geben Sie $f'(0,5)$ und $f'(10)$ auf eine Dezimale genau an und zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Begründen Sie unter Zuhilfenahme von Abbildung 1, dass es zwei Werte $c \in]0;6]$ gibt, für die gilt: $\int\limits_{e^{-1}}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

Die gebrochen-rationale Funktion $h : x \mapsto 1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an.

Teilaufgabe Teil B 1f (5 BE)

Im IV. Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa $1,623$ beträgt. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

Durch Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ entsteht der Graph einer in $]-\infty; 8[$ definierten Funktion g. Dieser Graph wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Zeichnen Sie G_g in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Die beschriebene Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ kann durch eine Spiegelung von G_f an der y-Achse mit einer anschließenden Verschiebung ersetzt werden. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $g(x) = f(a\,x + b)$ für $x \in]-\infty; 8[$ gilt.

Im Folgenden wird die „w-förmige“ Kurve k betrachtet, die sich aus dem auf $0,2 \leq x \leq 4$ beschränkten Teil von G_f und dem auf $4 < x \leq 7,8$ beschränkten Teil von G_g zusammensetzt. Die Kurve k wird um 12 Einheiten in negative z-Richtung verschoben. Die dabei überstrichene Fläche dient als Modell für ein 12 Meter langes Aquarium, das durch zwei ebene Wände an Vorderund Rückseite zu einem Becken ergänzt wird (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

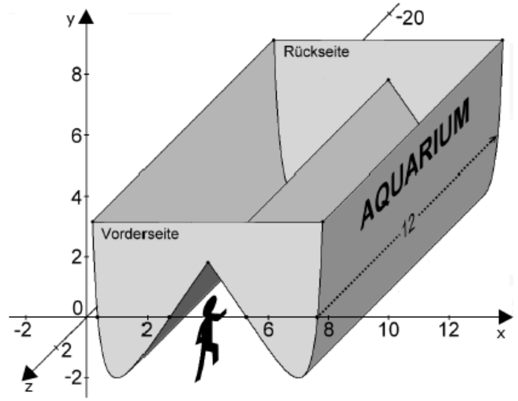


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Aquariumwände bilden an der Unterseite einen Tunnel, durch den die Besucher hindurchgehen können. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die linke und die rechte Tunnelwand miteinander einschließen.

Das Aquarium wird vollständig mit Wasser gefüllt.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Berechnen Sie die größtmögliche Wassertiefe des Aquariums.

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Das Volumen des Wassers im Aquarium lässt sich analog zum Rauminhalt eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h berechnen.

Erläutern Sie, dass der Term $24 \cdot \int\limits_{0,2}^{4} (f(0,2) - f(x))\ \mathrm{dx}$ das Wasservolumen im vollgefüllten Aquarium in Kubikmetern beschreibt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad f_2 : x \mapsto \ln\,(x+2)$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Definitionsbereich bestimmen

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f_1(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x^2 - 4$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$f_2(x) = \ln\,(x+2)$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$f_2(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(h(x))$.

Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
Somit gilt für die Argumentfunktion $h(x) > 0$.

In diesem Fall: $x + 2 > 0$

$$x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_2 =]-2; +\infty[$

Nullstellen einer Funktion

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-4}$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$\dfrac{2x+3}{x^2-4} = 0$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$2x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1^N = -\dfrac{3}{2}$

$f_2(x) = \ln\,(x+2)$

$\ln\,(x+2) = 0 \qquad |\ e^x$

$x + 2 = 1$

$\Rightarrow \quad x_2^N = -1$

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Funktionsgleichung ermitteln

z.B.: $\quad f(x) = (x-2)^3 + 1$

Erläuterung:

Die Funktion x^3 hat einen Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente) bei $x = 0$.

Verschiebt man den Graphen von x^3 um zwei Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach oben, so entsteht der Graph der Funktion $(x-2)^3 + 1$ mit Sattelpunkt $(2|1)$.

