Abitur 2017 Mathematik Geometrie V

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$ liegt.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Auf der Strecke $[AB]$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

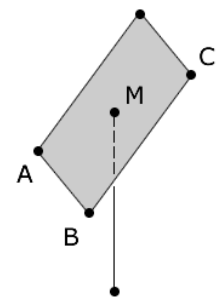
Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.
(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
(mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0,8$ m in der Realität.



Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels φ des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.
Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0,8\ \text{m})^2$ berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.
Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$ liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Geradengleichung aufstellen

Richtungsvektor der Geraden AB:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{A}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden l.

$$l: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung Punkt und Gerade

Prüfen, ob C auf der Geraden AB liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad C \in l$$

Lage des Vektors

Wegen der Konstruktion der Geraden AB, kann C nicht auf der Strecke AB liegen, da man von A aus in negativer Richtung $\left(-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$ gehen muss, um zum Punkt C zu gelangen.

Alternative Lösung

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

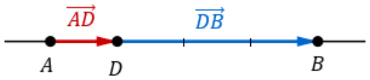
Da $\left|\overrightarrow{CB}\right| > \left|\overrightarrow{AB}\right|$, kann C nicht auf der Strecke AB liegen.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Auf der Strecke $[AB]$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Vektor bestimmen



Es gilt: $3 \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

$$3 \cdot \left(\overrightarrow{D} - \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{D}$$

$$3\overrightarrow{D} - 3\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{D}$$

$$4\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} + 3\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{D} = \frac{1}{4} \cdot \left(\overrightarrow{B} + 3\overrightarrow{A}\right)$$

$$\overrightarrow{D} = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$D(3|1|-6)$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Spurpunkte einer Ebene

$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

x_1-Koordinatenachse: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_2-Koordinatenachse: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Spurpunkte einer Ebene*

Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Spurpunkte.
Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Koordinatenachse in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebene ein, löst nach dem Parameter λ auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

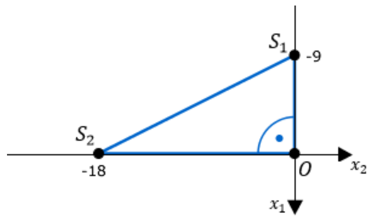
Spurpunkt S_1 mit der x_1-Koordinatenachse:

$$2\lambda + 0 + 0 = -18 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -9 \quad \Rightarrow \quad S_1(-9|0|0)$$

Spurpunkt S_2 mit der x_2-Koordinatenachse:

$$0 + \lambda + 0 = -18 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -18 \quad \Rightarrow \quad S_2(0|-18|0)$$

Flächeninhalt eines Dreiecks



$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Vektor bestimmen

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenvektor*

Ein Vektor der ein vielfaches von einem Normalenvektor einer Ebene ist, ist auch Normalenvektor der Ebene.

$$\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{n_E} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Wenn der Vektor $\overrightarrow{v}$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist, dann erfüllen seine Koordinaten auch die Ebenengleichung.

$2 \cdot 2k + k - 2 \cdot (-2k) = -18$

$9k = -18$

$k = -2$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung Gerade und Ebene

Richtungsvektor der Geraden AB:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{A}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die x_3-Koordinate von A nicht null ist, liegt die Gerade nicht in der x_1x_2-Ebene.

Da weiterhin die x_3-Koordinate des Richtungsvektors $\overrightarrow{AB}$ null ist, ist die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene.

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.
(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Parallelogramm

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Rechteck

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Rechteck

Koordinaten von Punkten ermitteln

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$M(-2|4|3)$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
(mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene E:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A(0|0|1)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 0 \\ 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - (-6) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{8}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E : \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

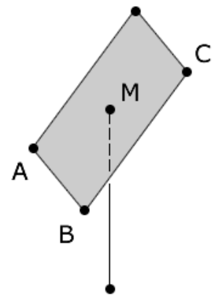
$E : 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 + 0 + 5$

$E : 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch

den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der $x_1 x_2$-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0,8$ m in der Realität.



Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels φ des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen $30°$ und $36°$ liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

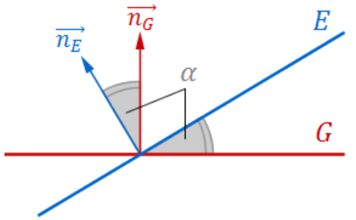
Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Winkel zwischen zwei Ebenen

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E: $\quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der $x_1\,x_2$-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1\,x_2$-Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{35}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) \approx 32,31^\circ$$

Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.
Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0,8\text{ m})^2$ berechnet werden kann.

