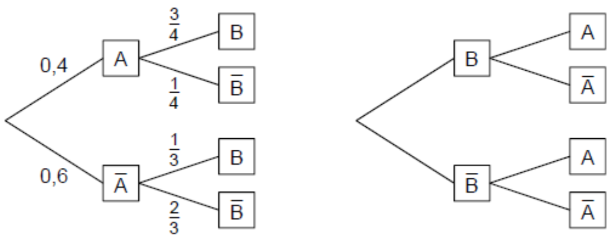
Abitur 2016 Mathematik Stochastik III

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Die beiden Baumdiagramme gehören zum selben Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und ergänzen Sie anschließend an allen Ästen des rechten Baumdiagramms die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



(Teilergebnis: $P(B) = 0,5$)

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{\mathrm{ZZ}; \mathrm{WW}; \mathrm{ZWZ}; \mathrm{ZWW}; \mathrm{WZZ}; \mathrm{WZW}\}$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Ein Getränkehersteller führt eine Werbeaktion durch, um die Verkaufszahlen seiner Saftschorlen zu erhöhen. Bei 100000 der für die Werbeaktion produzierten zwei Millionen Flaschen wird auf der Innenseite des Verschlusses eine Marke für einen Geldgewinn angebracht. Von den Gewinnmarken sind 12000 jeweils 5 € wert, der Rest ist jeweils 1 € wert. Alle Flaschen der Werbeaktion werden zufällig auf Kästen verteilt. Im Folgenden werden nur Flaschen aus der Werbeaktion betrachtet.

Es wird eine Flasche geöffnet. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

A: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke.“

B: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke im Wert von 1 €.“

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Es werden mehrere Flaschen geöffnet und für jede dieser Flaschen wird festgestellt, ob das Ereignis A eintritt. Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment näherungsweise durch eine Bernoullikette beschrieben werden kann.

Im Folgenden gilt beim Öffnen einer Flasche stets $P(A) = 0,05$ und $P(B) = 0,044$.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Es werden nacheinander zehn Flaschen geöffnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich erstmals in der fünften Flasche eine Gewinnmarke befindet.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks, wie viele Flaschen man mindestens öffnen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5% mindestens zwei Gewinnmarken zu finden.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Berechnen Sie den Gesamtwert der Gewinnmarken, die Kunden beim Öffnen der 20 Flaschen eines Kastens im Mittel in den Verschlüssen finden.

Nachdem die zwei Millionen Flaschen verkauft sind, wird die Werbeaktion fortgesetzt. Der Getränkehersteller verspricht, dass weiterhin jede 20. Flasche eine Gewinnmarke enthält. Aufgrund von Kundenäußerungen vermutet der Filialleiter eines Getränkemarkts jedoch, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit einer Gewinnmarke im Verschluss nun geringer als 0,05 ist, und beschwert sich beim Getränkehersteller.

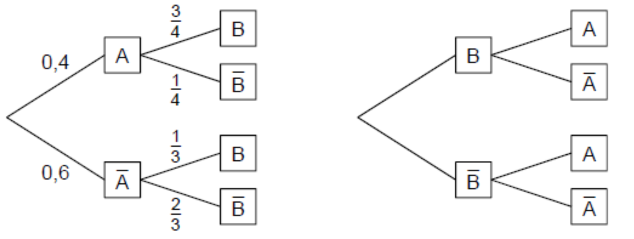
Teilaufgabe Teil B 2 (7 BE)

Der Getränkehersteller bietet ihm an, anhand von 200 zufällig ausgewählten Flaschen einen Signifikanztest für die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Flasche eine Gewinnmarke zu finden, beträgt mindestens $0,05$." auf einem Signifikanzniveau von 1% durchzuführen. Für den Fall, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, verspricht der Getränkehersteller, seine Abfüllanlage zu überprüfen und die Kosten für eine Sonderwerbeaktion des Getränkemarkts zu übernehmen.
Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese und bestimmen Sie anschließend unter der Annahme, dass im Mittel nur 3% der Saftschorle-Flaschen eine Gewinnmarke enthalten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Die beiden Baumdiagramme gehören zum selben Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und ergänzen Sie anschließend an allen Ästen des rechten Baumdiagramms die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



(Teilergebnis: $P(B) = 0,5$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Wahrscheinlichkeit

Linken Baumdiagramm vervollständigen und $P(B)$ bestimmen:

Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

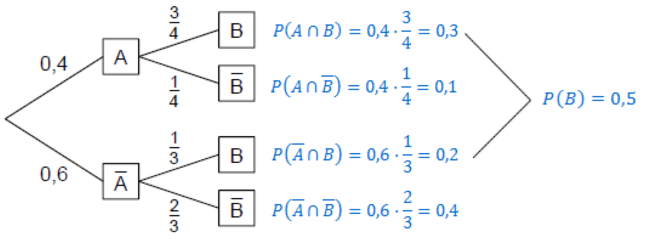
Zum Beispiel:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,4 \cdot \frac{3}{4} = 0,3$

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$

$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,3 + 0,2 = 0,5$



Erläuterung: *Gegenereignis*

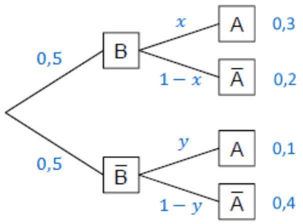
Für die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses $\overline{E}$ gilt: $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)$

$P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$

Rechten Baumdiagramm ergänzen:

Erläuterung: *Schnittwahrscheinlichkeit*

Die Schnittwahrscheinlichkeiten können vom linken Baudiagramm übernommen werden, da z. B. $P(A \cap B) = P(B \cap A)$.



