Abitur 2017 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\displaystyle\int_0^2 g(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0,75 \leq x \leq 4$.

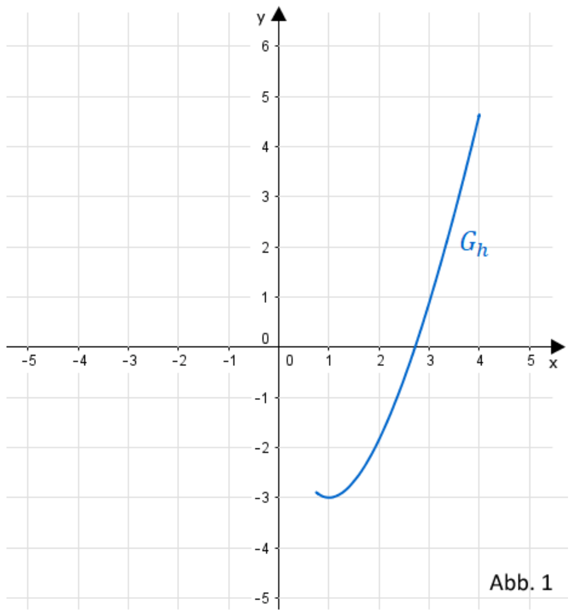


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e|0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0,75$ in Abbildung 1 ein.

Die Funktion $h^* : x \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)

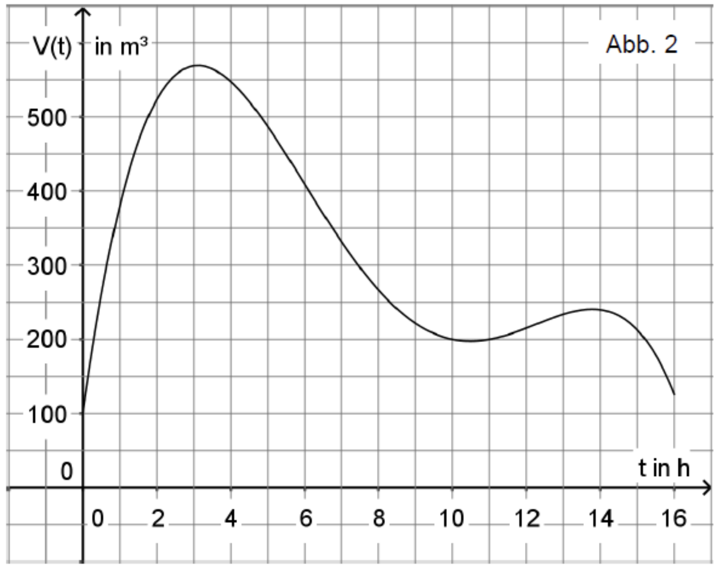
Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Schraffieren Sie in Abbildung 1 ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int_e^{x_S} (x - h^*(x))\ dx$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $[0; 16]$ definierten Funktion $V : t \mapsto V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $V(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Erläutern Sie, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0; 10]$ die Beziehung $V(t+6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheiden Sie mithilfe von Abbildung 2, ob für $t = 5$ diese Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : t \mapsto 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in $\frac{m^3}{h}$.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7,5$ positiv und für $7,5 < t < 12$ negativ sind.

Teilaufgabe Teil B 2e (6 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn 150 m^3 Wasser im Becken waren. Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$

$4 + x \geq 0$

$x \geq -4$

$\Rightarrow \quad D_g = [-4; +\infty[$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$g(0) = 2 \cdot \sqrt{4} - 1 = 3$

$\Rightarrow \quad S_y(0|3)$

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Verschiebung von Funktionsgraphen

1. Verschiebung von G_w entlang der x-Achse um 4 Einheiten nach links.

$\Rightarrow \quad g(x) = \sqrt{x+4}$

2. Streckung um dem Faktor 2

$\Rightarrow \quad g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+4}$

3. Verschiebung entlang der y-Achse um 1 Einheit nach unten.

$\Rightarrow \quad g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+4} - 1$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

