Abitur 2018 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad f_2 : x \mapsto \ln\,(x+2)$$

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat.

Teilaufgabe Teil A 3 (5 BE)

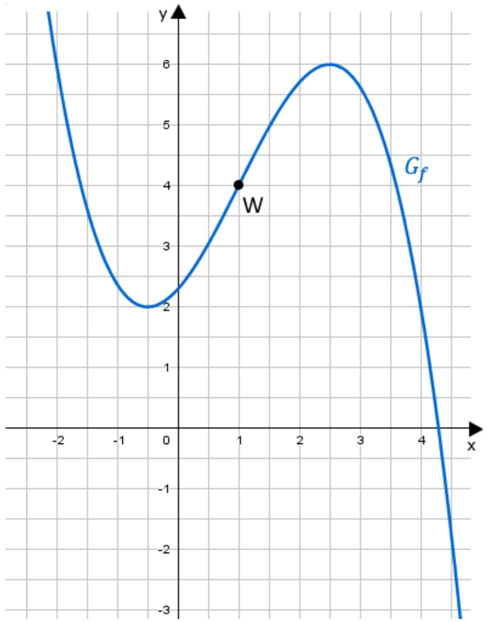
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 4 (3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1|4)$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für $f'(1)$ ermittelten Näherungswert.



Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

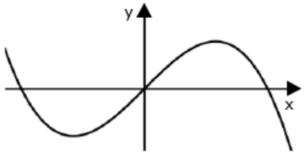


Abb. 1

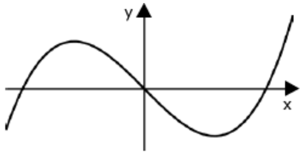


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \left((\ln x)^2 - 1 \right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

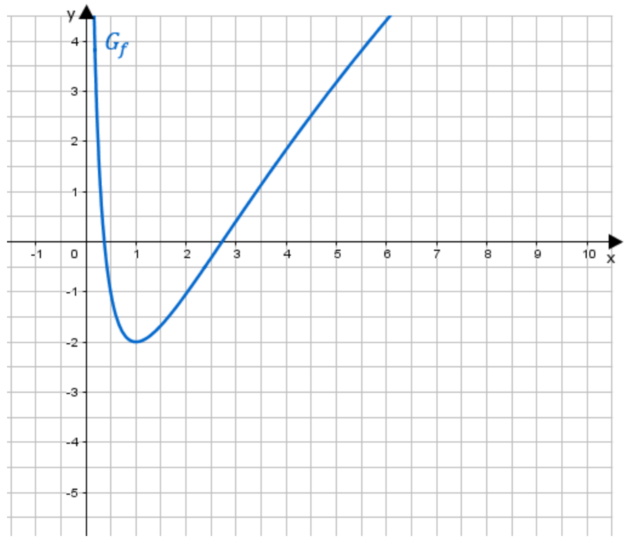


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$)

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt W besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.
(zur Kontrolle: x-Koordinate von W: e)

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ gilt. Geben Sie $f'(0,5)$ und $f'(10)$ auf eine Dezimale genau an und zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Begründen Sie unter Zuhilfenahme von Abbildung 1, dass es zwei Werte $c \in]0;6]$ gibt, für die gilt: $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

Die gebrochen-rationale Funktion $h : x \mapsto 1{,}5x - 4{,}5 + \dfrac{1}{x}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an.

Teilaufgabe Teil B 1f (5 BE)

Im IV. Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa $1{,}623$ beträgt. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

Durch Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ entsteht der Graph einer in $]-\infty;8[$ definierten Funktion g. Dieser Graph wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Zeichnen Sie G_g in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Die beschriebene Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ kann durch eine Spiegelung von G_f an der y-Achse mit einer anschließenden Verschiebung ersetzt werden. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $g(x) = f(a\,x + b)$ für $x \in]-\infty;8[$ gilt.