Erläuterung: *1. Pfadregel*

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Zum Beispiel:

$P(B \cap A) = P(B) \cdot P_B(A) = 0,5 \cdot x = 0,3$

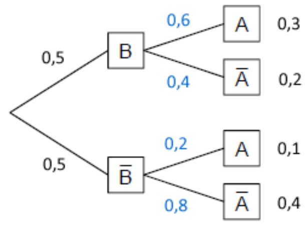
$P(B \cap A) = P(B) \cdot P_B(A)$

$0,3 = 0,5 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0,3}{0,5} = 0,6 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0,4$

$P\left(\overline{B} \cap A\right) = P\left(\overline{B}\right) \cdot P_{\overline{B}}(A)$

$0,1 = 0,5 \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0,1}{0,5} = 0,2 \quad \Rightarrow \quad 1 - y = 0,8$

Rechten Baumdiagramm vervollständigen:



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{\text{ZZ}; \text{WW}; \text{ZWZ}; \text{ZWW}; \text{WZZ}; \text{WZW}\}$.

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{ZZ}) = P(Z) \cdot P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{ZWZ}) = P(Z) \cdot P(W) \cdot P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad P(\text{ZZ}) \neq P(\text{ZWZ})$$

Das Experiment ist kein Laplace-Experiment, da nicht alle Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle erstellen:

Erläuterung:

Die Anzahl der benötigten Münzwürfe kann entweder 2 oder 3 sein.

Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis mit zwei Würfe:
$$P(\text{ZZ}) = P(Z) \cdot P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis mit drei Würfe:
$$P(\text{WWW}) = P(W) \cdot P(W) \cdot P(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Daraus folgt:

Wahrscheinlichkeit für 2 Würfe: $\quad P(X = 2) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Wahrscheinlichkeit für 3 Würfe: $\quad P(X = 3) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

x_i (Anzahl Würfe)	2	3
Anzahl Ereignisse	2 (ZZ, WW)	4 (ZWZ, ZWW, WZZ, WZW)
$P(X = x_i)$	$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	$4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Erwartungswert $E(X)$ bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Ein Getränkehersteller führt eine Werbeaktion durch, um die Verkaufszahlen seiner Saftschorlen zu erhöhen. Bei 100000 der für die Werbeaktion produzierten zwei Millionen Flaschen wird auf der Innenseite des Verschlusses eine Marke für einen Geldgewinn angebracht. Von den Gewinnmarken sind 12000 jeweils 5 € wert, der Rest ist jeweils 1 € wert. Alle Flaschen der Werbeaktion werden zufällig auf Kästen verteilt. Im Folgenden werden nur Flaschen aus der Werbeaktion betrachtet.

Es wird eine Flasche geöffnet. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

A: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke.“

B: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke im Wert von 1 €.“

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Wahrscheinlichkeit

Flaschen insgesamt: 2.000.000

Flaschen mit Marke: 100.000

Flaschen mit 5 € Marke: 12.000

Falschen mit 1 € Marke: $100.000 - 12.000 = 88.000$

$$P(A) = \frac{100.000}{2.000.000} = 0,05$$

$$P(B) = \frac{88.000}{2.000.000} = 0,044$$

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Es werden mehrere Flaschen geöffnet und für jede dieser Flaschen wird festgestellt, ob das Ereignis A eintritt. Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment näherungsweise durch eine Bernoullikette beschrieben werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Binomialverteilung

1. Es gibt nur zwei Ausgänge: Treffer (Ereignis A tritt ein, d.h. Flasche hat Marke) und Niete (Flasche hat keine Marke).

2. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bleibt wegen der großen Anzahl der Flaschen annähernd gleich, somit beeinflussen sich die Versuche nicht gegenseitig.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Im Folgenden gilt beim Öffnen einer Flasche stets $P(A) = 0,05$ und $P(B) = 0,044$.

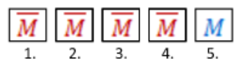
Es werden nacheinander zehn Flaschen geöffnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich erstmals in der fünften Flasche eine Gewinnmarke befindet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Binomialverteilung

E: „Marke erst an fünfter Stelle“

$p = P(A) = 0,05$ (Treffer)
$q = 1 - p = 0,95$ (Niete)



$P(E) = 0,95^4 \cdot 0,05 \approx 4,1\%$

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks, wie viele Flaschen man mindestens öffnen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5% mindestens zwei Gewinnmarken zu finden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Binomialverteilung

$p = P(\text{„Gewinnmarke"}) = 0,05$

„wie viele Flaschen muss man öffnen“ $\Rightarrow$ n ist gesucht

“ **mindestens** zwei“ $\Rightarrow$ $X \geq 2$

„mit einer Wahrscheinlichkeit von **mehr** als 5 %“ $\Rightarrow$ $P > 0,05$

> Erläuterung: *Bernoulli-Kette*
>
> Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,05$ angesehen werden.

$P_{0,05}^{n}(X \geq 2) > 0,05$

> Erläuterung: *Gegenereignis*
>
> Betrachtung des Gegenereignisses:
>
> $P(\text{„mindestens k Treffer"}) = 1 - P(\text{„weniger als k Treffer"})$
>
> In mathematischen Zeichen:
>
> $P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$ bzw. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$1 - P_{0,05}^{n}(X \leq 1) > 0,05$

> Erläuterung: *Rechenweg*
>
> $1 - P_{0,05}^{n}(X \leq 1) > 0,05 \qquad | -1$
>
> $-P_{0,05}^{n}(X \leq 1) > -0,95 \qquad | \cdot(-1)$
>
> (da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)
>
> $P_{0,05}^{n}(X \leq 1) < 0,95$

$P_{0,05}^{n}(X \leq 1) < 0,95$

$\Rightarrow \quad n \geq 8$ (Tafelwerk)

Es müssen mindestens 8 Flaschen geöffnet werden.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Berechnen Sie den Gesamtwert der Gewinnmarken, die Kunden beim Öffnen der 20 Flaschen eines Kastens im Mittel in den Verschlüssen finden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$P(A) = 0,05$ (Flasche enthält Gewinnmarke)

$P(B) = 0,044$ (Flasche enthält 1 € Gewinnmarke)

$P(\text{„Flasche enthält 5 € Gewinnmarke"}) = P(A) - P(B) = 0,05 - 0,044 = 0,006$

Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle:

y_i in €	1	5	0
$P(Y = y_i)$	0,044	0,006	0,95

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n$$

$E(Y) = 1 \cdot 0,044 + 5 \cdot 0,006 + 0 \cdot 0,95 = 0,074$ €

$20 \cdot 0,074 = 1,48$ €

Ein Kunde erhält beim Öffnen von 20 Flaschen im Schnitt 1,48 €.

Teilaufgabe Teil B 2 (7 BE)

Nachdem die zwei Millionen Flaschen verkauft sind, wird die Werbeaktion fortgesetzt. Der Getränkehersteller verspricht, dass weiterhin jede 20. Flasche eine Gewinnmarke enthält. Aufgrund von Kundenäußerungen vermutet der Filialleiter eines Getränkemarkts jedoch, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit einer Gewinnmarke im Verschluss nun geringer als 0,05 ist, und beschwert sich beim Getränkehersteller.

Der Getränkehersteller bietet ihm an, anhand von 200 zufällig ausgewählten Flaschen einen Signifikanztest für die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Flasche eine Gewinnmarke zu finden, beträgt mindestens $0,05$.“ auf einem Signifikanzniveau von 1% durchzuführen. Für den Fall, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, verspricht der Getränkehersteller, seine Abfüllanlage zu überprüfen und die Kosten für eine Sonderwerbeaktion des Getränkemarkts zu übernehmen.
Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese und bestimmen Sie anschließend unter der Annahme, dass im Mittel nur 3% der Saftschorle-Flaschen eine Gewinnmarke enthalten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2

Hypothesentest - Annahmebereich und Ablehnungsbereich

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p \geq 0,05$

Stichprobenumfang: $n = 200$

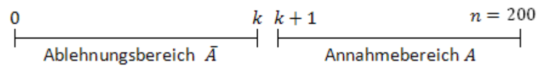
Signifikanzniveau: $\alpha = 1\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 200]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Da hier die Nullhypothese “ $p \geq 0,05$“ bzw. “ **mindestens** $0,05$“ lautet, liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,05}^{200}(Z \leq k) \leq 0,01$

$P_{0,05}^{200}(Z \leq k) \leq 0,01$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 3$

$\Rightarrow$ Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0; 1; 2; 3\}$

Wahrscheinlichkeit

Annahme: $p = 3\% = 0,03$

Erläuterung:

„Ermitteln Sie (...) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.“

Liegt das Ergebnis des Tests im Annahmebereich, gibt es keine kostenlose Sonderwerbeaktion $\quad \Rightarrow \quad X \geq 4$

Gesucht: $\quad P_{0,03}^{200}(X \geq 4)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(\text{„mindestens k Treffer“}) = 1 - P(\text{„weniger als k Treffer“})$

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) \quad$ bzw. $\quad P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$$P_{0,03}^{200}(X \geq 4) = 1 - P_{0,03}^{200}(X \leq 3) \overset{\text{Tafelwerk}}{=} 1 - 0,14715 = 0,85285 \approx 85,3\%$$