$0 = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1$

$e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{2} \qquad |\ln$

$\dfrac{1}{2}x = \ln \dfrac{1}{2}$

$x^N = 2 \ln \dfrac{1}{2}$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Tangentengleichung ermitteln

$f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

$f'(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \dfrac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}$

Tangentengleichung:

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$y = e^0 \cdot x + 1 = x + 1$

Achsenabschnitte:

$S_x(-1|0)$, $S_y(0|1) \qquad \Rightarrow \qquad \triangle$ ist gleichschenklig

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Funktionsgleichung ermitteln

z.B. $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b]

Eigenschaften einer Funktion

z.B. $\quad g(x) = x - 1$

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a]

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate

$$\frac{n(2) - n(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 120 + 500 - 500}{2} = -54$$

Mittlere Änderungsrate: $-54\frac{1}{h}$

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b]

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$n(t) = 3t^2 - 60t + 500$

$n'(t) = 6t - 60$

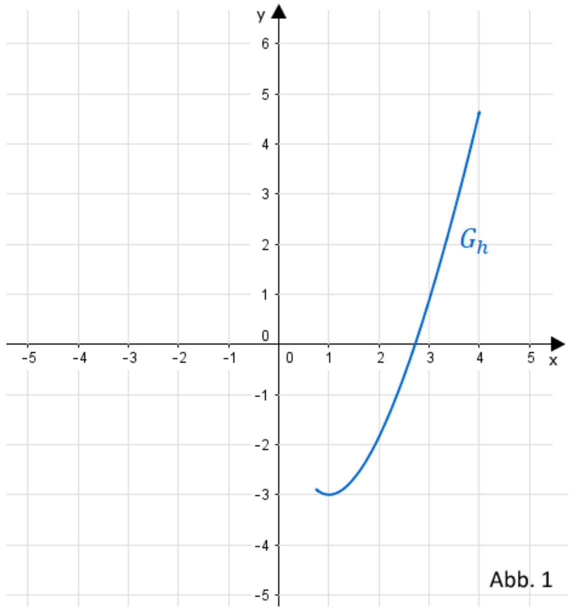
$6t - 60 = -30$

$6t = 30$

$t = 5$

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0,75 \le x \le 4$.



Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e|0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

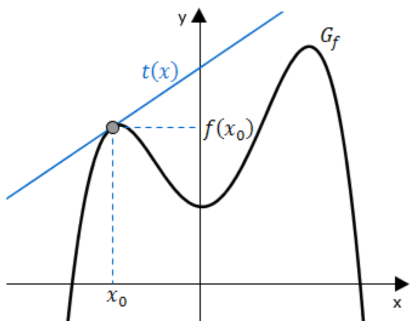
Tangentengleichung ermitteln

Tangentengleichung t im Punkt $(e|0)$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = e$.

$t : y = (x - x_0) \cdot h'\,(x_0) + h\,(x_0)$

$t : y = (x - e) \cdot h'\,(e) + h\,(e)$

Nebenrechnungen:

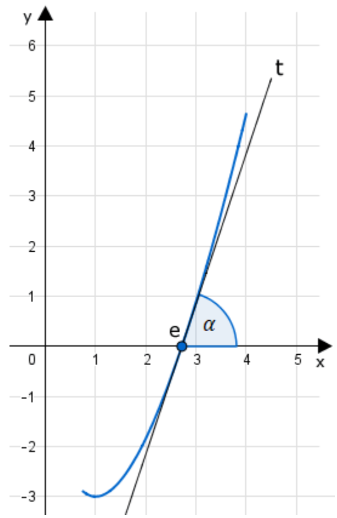
$h(e) = 3e \cdot (-1 + \underbrace{\ln e}_{1}) = 0$

$h'(x) = 3 \cdot (-1 + \ln x) + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3 \ln x$