Im Folgenden wird die „w-förmige“ Kurve k betrachtet, die sich aus dem auf $0{,}2 \leq x \leq 4$ beschränkten Teil von G_f und dem auf $4 < x \leq 7{,}8$ beschränkten Teil von G_g zusammensetzt. Die Kurve k wird um 12 Einheiten in negative z-Richtung verschoben. Die dabei überstrichene Fläche dient als Modell für ein 12 Meter langes Aquarium, das durch zwei ebene Wände an Vorderund Rückseite zu einem Becken ergänzt wird (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

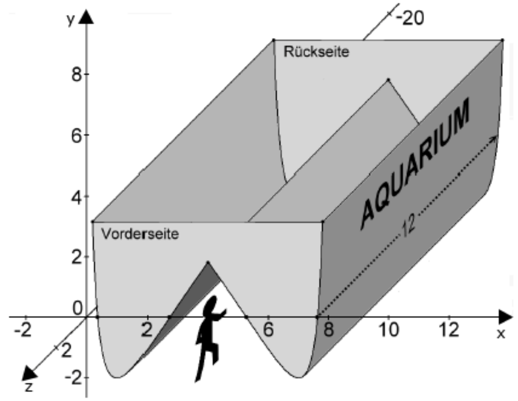


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Aquariumwände bilden an der Unterseite einen Tunnel, durch den die Besucher hindurchgehen können. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die linke und die rechte Tunnelwand miteinander einschließen.

Das Aquarium wird vollständig mit Wasser gefüllt.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Berechnen Sie die größtmögliche Wassertiefe des Aquariums.

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Das Volumen des Wassers im Aquarium lässt sich analog zum Rauminhalt eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h berechnen.

Erläutern Sie, dass der Term $24 \cdot \int\limits_{0,2}^{4} (f(0,2) - f(x))\ \mathrm{dx}$ das Wasservolumen im vollgefüllten Aquarium in Kubikmetern beschreibt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad f_2 : x \mapsto \ln\,(x+2)$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Definitionsbereich bestimmen

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_1 =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

$$f_2(x) = \ln\,(x+2)$$

$$x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_2 =]-2; +\infty[$$

Nullstellen einer Funktion

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$$

$$\frac{2x+3}{x^2-4} = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1^N = -\frac{3}{2}$$

$$f_2(x) = \ln\,(x+2)$$

$\ln(x+2) = 0 \qquad | \; e^x$

$x + 2 = 1$

$\Rightarrow \quad x_2^N = -1$

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Funktionsgleichung ermitteln

z.B.: $\quad f(x) = (x-2)^3 + 1$

Teilaufgabe Teil A 3 (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3

Steigung eines Funktionsgraphen

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

$f'(0) = 0 + 0 - 15 = -15 \qquad (1)$

Tangentengleichung ermitteln

$f(5) = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$

$f'(5) = -75 + 90 - 15 = 0$

$y = (x-5) \cdot f'(5) + f(5)$

$y = (x-5) \cdot 0 + 0 = 0 \qquad (2)$

$f(-1) = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

$f'(-1) = -3 - 18 - 15 = -36$

$y = (x+1) \cdot f'(-1) + f(-1)$

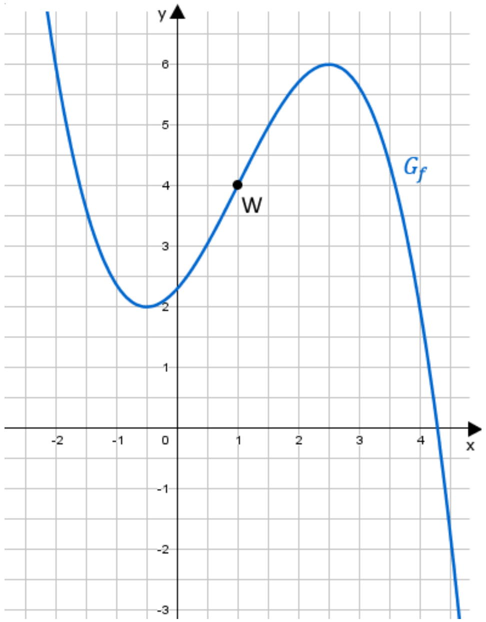
$y = (x+1) \cdot (-36) + 0 = -36x - 36 \qquad (3)$

Teilaufgabe Teil A 4 (3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1|4)$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für $f'(1)$ ermittelten Näherungswert.

