Abitur 2017 Mathematik Stochastik IV

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Diese Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Tragen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

	A	$\overline{A}$	
B	0,12		
$\overline{B}$			
	0,3		

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

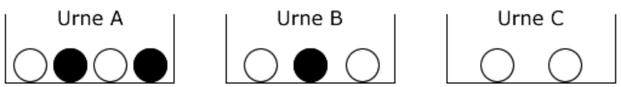
Im Vorfeld einer Wahl wird eine wahlberechtigte Person zufällig ausgewählt und befragt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

C: „Die Person ist älter als 50 Jahre.“

D: „Die Person will die derzeitige Regierungspartei wählen.“

Erläutern Sie, was in diesem Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist,wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.
Ein Anbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, 65% aller gekauften Samenkörner sind von der Qualität A.

Teilaufgabe Teil B a (5 BE)

In einem Gedankenexperiment werden die eingekauften Samenkörner zusammengeschüttet und gemischt. Bestimmen Sie mithilfe eines beschrifteten Baumdiagramms

α) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt;

β) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn, das nach der Saat keimt, von der Qualität B ist.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualität B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140.“

F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150.“

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms $1 - P(X \geq 275)$, wobei X eine binomial verteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 300$ und $p = 0,95$ bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Pflanze heran, die aufgrund schädlicher Einflüsse jedoch in manchen Fällen keine Gurken trägt. Bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität A entsteht mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% eine fruchttragende Pflanze, bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass - unabhängig von der Qualität der Samenkörner - von jeder fruchttragenden Pflanze gleich viele Gurken geerntet werden können.
Ein Samenkorn der Qualität A kostet 17 Cent, eines der Qualität B 12 Cent. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob es für einen Anbaubetrieb finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität A zu beschränken, oder ob es finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität B zu beschränken, wenn er alle Gurken zum selben Preis verkauft.

Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B durch eine veränderte Aufbereitung des Saatguts auf mehr als 70% erhöht hat. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B ist höchstens 70%.“ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Dazu werden 100 der verändert aufbereiteten Samenkörner der Qualität B zufällig ausgewählt und gesät. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Diese Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Tragen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

	A	$\overline{A}$	
B	0,12		
$\overline{B}$			
	0,3		

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Stochastische Unabhängigkeit

Es gilt:

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,3} = 0,4$$

	A	$\overline{A}$	
B	0,12		0,4
$\overline{B}$			
	0,3		1

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Vierfeldertafel vervollständigen:

	A	$\overline{A}$	
B	0,12	0,28	0,4
$\overline{B}$	0,18	0,42	0,6
	0,3	0,7	1

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Im Vorfeld einer Wahl wird eine wahlberechtigte Person zufällig ausgewählt und befragt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

C: „Die Person ist älter als 50 Jahre."

D: „Die Person will die derzeitige Regierungspartei wählen."

Erläutern Sie, was in diesem Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Stochastische Unabhängigkeit

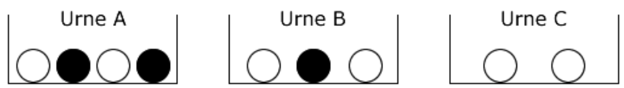
z. B.:

Unter den Wahlberechtigten, die älter als 50 Jahre sind, ist der Anteil derjenigen, die die derzeitige Regierungspartei wählen wollen, genauso groß wie unter allen Wahlberechtigten.

Mathematische Formulierung: $P_C(D) = P(D)$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Baumdiagramm erstellen

E: „2 weiße und 1 schwarze Kugel in Urne C"

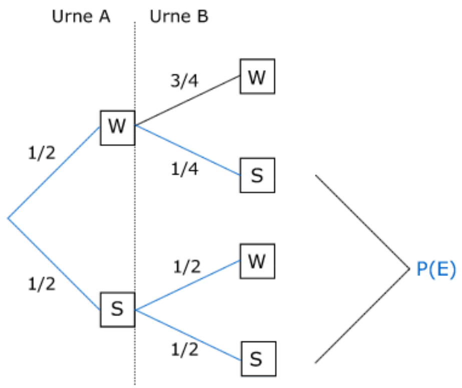
Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

Wird aus Urne A eine weiße Kugel gezogen und in Urne B gelegt, so befinden sich dann in Urne B 4 Kugeln, davon 3 weiße und 1 schwarze.

$$\Rightarrow \quad P_W(W) = \frac{3}{4}$$

Wird aus Urne A eine schwarze Kugel gezogen und in Urne B gelegt, so befinden sich dann in Urne B 4 Kugeln, davon 2 weiße und 2 schwarze.

$$\Rightarrow \quad P_S(W) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Zum Beispiel:

$$P(W \cap W) = P(W) \cdot P_W(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $\quad P(E) = P(W \cap S) + P\,(S \cap S)$

$$P(E) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{P(W \cap S)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{P(S \cap S)} = \frac{3}{8} = 37,5\%$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist,wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

