Abitur 2017 Mathematik Stochastik III

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

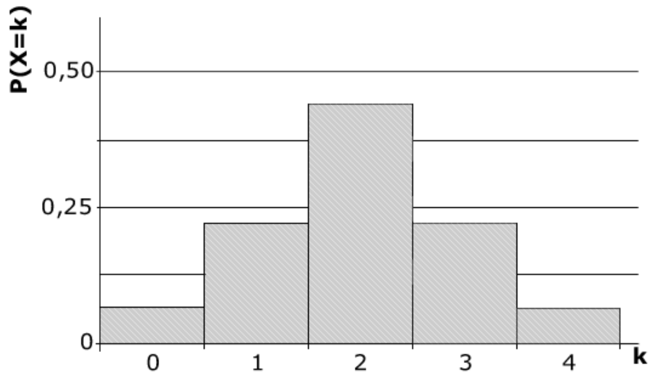
Teilaufgabe Teil A 1c (2 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50% war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

Teilaufgabe Teil A 1d (2 BE)

Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)



In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ und dem Erwartungswert 2 dargestellt. Weisen Sie nach, dass es sich dabei nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass 40% aller Autos mit ESP ausgerüstet sind.

200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 mit ESP ausgerüstet sind.

Teilaufgabe Teil B 1b (7 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: „Das fünfte ausgewählte Auto ist das erste mit ESP.“

B: „Die Zufallsgröße X nimmt einen Wert an, der von ihrem Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweicht.“

In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

α) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ $\qquad$ β) $\binom{20}{4}$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen. Betrachtet werden folgende Ereignisse.

E: „Ein im Parkhaus zufällig ausgewähltes Auto ist mit ESP ausgerüstet.“

K: „Bei einem im Parkhaus zufällig ausgewählten Auto handelt es sich um einen Kleinwagen.“

Geben Sie die Bedeutung von $P_K(E)$ im Sachzusammenhang an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40% mit ESP ausgerüstet sind.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Interpretation

p: Wahrscheinlichkeit für blauen Sektor
$1-p$: Gegenwahrscheinlichkeit

$(1-p)^7$ ist die Wahrscheinlichkeit für 7 x gedreht und niemals blau getroffen.

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Binomialverteilung

$$P_p^{10}(X=2) = \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Teilaufgabe Teil A 1c (2 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50% war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1c

Wahrscheinlichkeit

Die Aussage ist falsch, denn bei jeder Drehung wird der gelbe Sektor mit derselben Wahrscheinlichkeit getroffen (50 %).

Teilaufgabe Teil A 1d (2 BE)

Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1d

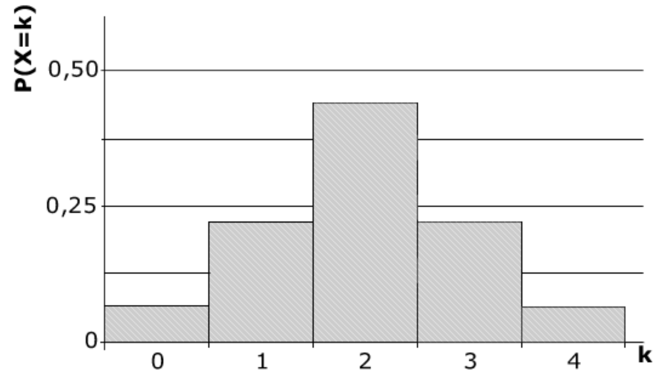
Ergebnisraum

$|D| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

Erläuterung:

Pro Drehung gibt es 2 mögliche Farben, die nicht blau sind.
Gedreht wird viermal, also 2^4 mögliche Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)



In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ und dem Erwartungswert 2 dargestellt. Weisen Sie nach, dass es sich dabei nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Gegeben: $E(X) = 2$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p$

$E(X) = n \cdot p$

Erläuterung:

Als n wird der größte vorkommende Wert aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung genommen.

$E(X) = 4 \cdot p$

$2 = 4 \cdot p \quad \Rightarrow \quad p = 0,5$

Bei einer Binomialverteilung müsste also $p = 0,5$.

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

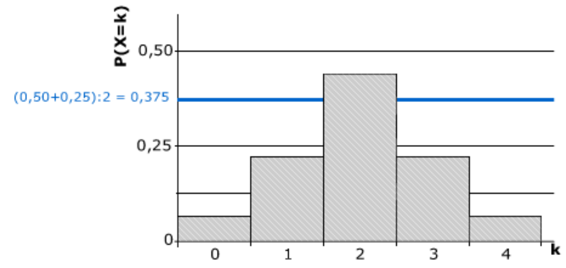
$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P_{0,5}^4(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = 0,375$$

Erläuterung:



In der Zeichnung ist der Wert für $P(X = 2)$ aber größer, sodass es sich nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass 40% aller Autos mit ESP ausgerüstet sind.

200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 mit ESP ausgerüstet sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Binomialverteilung

$p = P(\text{„ESP“}) = 40\% = 0,4$

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,4$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 0,6$

In diesem Fall ist ein Auto mit ESP ein Treffer.

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n	Anzahl der Züge („Länge“ der Bernoulli-Kette)	hier : $n = 200$

Bernoulli-Kette mit $n = 200$ und $p = 0,4$.

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(weniger als k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$ bzw. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$$P_{0,4}^{200}(X \geq 70) = 1 - P_{0,4}^{200}(X \leq 69) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,0639 = 0,9361 \approx 93,6\%$$

Teilaufgabe Teil B 1b (7 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: „Das fünfte ausgewählte Auto ist das erste mit ESP.“

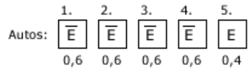
B: „Die Zufallsgröße X nimmt einen Wert an, der von ihrem Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweicht.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Binomialverteilung

E: „Auto mit ESP“
$\overline{E}$: „Auto ohne ESP“

$p = P(E) = 0,4$
$q = P\left(\overline{E}\right) = 1 - 0,4 = 0,6$



$P(A) = 0,6^4 \cdot 0,4 = 0,05184 \approx 5,2\%$

Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert μ und Standardabweichung σ bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße, Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt:

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p$

Standardabweichung (Streuung) von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,4 = 80$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{80 \cdot 0,6} \approx 6,93$

Wahrscheinlichkeit

Bereich der geforderten Abweichung bestimmen: $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$\mu - \sigma = 80 - 6,93 = 73,07$

$\mu + \sigma = 80 + 6,93 = 86,93$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$P(B) = P_{0,4}^{200}(73,07 \leq X \leq 86,93)$

Erläuterung:

Da es nur ganze Autos geben kann, muss der Bereich auf ganze Zahlen gerundet werden.

X soll **höchstens** um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen. Also muss X größer 74 und kleiner 86 sein.
($73 \leq X \leq 87$ wäre falsch.)

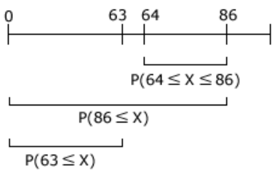
$P(B) = P_{0,4}^{200}(74 \leq X \leq 86)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$P(B) = P_{0,4}^{200}(X \leq 86) - P_{0,4}^{200}(X \leq 73) \overset{\text{TW}}{=} 0,82607 - 0,17423 = 0,65184$

$P(B) \approx 65,2\%$

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

$\alpha)$ $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ $\qquad$ $\beta)$ $\binom{20}{4}$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es die 4 Autos zu parken, falls

$\alpha)$ die Autos unterschieden werden

$\beta)$ die Autos nicht unterschieden werden

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen. Betrachtet werden folgende Ereignisse.

E: „Ein im Parkhaus zufällig ausgewähltes Auto ist mit ESP ausgerüstet.“

K: „Bei einem im Parkhaus zufällig ausgewählten Auto handelt es sich um einen Kleinwagen.“

Geben Sie die Bedeutung von $P_K(E)$ im Sachzusammenhang an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_K(E) =$ Wahrscheinlichkeit für ein Auto mit ESP, wenn nur Kleinwägen betrachtet werden.

Baumdiagramm erstellen

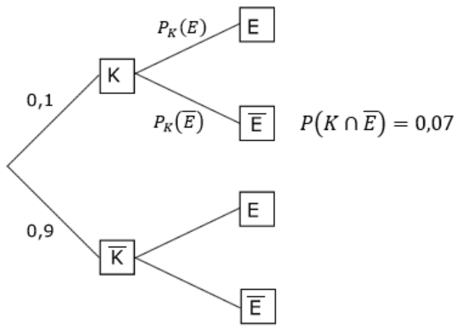
Text analysieren:

„Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen.“

$\left|K \cap \overline{E}\right| = 7 \quad \Rightarrow \quad P\left(K \cap \overline{E}\right) = \dfrac{7}{100} = 0{,}07$

$|K| = 90 \quad \Rightarrow \quad P\,(K) = \dfrac{90}{100} = 0{,}9 \quad ; \quad P\left(\overline{K}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

Baumdiagramm zeichnen:



Erläuterung: *1. Pfadregel*

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Hier: $P\left(K \cap \overline{E}\right) = P(K) \cdot P_K\left(\overline{E}\right)$

$0{,}1 \cdot P_K\left(\overline{K}\right) = 0{,}07$

$\Rightarrow \quad P_K\left(\overline{E}\right) = \dfrac{0{,}07}{0{,}1} = 0{,}7$

$\Rightarrow \quad P_K\,(E) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40% mit ESP ausgerüstet sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

$40\% \cdot 30 = 12$ Autos mit ESP

$60\% \cdot 30 = 18$ Autos ohne ESP

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um Ziehen ohne Reihenfolge (welches Auto wann gewählt wird ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (ein Auto kann nur einmal gewählt werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

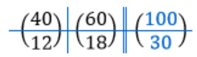
$P(X) = \dfrac{\text{Anzahl Treffer} \;\cdot\; \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$

12 der 40 Autos mit ESP (s. vorherige Teilaufgabe) werden gewählt:
$\Rightarrow |\,\text{Treffer}| = \dbinom{40}{12}$

18 der 60 Autos ohne ESP werden gewählt:
$\Rightarrow |\,\text{Niete}| = \dbinom{60}{18}$

30 Autos werden aus 100 gewählt:
$\Rightarrow |\Omega| = \dbinom{100}{30}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



$$P(C) = \frac{\overbrace{\dbinom{40}{12}}^{\text{mit ESP}} \cdot \overbrace{\dbinom{60}{18}}^{\text{ohne ESP}}}{\binom{100}{30}} = 0{,}1759 \approx 17{,}6\%$$