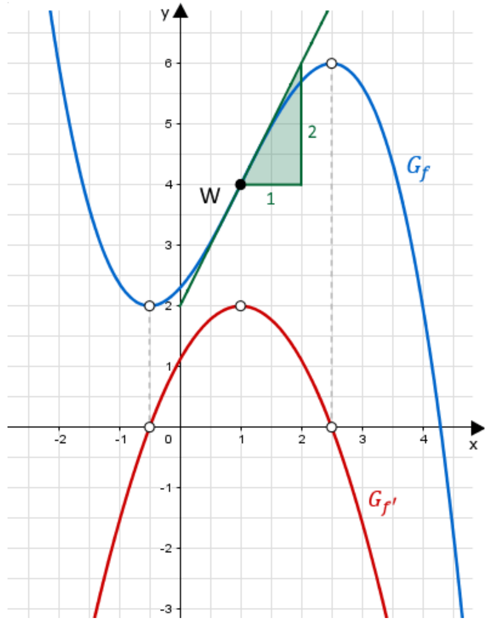


[Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4]

Steigung eines Funktionsgraphen

$f'(1) \approx \dfrac{2}{1} = 2$

Graph der Ableitungsfunktion



Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \dfrac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

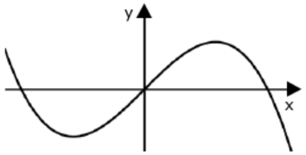


Abb. 1

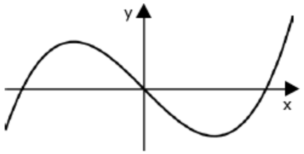


Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5a

Monotonieverhalten einer Funktion

Abbildung 2 stellt einen Graphen von f_a dar, z.B. weil:

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty \qquad (\text{da } a > 0)$$

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x\,, \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Ableitungen bilden:

$$f_a'(x) = \frac{3}{a} \cdot x^2 - 1$$

$$f_a''(x) = \frac{6}{a} \cdot x$$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f' = 0$

$$\frac{3}{a} \cdot x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{3}{a} \cdot x^2 = 1 \qquad | \cdot \frac{a}{3}$$

$$x^2 = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Parameter a ermitteln:

$$3 = \pm\sqrt{\frac{a}{3}} \qquad | \cdot \sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3} = \pm\sqrt{a} \qquad |^2$$

$$a = 27$$

Prüfen, ob ein Extremum an der Stelle $x = 3$ vorliegt:

$$f_{27}''(3) = \frac{6}{27} \cdot 3 \neq 0$$

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \left((\ln x)^2 - 1\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

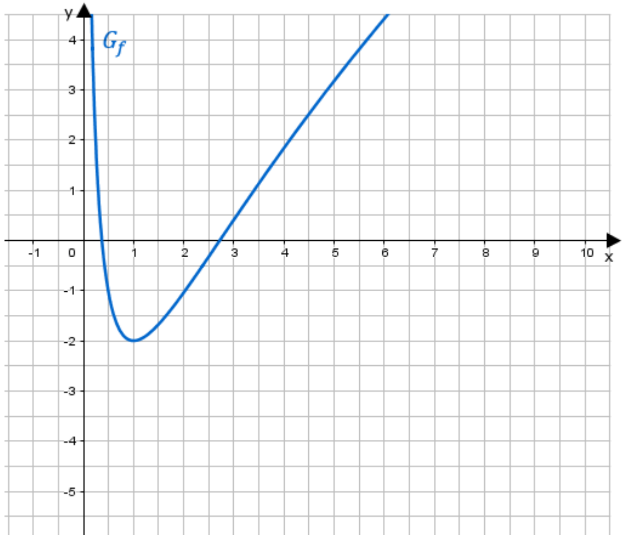


Abb. 1

Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 2 \cdot ((\ln x)^2 - 1)$

$2 \cdot ((\ln x)^2 - 1) = 0$

$(\ln x)^2 - 1 = 0$

$(\ln x)^2 = 1 \qquad |\sqrt{}$

$\ln x = \pm 1 \qquad |e^x$

$x_{1,2} = e^{\pm 1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = e^{-1};\ x_2 = e$

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

$f'(x) = 2 \cdot \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$\frac{4}{x} \cdot \ln x = 0$

$\ln x = 0 \qquad |e^x$

$x^T = e^0 = 1$

$y^T = f(1) = 2 \cdot (\underbrace{(\ln 1)^2}_{0} - 1) = -2$

$\Rightarrow \quad T(1|-2)$ Tiefpunkt

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt W besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.
(zur Kontrolle: x-Koordinate von W: e)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Wendepunkt ermitteln