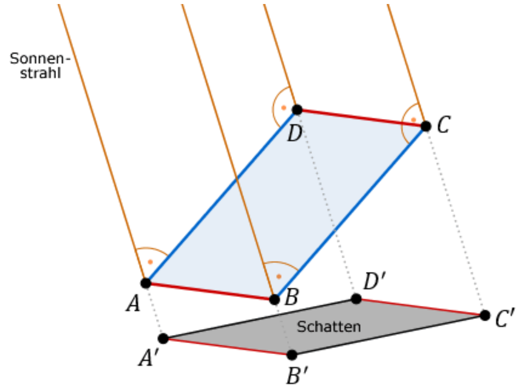
Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Projektion

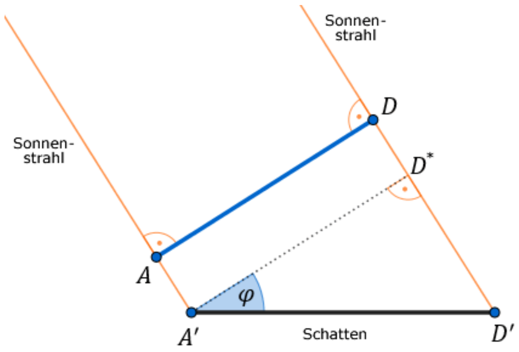
Skizze:

Erläuterung:

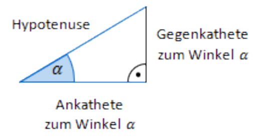
3D Ansicht:



Die Sonnenstrahlen verlaufen senkrecht zur Ebene E, also auch auf das Solarmodul.



Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Hier wird das rechtwinklige Dreieck $D'\,D^*\,A'$ betrachtet.
Die Seite $\left[A'\,D^*\right]$ entspricht der Seite $[A\,D]$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{A\,D}\right|}{\left|\overrightarrow{A'\,D'}\right|} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{A'\,D'}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{A\,D}\right|}{\cos\varphi}$$

Da $\overrightarrow{A\,B}$ parallel zur $x_1\,x_2$-Ebene verläuft, hat der Schatten von $\overrightarrow{A\,B}$ die gleiche Länge wie $\overrightarrow{A\,B}$.

Somit folgt:

Erläuterung: *Flächeneinheit*

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 0,8 m.
Da es sich hier um einen Flächeninhalt handelt, muss die Einheit im Quadrat verwendet werden.

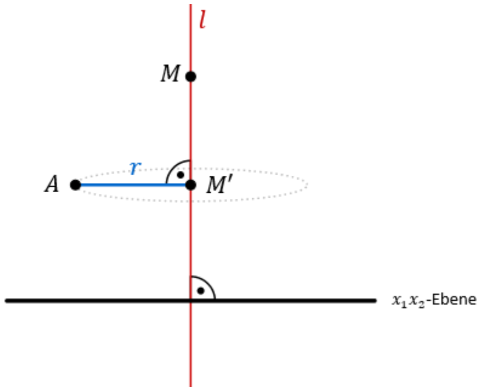
$$A_{\text{Schatten}} = \left|\overrightarrow{A'\,B'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A'\,D'}\right| \cdot (0,8\ \text{m})^2 = \left|\overrightarrow{A\,B}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{A\,D}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0,8\ \text{m})^2$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.
Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Lage eines Punktes



Sei l die Lotgerade durch $M(-2|4|3)$ auf die $x_1\,x_2$-Ebene und M' der Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich $A(0|0|1)$ bewegt.

> Erläuterung: *Lage des Punktes*
>
> Da M' auf der Lotgeraden liegt, hat er die gleichen x_1- u. x_2-Koordinaten wie der Punkt M.

$M' \in l \quad \Rightarrow \quad M'\ (-2|4|x_3)$

> Erläuterung: *Lage des Punktes*
>
> Die Strecke $[A\,M']$ ist parallel zur $x_1\,x_2$-Ebene. Daraus folgt, dass die x_3-Koordinaten von M' und A gleich sind.

$\overrightarrow{A\,M'} \parallel x_1\,x_2\text{-Ebene} \quad \Rightarrow \quad x_{3_{M'}} = x_{3_A} \quad \Rightarrow \quad M'\ (-2|4|1)$

$$\overrightarrow{A\,M'} = \overrightarrow{M'} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{A\,M'}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20}$$

> Erläuterung: *Längeneinheit*
>
> Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 0,8 m.

$r = \left|\overrightarrow{A\,M'}\right| \cdot 0,8\ \text{m} = \sqrt{20} \cdot 0,8\ \text{m} \approx 3,58\ \text{m}$