Abitur 2017 Mathematik Geometrie V

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$ liegt.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Auf der Strecke $[AB]$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

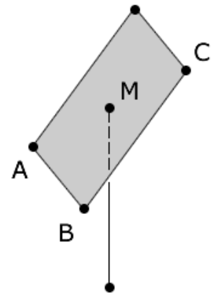
Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.
(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
(mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0,8$ m in der Realität.



Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels φ des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.
Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0,8\text{ m})^2$ berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.
Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$ liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Geradengleichung aufstellen

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$l : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung Punkt und Gerade

Für $\lambda = -\frac{1}{2}$ ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C \in l$$

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Da $\left|\overrightarrow{CB}\right| > \left|\overrightarrow{AB}\right|$, kann C nicht auf der Strecke AB liegen.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Auf der Strecke $[AB]$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Vektor bestimmen

Es gilt: $\quad 3 \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

$$3 \cdot \left(\overrightarrow{D} - \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{D}$$

$$4\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} + 3\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{D} = \frac{1}{4} \cdot \left(\overrightarrow{B} + 3\overrightarrow{A}\right)$$

$$\overrightarrow{D} = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$D(3|1|-6)$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Spurpunkte einer Ebene

$S_1(-9|0|0)$

$S_2(0|-18|0)$

Flächeninhalt eines Dreiecks

$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Vektor bestimmen

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{n_E} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 2k + k - 2 \cdot (-2k) = -18$

$9k = -18$

$k = -2$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad AB \parallel E_{x_1 x_2}$$

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.
(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Rechteck

Koordinaten von Punkten ermitteln

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$M(-2|4|3)$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
(mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene E:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A(0|0|1)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

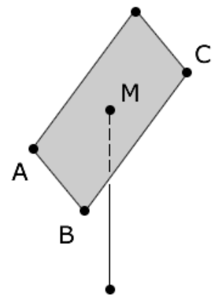
$$E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 + 0 + 5$$

$$E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$$

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche

senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0,8$ m in der Realität.



Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels φ des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Winkel zwischen zwei Ebenen

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel φ bestimmen:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 5}{\sqrt{35} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{35}}$$

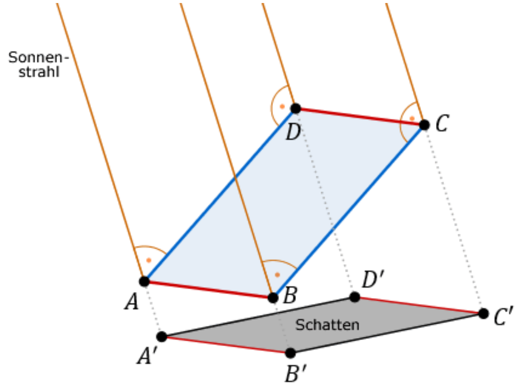
$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) \approx 32{,}31^\circ$$

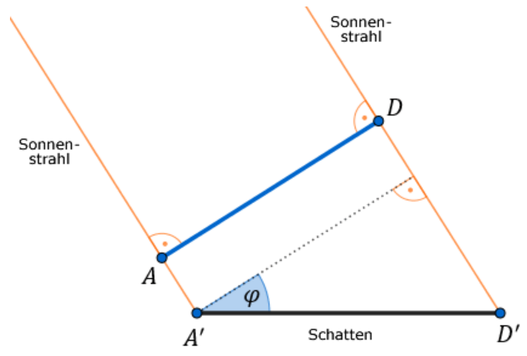
Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.
Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\ \text{m})^2$ berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Projektion





$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{A'D'}\right|} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\overrightarrow{A'D'}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi}$$

Da $\overrightarrow{AB}$ parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft, hat der Schatten von $\overrightarrow{AB}$ die gleiche Länge wie $\overrightarrow{AB}$.

Somit folgt:

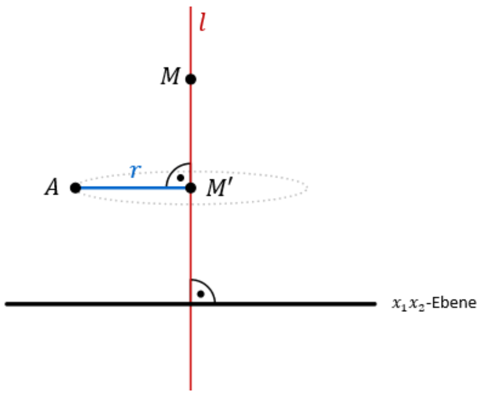
$$A_{\text{Schatten}} = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A'D'}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\ \text{m})^2$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.
Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Lage eines Punktes



Sei l die Lotgerade durch $M(-2|4|3)$ auf die $x_1\,x_2$-Ebene und M' der Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich $A(0|0|1)$ bewegt.

$M' \in l \quad \Rightarrow \quad M'\ (-2|4|x_3)$

$\overrightarrow{A\,M'} \parallel x_1\,x_2$-Ebene $\quad \Rightarrow \quad x_{3_{M'}} = x_{3_A} \quad \Rightarrow \quad M'\ (-2|4|1)$

$$\overrightarrow{A\,M'} = \overrightarrow{M'} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{A\,M'}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+0} = \sqrt{20}$$

$$r = \left|\overrightarrow{A\,M'}\right| \cdot 0,8 = \sqrt{20} \cdot 0,8 \approx 3,58 \text{ m}$$