$f(x) = 2 \cdot ((\ln x)^2 - 1)$

$f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$

Zweite und dritte Ableitung bilden:

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} \cdot \ln x + \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$

$f'''(x) = -\frac{8}{x^3} \cdot (1 - \ln x) + \frac{4}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{4}{x^3} \cdot (1 - 2\ln x)$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$$\frac{4}{x^2} \cdot (1 - \ln x) = 0$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1 \qquad |e^x$$

$$\Rightarrow \quad x^W = e$$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\mathrm{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\mathrm{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$$f'''(e) = -\frac{4}{e^3} \cdot (1 - 2\underbrace{\ln e}_{1}) = \frac{4}{e^3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = e \text{ ist Wendestelle}$$

y-Koordinate des Wendepunkts ermitteln:

$$y^W = f(e) = 0$$

$$\Rightarrow \quad W(e|0) \text{ Wendepunkt}$$

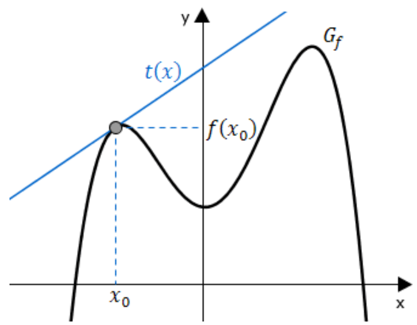
Wendetangente

Tangentengleichung:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$



Hier ist $x_0 = e$.

$$y = f'(e) \cdot (x - e) + f(e)$$

$$y = \frac{4}{e} \cdot (x - e) + 0 = \frac{4}{e} \cdot x - 4$$

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ gilt. Geben Sie $f'(0,5)$ und $f'(10)$ auf eine Dezimale genau an und zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} \cdot \ln x = \lim_{x \to +\infty} 4 \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{(s. Merkhilfe)}$$

Funktionswert berechnen

$f'(0,5) \approx -5,5$

$f'(10) \approx 0,9$

Graph der Ableitungsfunktion

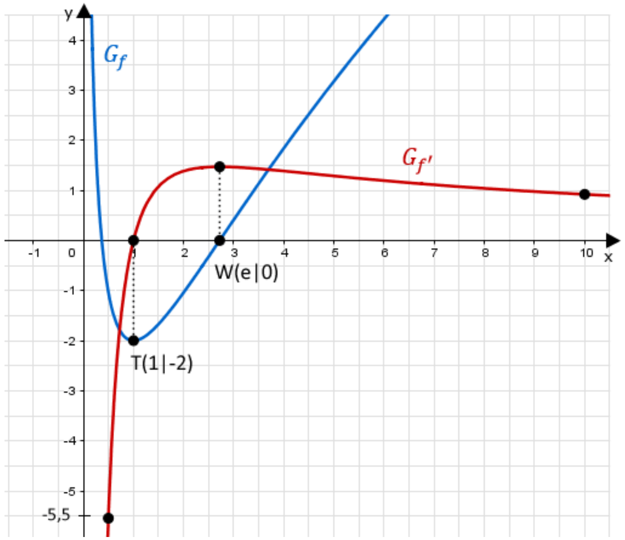


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Begründen Sie unter Zuhilfenahme von Abbildung 1, dass es zwei Werte $c \in]0;6]$ gibt, für die gilt: $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d]

Bestimmtes Integral

1) Für $c = e^{-1}$ (Integrationsanfang) ist das Integral gleich 0

2) Aus Abbildung 1 wird ersichtlich, dass $\left|\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} f(x)\ \mathrm{dx}\right| < \displaystyle\int_{e}^{6} f(x)\ \mathrm{dx}$ und somit muss es ein $c \in]0;6]$ geben, sodass $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$ (Flächenbilanz).

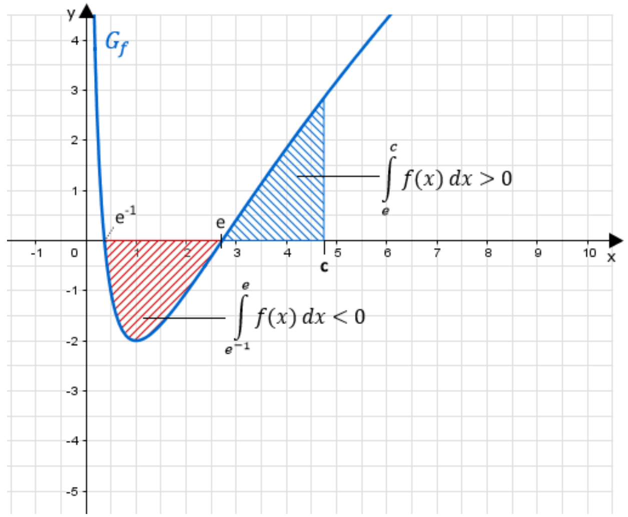


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Die gebrochen-rationale Funktion $h : x \mapsto 1,5x - 4,5 + \dfrac{1}{x}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.

Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e]

Asymptoten bestimmen

1) $x = 0$ (y-Achse)

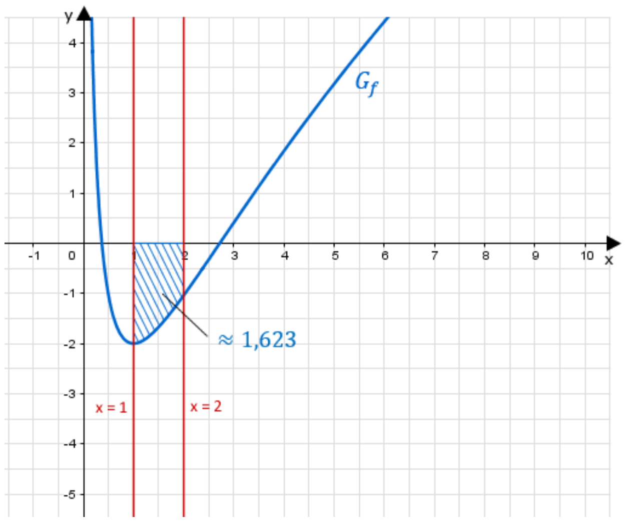
2) $y = 1,5x - 4,5$

Teilaufgabe Teil B 1f (5 BE)

Im IV. Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa $1,623$ beträgt. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Flächenberechnung



$$h(x) = 1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}$$

$$A = \left| \int_1^2 \left(1,5x - 4,5 + \frac{1}{x} \right) \, \mathrm{dx} \right|$$

$$A = \left| \left[1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4,5x + \ln|x| \right]_1^2 \right|$$

$$A = |(3 - 9 + \ln 2) - (0,75 - 4,5 + 0)| \text{ FE}$$

$$A = |\ln 2 - 2,25| \text{ FE}$$

prozentuale Abweichung: $\quad \dfrac{1,623 - |\ln 2 - 2,25|}{1,623} \cdot 100 \approx 4,1\%$

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Durch Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ entsteht der Graph einer in $]-\infty; 8[$ definierten Funktion g. Dieser Graph wird mit G_g bezeichnet.

Zeichnen Sie G_g in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Spiegelung von Funktionsgraphen

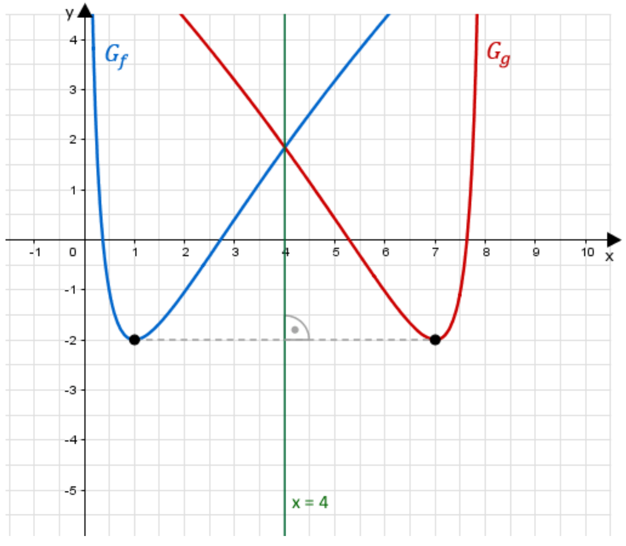


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Die beschriebene Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ kann durch eine Spiegelung von G_f an der y-Achse mit einer anschließenden Verschiebung ersetzt werden. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $g(x) = f(a\,x + b)$ für $x \in]-\infty; 8[$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Verschiebung von Funktionsgraphen

Verschiebung um 8 in positive x-Richtung.