$h'(e) = 3 \ln e = 3$

$\Rightarrow \quad t : y = 3 \cdot (x - e)$

Winkel bestimmen



$\tan \alpha = h'(e)$

$\alpha = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6°$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Monotonieverhalten einer Funktion

$h(x) = 3x \cdot (-1 + \ln x) \qquad \text{mit } D_h = \mathbb{R}^+$

Vorzeichen der ersten Ableitung $h'(x) = 3 \cdot \ln x$ untersuchen:

$h'(x) < 0$ für $x \in]0, 1[$

$h'(x) > 0$ für $x > 1$

> Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*
>
> Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.
>
> Es gilt:
>
> $f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.
>
> $f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\Rightarrow$ $h(x)$ ist für $x \in]0; 1[$ streng monoton fallend

$\Rightarrow$ $h(x)$ ist für $x \in]1; +\infty[$ streng monoton steigend

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{3x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(-1 + \ln x)}_{\to +\infty} = +\infty$$

Wertebereich bestimmen

Wegen dem Monotonieverhalten von G_h und $h(1) = -3$, ist $W_h = [-3, +\infty[$.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0,75$ in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Grenzwert bestimmen

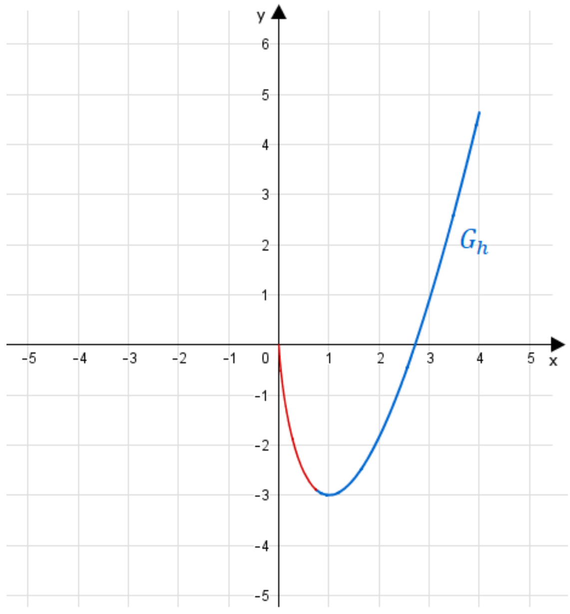
$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{3x}_{\to 0} \cdot \underbrace{(-1 + \ln x)}_{\to -\infty}$$

> Erläuterung: *Grenzwert*
>
> Aus der Merkhilfe für Mathematik:
>
> $\lim_{x \to 0} (x^r \cdot \ln x) = 0$ (für $r > 0$)

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{-3x}_{\to 0} + \underbrace{3x \ln x}_{\to 0} = 0 \qquad \text{(s. Merkehilfe Mathematik)}$$

$$\lim_{x \to 0} h'(x) = \lim_{x \to 0} 3 \ln x = -\infty$$

Skizze



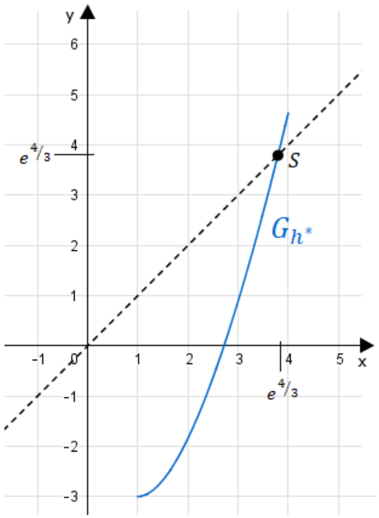
Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Die Funktion $h^* : x \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Umkehrfunktion bestimmen



$D_{h^*} = [1; +\infty[\quad \Rightarrow \quad W_{h^{*-1}} = [1; +\infty[$

$h^*(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad W_{h^*} = [-3; +\infty[\quad \Rightarrow \quad D_{h^{*-1}} = [-3; +\infty[$

Schnittpunkt zweier Funktionen

$h^*(x) = x$

$3x \cdot (-1 + \ln x) = x \qquad | : x \qquad (x \neq 0)$, da $x \in D_{h^*}$

$-3 + 3 \ln x = 1$

$\ln x = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad x_S = e^{\frac{4}{3}}$

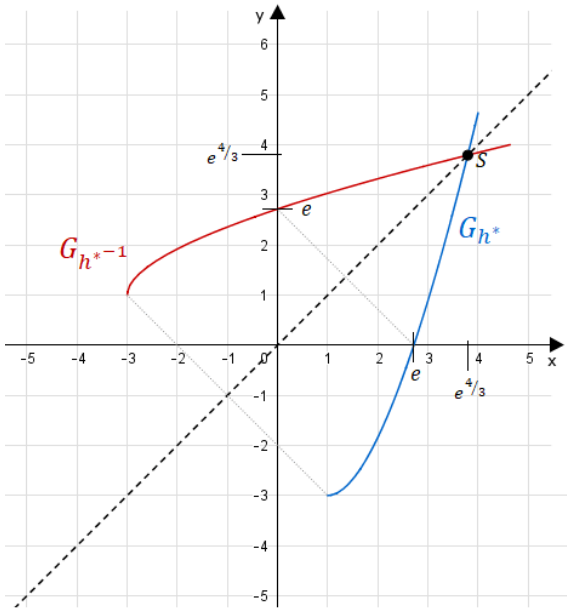
$\Rightarrow \quad S\left(e^{\frac{4}{3}} | e^{\frac{4}{3}}\right)$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Skizze

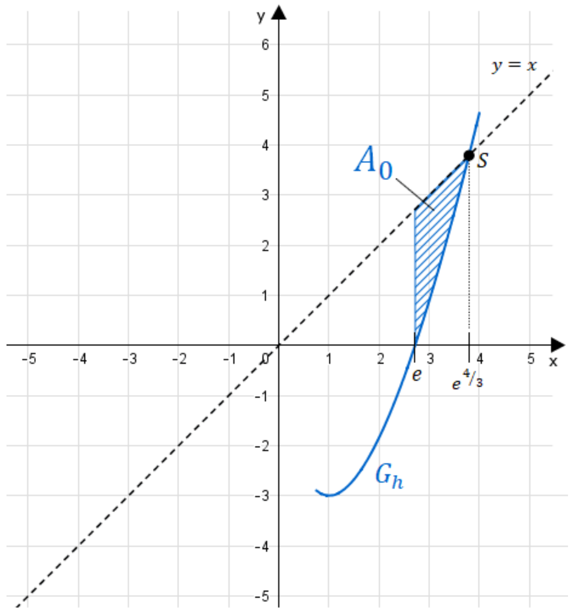


Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

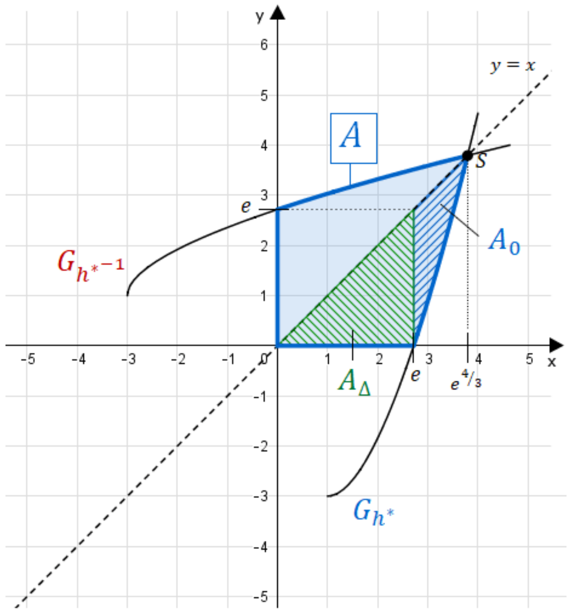
Schraffieren Sie in Abbildung 1 ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int\limits_e^{x_S} (x - h^*(x))\ dx$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



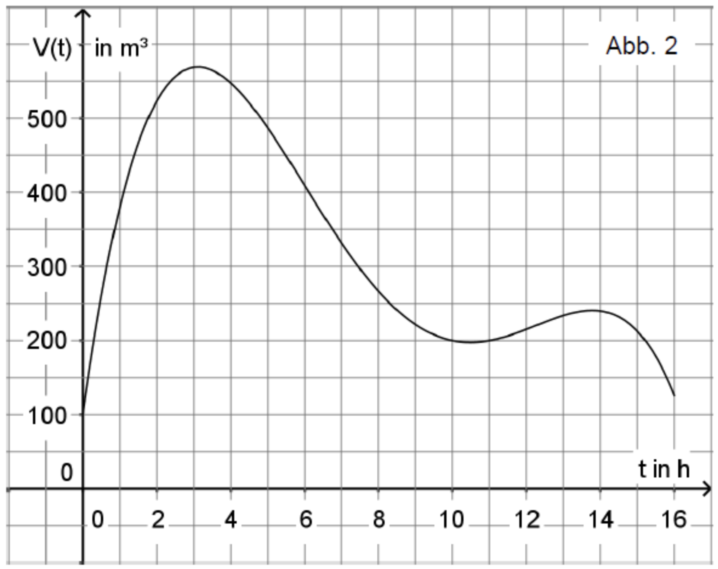
Flächenberechnung



$$A = 2 \cdot \left(A_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e \cdot e}_{A_\triangle} \right) = 2A_0 + e^2$$

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

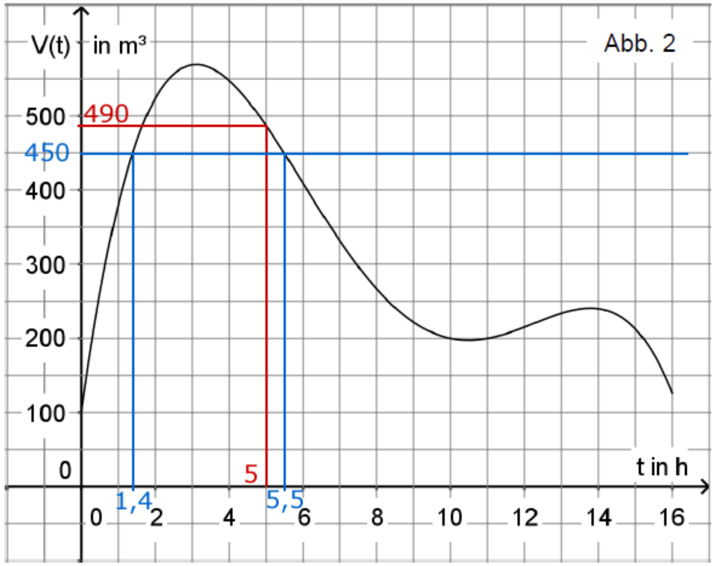
Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $[0; 16]$ definierten Funktion $V : t \mapsto V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $V(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a]

Funktionswert berechnen



$V(5) \approx 490$ m^3

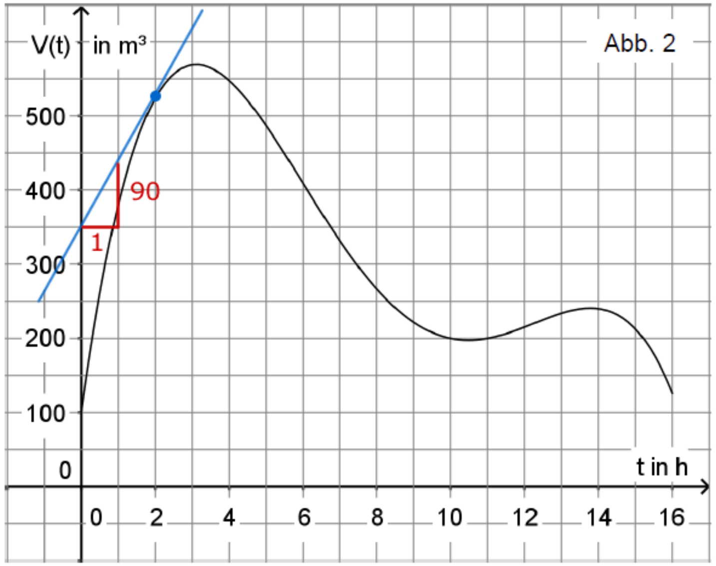
Zeitraum: von etwa 1,4 Stunden bis etwa 5,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Steigung eines Funktionsgraphen



$$V'(2) \approx \frac{90}{1} = 90\frac{m^3}{h}$$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Erläutern Sie, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0; 10]$ die Beziehung $V(t+6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheiden Sie mithilfe von Abbildung 2, ob für $t = 5$ diese Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Anwendungszusammenhang

Sechs Stunden nach dem Zeitpunkt t ist das Volumen um 350 m^3 geringer als zum Zeitpunkt t.

$V(5) \approx 490$

$V(11) \approx 200$

$V(5) - V(11) = 290 < 350$

Für $t = 5$ trifft dies nicht zu, denn zwischen $t = 5$ und $t = 11$ nimmt das Volumen um weniger als 350 m^3 ab.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \le t \le 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : t \mapsto 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in $\frac{m^3}{h}$.

Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7,5$ positiv und für $7,5 < t < 12$ negativ sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Nullstellen einer Funktion

$g(t) = 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$

$g(t) = 0$

$0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right) = 0$

$2t^3 - 39t^2 + 180t = 0$

$t \cdot (2t^2 - 39t + 180) = 0$

$\Rightarrow \quad t_1 = 0$

$2t^2 - 39t + 180 = 0$

$$t_{2,3} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 1440}}{4} = \frac{39 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{39 \pm 9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{39 + 9}{4} = 12$$

$$\Rightarrow \quad t_3 = \frac{39 - 9}{4} = 7,5$$

Einsetzen von Werten zwischen den Nullstellen:

$g(1) = 0,4 \cdot (2 - 39 + 180) = 57,2 > 0$

$\Rightarrow \quad g(t) > 0$ für $0 < t < 7,5$

$g(10) = 0,4 \cdot (2000 - 3900 + 1800) = -40 < 0$

$\Rightarrow \quad g(t) < 0$ für $7,5 < t < 12$

Teilaufgabe Teil B 2e (6 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int\limits_a^b g(t)\,\text{dt}$ für $0 \le a < b \le 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn 150 m^3 Wasser im Becken waren. Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate

Das Integral gibt die insgesamte Menge an Wasser, die zwischen den Zeitpunkten a und b ab- bzw. zugeflossen ist.

Bestimmtes Integral

$$\int_0^{7,5} g(t)\text{dt} = \int_0^{7,5} 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)\ \text{dt}$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\text{dt} = 0,4 \cdot \int_0^{7,5} \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)\ \text{dt}$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\text{dt} = 0,4 \cdot \left[\frac{1}{2}t^4 - 13t^3 + 90t^2\right]_0^{7,5}$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\mathrm{dt} = 0,4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (7,5)^4 - 13 \cdot (7,5)^3 + 90 \cdot (7,5)^2\right) - 0$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\mathrm{dt} = 464,0625$$

$150 + 464,0625 = 614,0625 \approx 614\ \mathrm{m}^3$

Die Wassermenge zu dem Zeitpunkt $t = 7,5h$ beträgt ungefähr 614 m^3

Begründung:

Bis 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn ändert sich das Volumen nur durch Zufluss, danach bis zum Ende des Beobachtungzeitraums nur durch Abfluss.