Teilaufgabe Teil A 3 (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3

Steigung eines Funktionsgraphen

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

$f'(0) = 0 + 0 - 15 = -15 \qquad (1)$

$f(5) = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$

$f'(5) = -75 + 90 - 15 = 0 \qquad (2)$

Tangentengleichung ermitteln

$f(-1) = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

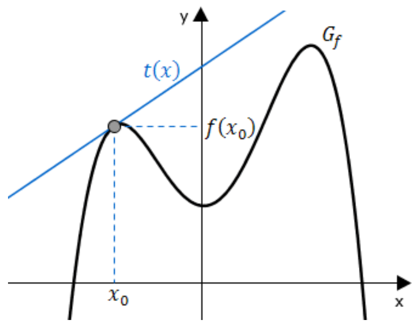
$f'(-1) = -3 - 18 - 15 = -36$

$y = (x+1) \cdot f'(-1) + f(-1)$

$y = (x+1) \cdot (-36) + 0 = -36x - 36 \qquad (3)$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung: $\quad t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$

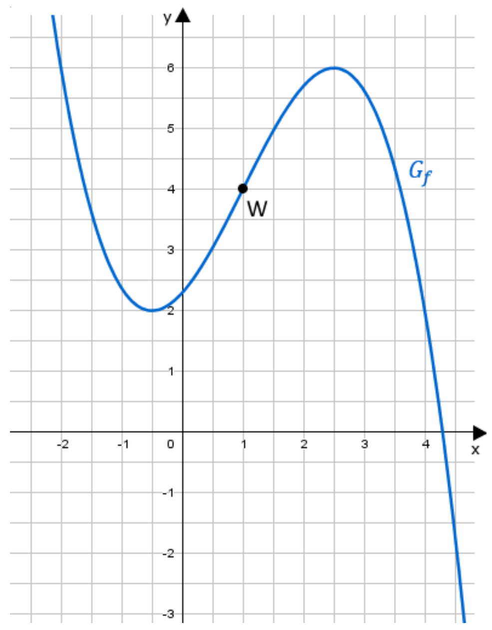


Teilaufgabe Teil A 4 (3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1|4)$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für $f'(1)$ ermittelten Näherungswert.

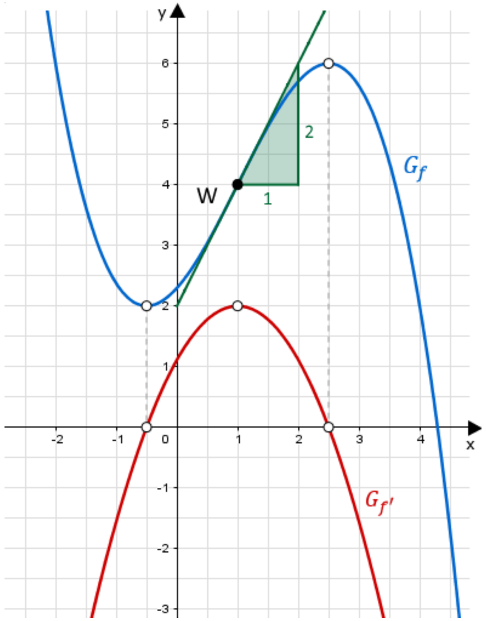


Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4

Steigung eines Funktionsgraphen

$f'(1) \approx \frac{2}{1} = 2$

Graph der Ableitungsfunktion



Erläuterung: *Zusammenhang Stammfunktion / Funktion*

Zusammenhang zwischen Stammfunktion F und Ausgangsfunktion f:

wo f ...	ist F ...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

In diesem Fall ist f die Stammfunktion, und f' die Ausgangsfunktion

Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

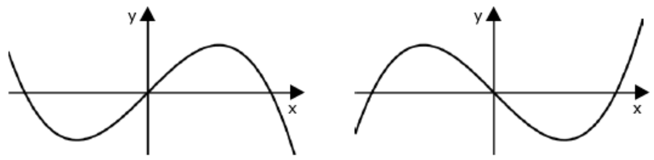


Abb. 1 Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5a

Monotonieverhalten einer Funktion

Abbildung 2 stellt einen Graphen von f_a dar, z.B. weil:

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{a}}_{>0}\ x^3 - x\right)}_{\to\infty} = +\infty \qquad (\text{da } a > 0)$$