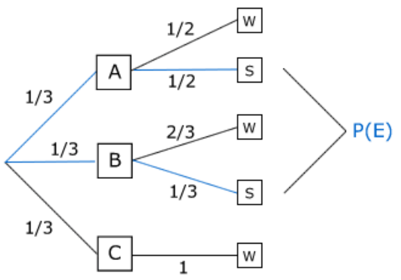
Baumdiagramm erstellen

E : „Kugel ist schwarz“

$\overline{E}$: „Kugel ist weiß“

Erläuterung: *Ereignis*

Zunächst wird eine Urne ausgesucht - die Wahrscheinlichkeit dafür ist für alle Urnen gleich groß $\left(\frac{1}{3}\right)$. Im Anschluss wird eine Kugel gezogen; diese kann weiß oder schwarz sein. Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen, ist abhängig davon aus welcher Urne gezogen wird.



Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Zum Beispiel:

$$P(A \cap S) = P(A) \cdot P_A(S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(E) = P(A \cap S) + P\,(B \cap S)$

$$P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

$$P\left(\overline{E}\right) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung aufstellen:

a_i in € (Auszahlung)	x	0
Ereignis	schwarze Kugel	weiße Kugel
$P(A = a_i)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$$E(X) = x \cdot \frac{5}{18} + 0 \cdot \frac{13}{18} = \frac{5}{18}x$$

Erläuterung: *Faires Spiel*

Der Erwartungswert soll gleich dem Einsatz von 1 € sein. Das Spiel wäre somit ein sogenanntes „faire Spiel“.

Es soll gelten: $E(X) = 1$

$$\frac{5}{18}x = 1$$

$$x = \frac{18}{5} = 3{,}60\ €$$

Teilaufgabe Teil B a (5 BE)

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.
Ein Anbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, 65% aller gekauften Samenkörner sind von der Qualität A.

In einem Gedankenexperiment werden die eingekauften Samenkörner zusammengeschüttet und gemischt. Bestimmen Sie mithilfe eines beschrifteten Baumdiagramms

α) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt;

β) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn, das nach der Saat keimt, von der Qualität B ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

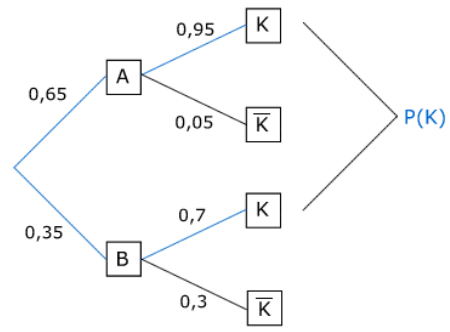
Wahrscheinlichkeit

$P(A) = 0{,}65$

> Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
>
> **Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von** 95%, eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.
>
> $\Rightarrow \quad P_A(K) = 0{,}95$
>
> Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, **eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von** 70%.
>
> $\Rightarrow \quad P_B(K) = 0{,}7$

$P_A(K) = 0{,}95$

$P_B(K) = 0{,}7$



> Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*
>
> **1. Pfadregel**: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
>
> Zum Beispiel:
>
> $P(A \cap K) = P(A) \cdot P_A(K) = 0{,}65 \cdot 0{,}95$
>
> **2. Pfadregel**: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.
>
> In diesem Fall: $\quad P(K) = P(A \cap K) + P\,(B \cap K)$

α) $P(K) = 0{,}65 \cdot 0{,}95 + 0{,}35 \cdot 0{,}7 = 0{,}6175 + 0{,}245 = 86{,}25\%$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Fall β):

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$P_K(B) = \frac{P(K \cap B)}{P(K)}$$

Erläuterung: *1. Pfadregel*

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

$$P(K \cap B) = P(B) \cdot P_B(K) = 0{,}35 \cdot 0{,}7$$

$$P_K(B) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}7}{0{,}8625} \approx 28{,}4\%$$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualität B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140.“

F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Binomialverteilung

Bernoulli-Kette der Länge $n = 200$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = P_B(K) = 0{,}7$ (s. vorherige Teilaufgabe).

$$P(E) = P_{0,7}^{200}(X = 140) \stackrel{\text{TW}}{=} 0{,}06146 \approx 6{,}1\%$$

Erläuterung:

„mehr als 130 und weniger als 150“ $\iff$ $130 < X < 150$

Da es nur ganze Körner gibt, liegt X im Bereich $131 \leq X \leq 149$.