$f(x) \to f(-x) \to f(-(x-8)) = f(-x+8)$

$a = -1;\ b = 8$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Im Folgenden wird die „w-förmige“ Kurve k betrachtet, die sich aus dem auf $0,2 \leq x \leq 4$ beschränkten Teil von G_f und dem auf $4 < x \leq 7,8$ beschränkten Teil von G_g zusammensetzt. Die Kurve k wird um 12 Einheiten in negative z-Richtung verschoben. Die dabei überstrichene Fläche dient als Modell für ein 12 Meter langes Aquarium, das durch zwei ebene Wände an Vorderund Rückseite zu einem Becken ergänzt wird (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

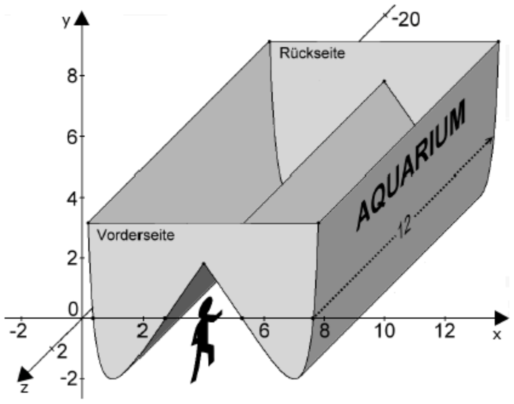
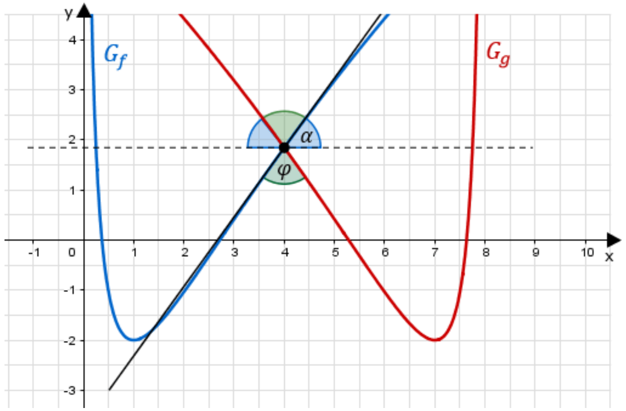


Abb. 2

Die Aquariumwände bilden an der Unterseite einen Tunnel, durch den die Besucher hindurchgehen können. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die linke und die rechte Tunnelwand miteinander einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Winkel bestimmen



$f'(x) = \frac{4}{x} \ln x$ (s. Teilaufgabe Teil B 1a)

$\tan \alpha = f'(4)$

$\alpha = \tan^{-1}(\ln 4) \approx 54.195°$

$\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha \approx 71,6°$

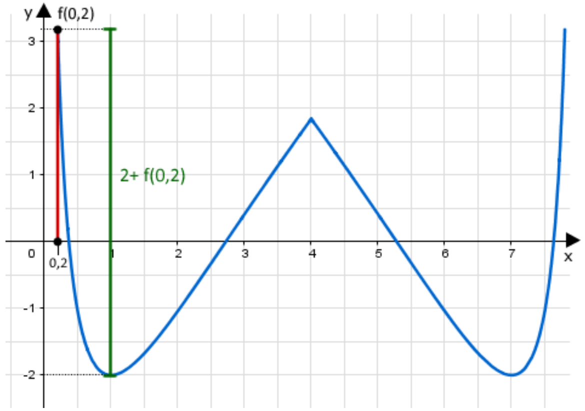
Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Das Aquarium wird vollständig mit Wasser gefüllt.

Berechnen Sie die größtmögliche Wassertiefe des Aquariums.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Funktionswert berechnen



größtmögliche Wassertiefe in Metern: $2 + f(0,2) \approx 5,18$

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Das Volumen des Wassers im Aquarium lässt sich analog zum Rauminhalt eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h berechnen.

Erläutern Sie, dass der Term $24 \cdot \int_{0,2}^{4} (f(0,2) - f(x))\ dx$ das Wasservolumen im vollgefüllten Aquarium in Kubikmetern beschreibt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Bestimmtes Integral

Volumen des Wassers: $G \cdot h$

Inhalt der Grundfläche G in Quadratmetern: $2 \cdot \int_{0,2}^{4} (f(0,2) - f(x))\ dx$

Höhe h in Metern: 12