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f_a(x) = \frac{1}{a}\cdot x^3 - x\,, \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Ableitungen bilden:

$$f_a'(x) = \frac{3}{a}\cdot x^2 - 1$$

$$f_a''(x) = \frac{6}{a}\cdot x$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 3$ gleich Null setzen: $f_a'(3) = 0$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0,$ daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$$\frac{3}{a}\cdot(3)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{27}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad a = 27$$

> Erläuterung: *Art eines Extremums*
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Prüfen, ob ein Extremum an der Stelle $x = 3$ vorliegt:

$$f_{27}''(3) = \frac{6}{27}\cdot 3 \neq 0$$

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2\cdot\left((\ln x)^2 - 1\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

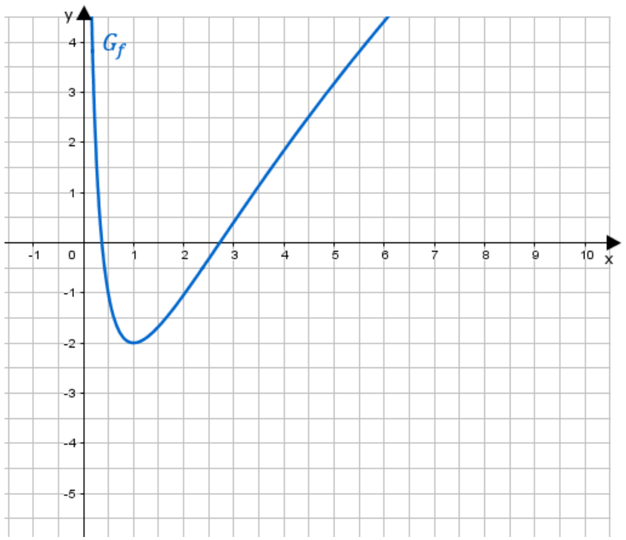


Abb. 1

Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$*)*

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 2 \cdot \left((\ln x)^2 - 1\right)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$2 \cdot \left((\ln x)^2 - 1\right) = 0$

$(\ln x)^2 - 1 = 0$

$(\ln x)^2 = 1 \qquad |\sqrt{}$

$\ln x = \pm 1 \qquad |e^x$

$x_{1,2} = e^{\pm 1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = e^{-1};\ x_2 = e$

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $\quad u(x) = (\ldots)^2 \quad$ und $\quad v(x) = \ln x$.
Dann ist $\quad u'(x) = 2 \cdot (\ldots) \quad$ und $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$.

$f'(x) = 2 \cdot \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$\underbrace{\frac{4}{x}}_{\neq 0} \cdot \ln x = 0$

$\ln x = 0 \qquad |e^x$

$x^T = e^0 = 1$

$y^T = f(1) = 2 \cdot (\underbrace{(\ln 1)^2}_{0} - 1) = -2$

$\Rightarrow \quad T(1|-2)$ Tiefpunkt

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt W besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.
(zur Kontrolle: x-Koordinate von W: e)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Wendepunkt ermitteln

$f(x) = 2 \cdot ((\ln x)^2 - 1)$

$f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$

Zweite und dritte Ableitung bilden:

> Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*
>
> $f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
>
> In diesem Fall ist $u(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$ und $v(x) = \ln x$.
>
> Für die ln-Funktion gilt: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
>
> Für die Potenzfunktion gilt: $\left(4x^{-1}\right)' = (-1) \cdot 4x^{-1-1} = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} \cdot \ln x + \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:
>
> $f''\left(x^W\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$\frac{4}{x^2} \cdot (1 - \ln x) = 0$

$1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1 \qquad |e^x$

$\Rightarrow \quad x^W = e$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle x^W untersuchen:

> Erläuterung:
>
> Wegen dem x^2 im Zähler, ist die Funktion $\frac{4}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stets positiv.

$\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{>0} \cdot (1 - \ln x) > 0$

$1 - \ln x > 0$

$\ln x < 1 \qquad | \; e^x$

$x < e$

$\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{>0} \cdot (1 - \ln x) < 0$

$1 - \ln x < 0$

$\ln x > 1 \qquad | \; e^x$

$x > e$

> Erläuterung: *Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle $x = e \quad \Rightarrow \quad x^W = e$ ist Wendestelle

y-Koordinate des Wendepunkts ermitteln:

$y^W = f(e) = 0$

$\Rightarrow \quad W(e|0)$ Wendepunkt

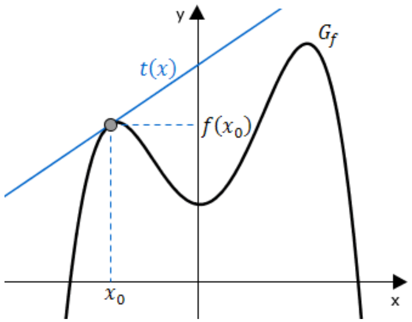
Wendetangente

Tangentengleichung:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = e$.

$y = f'(e) \cdot (x - e) + f(e)$

$y = \frac{4}{e} \cdot (x - e) + 0 = \frac{4}{e} \cdot x - 4$

Alternative Lösung

Beweis der Wendestelle über die dritte Ableitung:

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$f'''(x) = -\frac{8}{x^3} \cdot (1 - \ln x) + \frac{4}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{4}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x)$

$f'''(e) = -\frac{4}{e^3} \cdot (3 - 2\underbrace{\ln e}_{1}) = -\frac{4}{e^3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = e$ ist Wendestelle

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ gilt. Geben Sie $f'(0,5)$ und $f'(10)$ auf eine Dezimale genau an und zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Grenzwert bestimmen

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \quad$ (s. Merkhilfe)

Funktionswert berechnen

$f'(0,5) \approx -5,5$

$f'(10) \approx 0,9$

Graph der Ableitungsfunktion

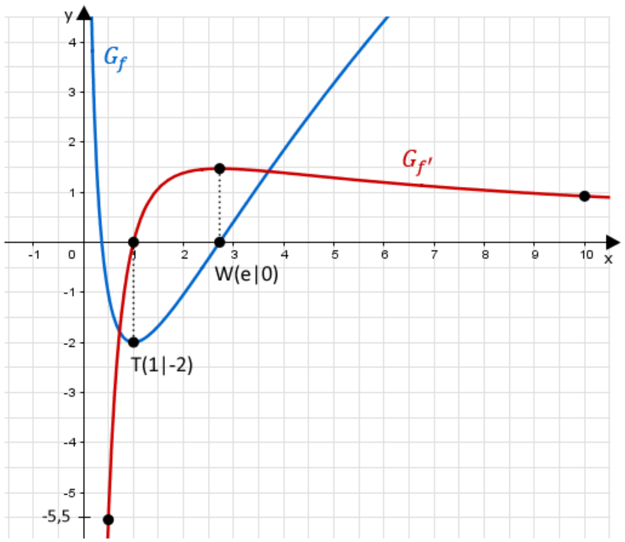


Abb. 1

Erläuterung: *Zusammenhang Stammfunktion / Funktion*

Zusammenhang zwischen Stammfunktion F und Ausgangsfunktion f :

wo f ...	ist F ...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

In diesem Fall ist f die Stammfunktion, und f' die Ausgangsfunktion.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Begründen Sie unter Zuhilfenahme von Abbildung 1, dass es zwei Werte $c \in]0;6]$ gibt, für die gilt: $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Bestimmtes Integral

Begründung:

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{dt}$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int\limits_a^a f(t)\mathrm{dt} = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Hier also: $\int\limits_{e^{-1}}^{e^{-1}} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$

1) Für $c = e^{-1}$ (Integrationsanfang) ist das Integral gleich 0

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int\limits_{e^{-1}}^{e} f(x)\ \mathrm{dx}$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen e^{-1} und e bzw. einschließt.

Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert des Integrals hier negativ.

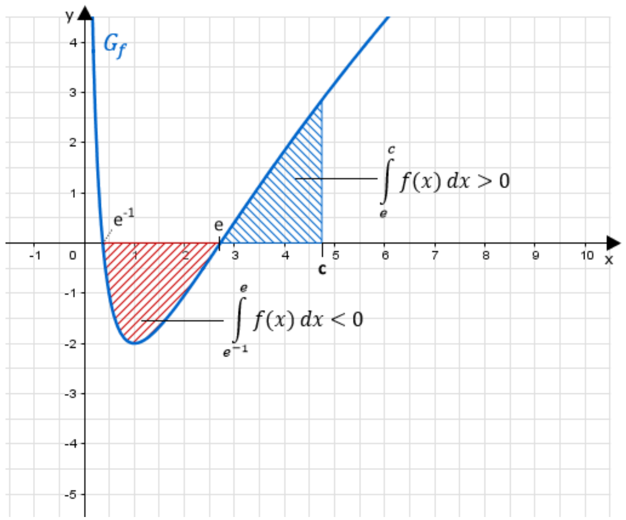


Abb. 1

2) Aus Abbildung 1 wird ersichtlich, dass $\left|\int\limits_{e^{-1}}^{e} f(x)\ \mathrm{dx}\right| < \int\limits_{e}^{6} f(x)\ \mathrm{dx}$ und somit muss es ein $c \in]0;6]$ geben, sodass $\int\limits_{e^{-1}}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$ (Flächenbilanz).

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Die gebrochen-rationale Funktion $h : x \mapsto 1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.

Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Asymptoten bestimmen

1) $x = 0$ (y-Achse)

2) $y = 1,5x - 4,5$

Erläuterung: *Asymptoten*

Um die Asymptoten einer Funktion zu bestimmen, untersucht man das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und an den Definitionslücken. Dazu bildet man i.d.R. die Grenzwerte.

Wegen der besonderen Funktionsschreibweise (Stichwort: Polynomdivision) können in diesem Fall die Asymptoten direkt von der Funktionsgleichung abgelesen werden:

1) senkrechte Asymptote $x = 0$, wegen $\frac{1}{x}$

2) schräge Asymptote $y = 1,5x - 4,5$, weil $\lim\limits_{x\to\infty} 1,5x - 4,5 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 1,5x - 4,5$

Teilaufgabe Teil B 1f (5 BE)

Im IV. Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa $1,623$ beträgt. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Flächenberechnung

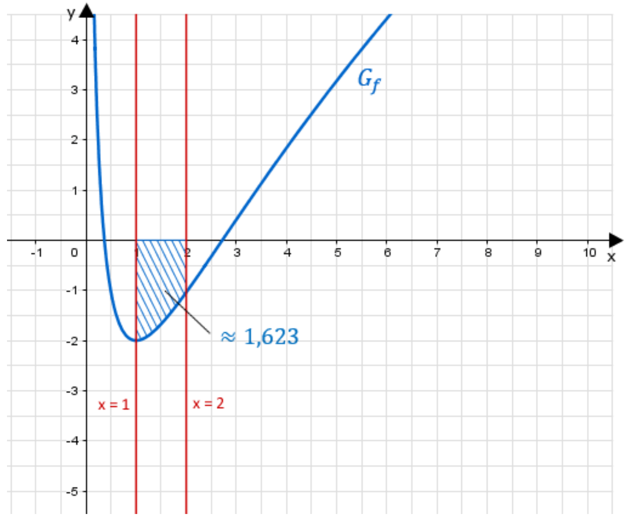


Abb. 1

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die der Graph G_h im IV. Quadranten zusammen mit der x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \left| \int_1^2 h(x)\ \mathrm{dx} \right|$$

(Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, hat das bestimmte Integral einen negativen Wert und wird deswegen bei der Flächenberechnung im Betrag genommen.)

$$A = \left| \int_1^2 h(x)\ \mathrm{dx} \right|$$

$$A = \left| \int_1^2 \left(1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}\right)\ \mathrm{dx} \right|$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, \mathrm{dx} = \ln|g(x)| + C$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^2 \left(1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}\right) \, \mathrm{dx} = 1,5\frac{x^{1+1}}{1+1} - 4,5\frac{x^{0+1}}{0+1} + \ln|x| = 3x^2 - 4,5x + \ln|x|$$

$$A = \left| \left[1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4,5x + \ln|x| \right]_1^2 \right|$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$A = |(3 - 9 + \ln 2) - (0,75 - 4,5 + 0)|$ FE

$A = |\ln 2 - 2,25|$ FE

prozentuale Abweichung: $\quad \dfrac{1,623 - |\ln 2 - 2,25|}{1,623} \approx 4,1\%$

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Durch Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ entsteht der Graph einer in $]-\infty; 8[$ definierten Funktion g. Dieser Graph wird mit G_g bezeichnet.

Zeichnen Sie G_g in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Spiegelung von Funktionsgraphen

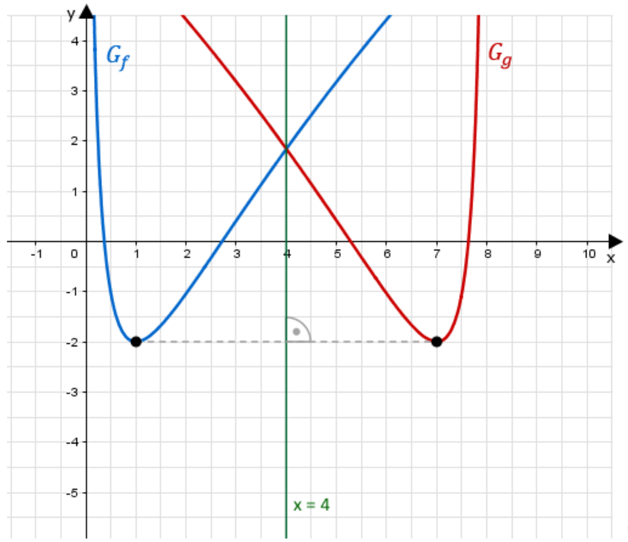


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Die beschriebene Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ kann durch eine Spiegelung von G_f an der y-Achse mit einer anschließenden Verschiebung ersetzt werden. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $g(x) = f(a\,x + b)$ für $x \in]-\infty; 8[$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Verschiebung von Funktionsgraphen

1. Spiegelung an der y-Achse:

$f(x) \to f(-x)$

2. Verschiebung um 8 Einheiten in positive x-Richtung.

$f(-x) \rightarrow f(-(x-8))$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Verschiebung entlang der x-Achse um a Einheiten:

nach rechts (positive x-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x-a)$

nach links (negative x-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x+a)$

Verschiebung entlang der y-Achse um b Einheiten:

nach oben (positive y-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x)+b$

nach unten (negative y-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x)-b$

Spiegelung an:

der y-Achse: $f(x) \rightarrow f(-x)$

der x-Achse: $f(x) \rightarrow -f(x)$

$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x-8) = f(-x+8)$

$\Rightarrow \quad a=-1;\, b=8$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Im Folgenden wird die „w-förmige“ Kurve k betrachtet, die sich aus dem auf $0,2 \leq x \leq 4$ beschränkten Teil von G_f und dem auf $4 < x \leq 7,8$ beschränkten Teil von G_g zusammengesetzt. Die Kurve k wird um 12 Einheiten in negative z-Richtung verschoben. Die dabei überstrichene Fläche dient als Modell für ein 12 Meter langes Aquarium, das durch zwei ebene Wände an Vorderund Rückseite zu einem Becken ergänzt wird (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

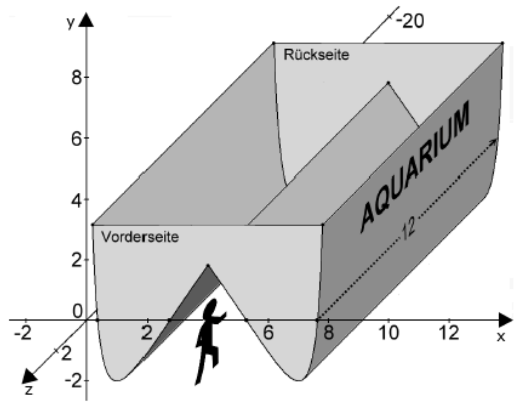
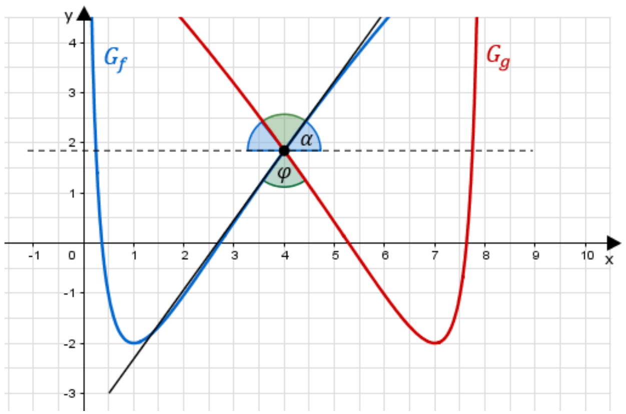


Abb. 2

Die Aquariumwände bilden an der Unterseite einen Tunnel, durch den die Besucher hindurchgehen können. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die linke und die rechte Tunnelwand miteinander einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Winkel bestimmen



$f'(x) = \frac{4}{x} \ln x$ (s. Teilaufgabe Teil B 1a)

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α, welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.

$f'(x_0) = \tan\alpha$

$\tan\alpha = f'(4)$

$\alpha = \tan^{-1}(\ln 4) \approx 54.195°$

$\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha \approx 71,6°$

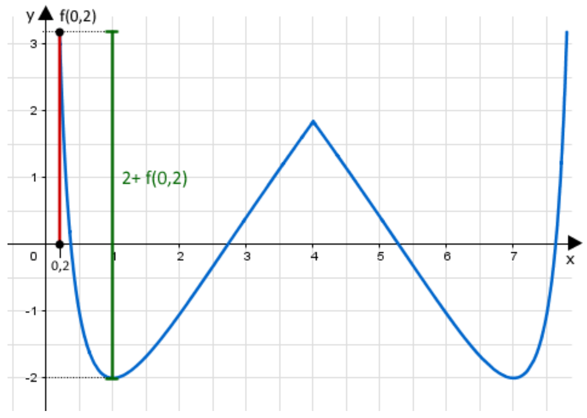
Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Das Aquarium wird vollständig mit Wasser gefüllt.

Berechnen Sie die größtmögliche Wassertiefe des Aquariums.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Funktionswert berechnen



größtmögliche Wassertiefe in Metern: $2 + f(0,2) \approx 5,18$

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Das Volumen des Wassers im Aquarium lässt sich analog zum Rauminhalt eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h berechnen.

Erläutern Sie, dass der Term $24 \cdot \int\limits_{0,2}^{4} (f(0,2) - f(x))\ dx$ das Wasservolumen im vollgefüllten Aquarium in Kubikmetern beschreibt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

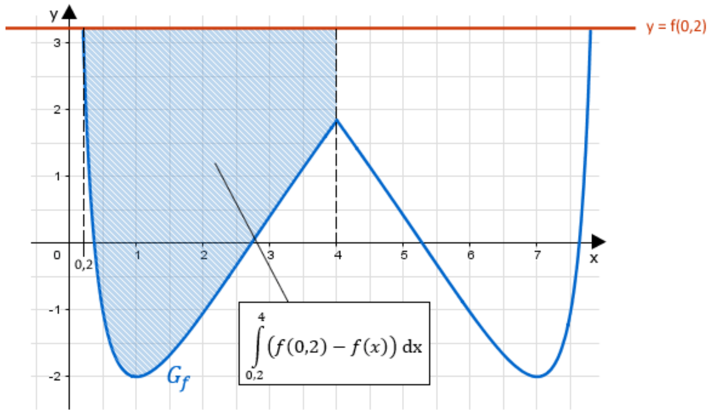
Bestimmtes Integral

Volumen des Wassers: $G \cdot h$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche, die der Graph G_f mit der Geraden $y = f(0,2)$ zwischen $x = 0,2$ und $x = 4$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_{0,2}^{4} \left(f(0,2) - f(x)\right)\ \text{dx}$$



Inhalt der Grundfläche G in Quadratmetern: $\quad 2 \cdot \int_{0,2}^{4} \left(f(0,2) - f(x)\right)\ \text{dx}$

Höhe h in Metern: $\quad 12$