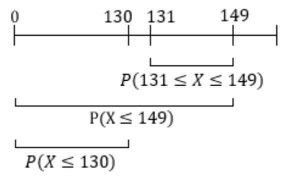
$$P(F) = P_{0,7}^{200}(130 < X < 150) = P_{0,7}^{200}(131 \leq X \leq 149)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$$P(F) = P_{0,7}^{200}(X \leq 149) - P_{0,7}^{200}(X \leq 130) \stackrel{\text{TW}}{=} 0{,}93045 - 0{,}07279 \approx 85{,}8\%$$

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms $1 - P(X \geq 275)$, wobei X eine binomial verteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 300$ und $p = 0{,}95$ bezeichnet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Wahrscheinlichkeit

$$1 - P_{0,95}^{300}(X \geq 275) = P_{0,95}^{300}(X < 275)$$

Wahrscheinlichkeit, dass von 300 gesäten Samenkörnern der Sorte A höchstens 274 keimen.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Pflanze heran, die aufgrund schädlicher Einflüsse jedoch in manchen Fällen keine Gurken trägt. Bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität A entsteht mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% eine fruchttragende Pflanze, bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass - unabhängig von der Qualität der Samenkörner - von jeder fruchttragenden Pflanze gleich viele Gurken geerntet werden können. Ein Samenkorn der Qualität A kostet 17 Cent, eines der Qualität B 12 Cent. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob es für einen Anbaubetrieb finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität A zu beschränken, oder ob es finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität B zu beschränken, wenn er alle Gurken zum selben Preis verkauft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Wahrscheinlichkeit

F: „fruchttragende Pflanze“
K: „Pflanze keimt“

Qualität A:

$P(K) = 0,95$ (s. Aufgabe Teil B a)

> Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
>
> „Bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität A entsteht mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % eine fruchttragende Pflanze“
>
> $\Rightarrow P_K(F) = 0,85$

$P_K(F) = 0,85$ (s. Angabe)

> Erläuterung: *Schnittwahrscheinlichkeit*
>
> $K \cap F$: „Pflanze keimt und ist fruchttragend“
>
> $P(K \cap F) = P(K) \cdot P_K(F) = 0,95 \cdot 0,85$

$P(K \cap F) = 0,95 \cdot 0,85$

Qualität B:

$P(K) = 0,7$ (s. Aufgabe Teil B a)

$P_K(F) = 0,75$ (s. Angabe)

$P(K \cap F) = 0,7 \cdot 0,75$

> Erläuterung:
>
> Der Faktor $\dfrac{1}{0,95 \cdot 0,85}$ gibt die im Mittel benötigten Samenkörner an, um 1 keimendes und fruchttragens Samenkorn zu erhalten.

Durchschnittliche Kosten einer fruchttragenden Pflanze aus Samenkörner der Qualität A:

$$\frac{1}{0,95 \cdot 0,85} \cdot 17 \text{ ct} \approx 21 \text{ ct}$$

Durchschnittliche Kosten einer fruchttragenden Pflanze aus Samenkörner der Qualität B:

$$\frac{1}{0,7 \cdot 0,75} \cdot 12 \text{ ct} \approx 23 \text{ ct}$$

$\Rightarrow$ Es ist günstiger sich auf Samenkörner der Qualität A zu beschränken

Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B durch eine veränderte Aufbereitung des Saatguts auf mehr als 70% erhöht hat. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B ist höchstens 70%.“ auf einem Signifikanzniveau von 5%

getestet werden. Dazu werden 100 der verändert aufbereiteten Samenkörner der Qualität B zufällig ausgewählt und gesät. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,7$

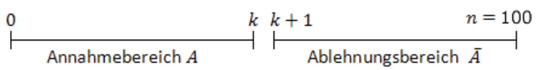
Stichprobenumfang: $n = 100$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k + 1, 100]$

> Erläuterung: *Nullhypothese*
>
> Da hier die Nullhypothese " $p \leq 0,7$" bzw. " **höchstens** 70%" lautet, liegt der Annahmebereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Fehler 1. Art bestimmen:

> Erläuterung: *Fehler 1.Art*
>
> Man spricht von „Fehler 1. Art" , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.
>
> Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \geq k + 1$).
>
> $\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,7}^{100}(X \geq k + 1) \leq 0,05$

$P_{0,7}^{100}(X \geq k + 1) \leq 0,05$

> Erläuterung: *Gegenereignis*
>
> Betrachtung des Gegenereignisses:
>
> P(mindestens k+1 Treffer) = 1 - P(höchstens k Treffer)
>
> In mathematischen Zeichen:
>
> $P(X \geq k + 1) = 1 - P(X \leq k)$

$1 - P_{0,7}^{100}(X \leq k) \leq 0,05 \qquad | \quad -1$

$-P_{0,7}^{100}(X \leq k) \leq -0,95 \qquad | \quad \cdot(-1)$

(da die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$P_{0,7}^{100}(X \leq k) \geq 0,95$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 77$

Entscheidungsregel: