

## Abitur 2016 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  mit maximalem Definitionsbereich  $D$ .

### Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Geben Sie  $D$  sowie die Nullstelle von  $f$  an und bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

### Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die  $x$ -Koordinate des Punkts, in dem der Graph von  $f$  eine waagrechte Tangente hat.

Geben Sie jeweils den Term und den Definitionsbereich einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

### Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Der Punkt  $(2|0)$  ist ein Wendepunkt des Graphen von  $g$ .

### Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Der Graph der Funktion  $h$  ist streng monoton fallend und rechtsgekrümmt.

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$ .

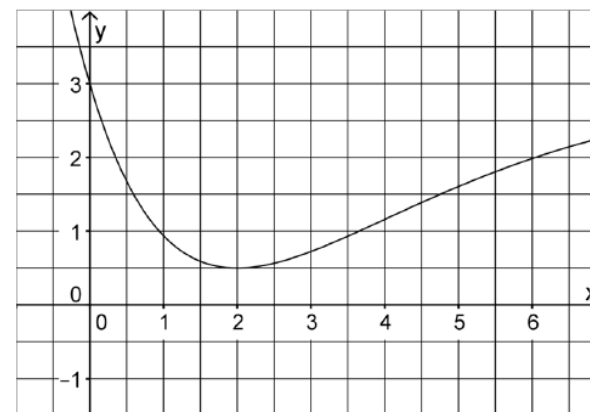


Abb. 1

### Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung 1 einen Näherungswert für  $\int_3^5 f(x) dx$ .

Die Funktion  $F$  ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Stammfunktion von  $f$  mit  $F(3) = 0$ .

### Teilaufgabe Teil A 3b (1 BE)

Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von  $F$  an der Stelle  $x = 2$  an.

### Teilaufgabe Teil A 3c (2 BE)

Zeigen Sie, dass  $F(b) = \int_3^b f(x) dx$  mit  $b \in \mathbb{R}$  gilt.

**Teilaufgabe Teil A 4** (4 BE)

Abbildung 2 zeigt den Graphen  $G_k$  einer in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $k$ . Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion  $k'$ . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für die Steigung des Graphen  $G_k$  an dessen Wendepunkt  $(0 | -3)$  sowie die Nullstelle von  $k'$ .

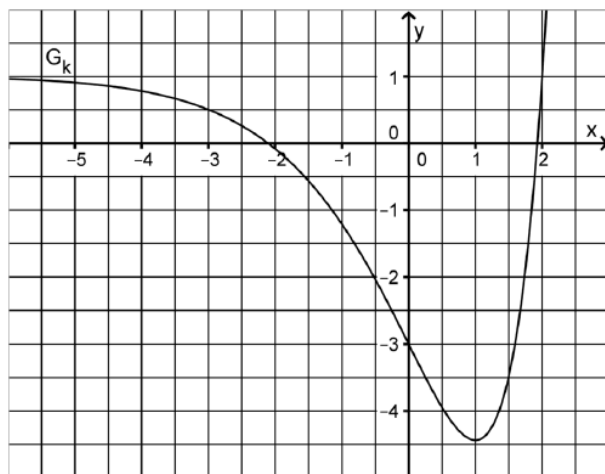
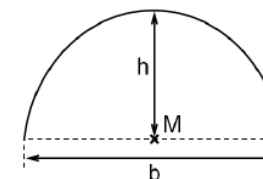


Abb. 2

Im Rahmen eines W-Seminars modellieren Schülerinnen und Schüler einen Tunnelquerschnitt, der senkrecht zum Tunnelverlauf liegt. Dazu beschreiben sie den Querschnitt der Tunnelwand durch den Graphen einer Funktion in einem Koordinatensystem. Der Querschnitt des Tunnelbodens liegt dabei auf der x-Achse, sein Mittelpunkt  $M$  im Ursprung des Koordinatensystems; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Für den Tunnelquerschnitt sollen folgende Bedingungen gelten:

- I Breite des Tunnelbodens:  $b = 10$  m
- II Höhe des Tunnels an der höchsten Stelle:  $h = 5$  m
- III Der Tunnel ist auf einer Breite von mindestens 6 m mindestens 4 m hoch.



Eine erste Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet die Funktion  $p : x \mapsto -0,2x^2 + 5$  mit Definitionsbereich  $D_p = [-5;5]$ .

**Teilaufgabe Teil B 1a** (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Bedingungen I und II in diesem Modell erfüllt sind.  
Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, unter dem bei dieser Modellierung die linke Tunnelwand auf den Tunnelboden trifft.

Schülerinnen und Schüler untersuchen nun den Abstand  $d(x)$  der Graphenpunkte  $P_x$  ( $x|p(x)$ ) vom Ursprung des Koordinatensystems.

**Teilaufgabe Teil B 1b** (3 BE)

Zeigen Sie, dass  $d(x) = \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}$  gilt.

**Teilaufgabe Teil B 1c** (5 BE)

Es gibt Punkte des Querschnitts der Tunnelwand, deren Abstand zu  $M$  minimal ist. Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte  $P_x$ , für die  $d(x)$  minimal ist, und geben Sie davon ausgehend diesen minimalen Abstand an.

Eine zweite Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet eine Kosinusfunktion vom Typ  $k : x \mapsto 5 \cdot \cos(c \cdot x)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und Definitionsbereich  $D_k = [-5; 5]$ , bei der offensichtlich Bedingung II erfüllt ist.

#### Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Bestimmen Sie  $c$  so, dass auch Bedingung I erfüllt ist, und berechnen Sie damit den Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels.

(zur Kontrolle:  $c = \frac{\pi}{10}$ , Inhalt der Querschnittsfläche:  $\frac{100}{\pi} \text{ m}^2$ )

#### Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Zeigen Sie, dass Bedingung III weder bei einer Modellierung mit  $p$  aus Aufgabe 1 noch bei einer Modellierung mit  $k$  erfüllt ist.

Eine dritte Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand, bei der ebenfalls die Bedingungen I und II erfüllt sind, verwendet die Funktion  $f : x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$  mit Definitionsbereich  $D_f = [-5; 5]$ .

#### Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Begründen Sie, dass in diesem Modell jeder Punkt des Querschnitts der Tunnelwand von der Bodenmitte  $M$  den Abstand 5 m hat.

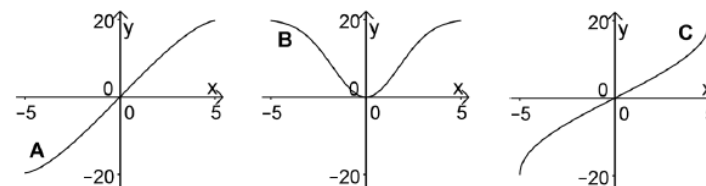
Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf spätere Aufgaben:  $-5 \leq x \leq 9$ ,  $-1 \leq y \leq 13$ ) und begründen Sie, dass bei dieser Modellierung auch Bedingung III erfüllt ist.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  mit Definitionsbereich  $D_F = [-5; 5]$ .

#### Teilaufgabe Teil B 3b (5 BE)

Zeigen Sie mithilfe einer geometrischen Überlegung, dass  $F(5) = \frac{25}{4}\pi$  gilt.

Einer der Graphen A, B und C ist der Graph von  $F$ . Entscheiden Sie, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht infrage kommen.



#### Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels bei einer Modellierung mit  $f$  von dem in Aufgabe 2a berechneten Wert abweicht.

Der Tunnel soll durch einen Berg führen. Im betrachteten Querschnitt wird das Profil des Berghangs über dem Tunnel durch eine Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = -\frac{4}{3}x + 12$  modelliert.

#### Teilaufgabe Teil B 3d (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $R(4|f(4))$  parallel zu  $g$  verläuft. Zeichnen Sie  $g$  und  $t$  in das Koordinatensystem aus Aufgabe 3a ein.

#### Teilaufgabe Teil B 3e (3 BE)

Der Punkt  $R$  aus Aufgabe 3d entspricht demjenigen Punkt der Tunnelwand, der im betrachteten Querschnitt vom Hangprofil den kleinsten Abstand  $e$  in Metern hat. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte eines Verfahrens zur rechnerischen Ermittlung von  $e$ .

## Lösung

## Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  mit maximalem Definitionsbereich  $D$ .

Geben Sie  $D$  sowie die Nullstelle von  $f$  an und bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a**Definitionsbereich bestimmen**

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow D = ]0; \infty[$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion  $\ln x$  ist nur für positive  $x$ -Werte definiert.

Ihr Definitionsbereich ist  $D = \mathbb{R}^+ = ]0; +\infty[$ .

**Nullstellen einer Funktion**

Nullstellen bestimmen:  $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion  $f$  mit der  $x$ -Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach  $x$  aufgelöst werden.

$$0 = \frac{\ln x}{x^2}$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke)

$$0 = \ln x \quad | e^x$$

$$x^N = 1$$

**Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs**

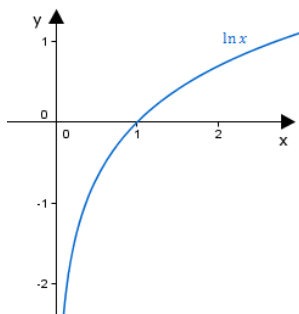
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

Oder auch:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln x}{1} = -\infty$$

Erläuterung: *Wertebereich der Logarithmusfunktion*

Graph der ln-Funktion:



Am Graphen der ln-Funktion lassen sich die Grenzwerte ablesen.

#### Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die  $x$ -Koordinate des Punkts, in dem der Graph von  $f$  eine waagerechte Tangente hat.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

##### **Waagerechte Tangenten**

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist  $u(x) = \ln x$  und  $v(x) = x^2$ .

Dann ist  $u'(x) = \frac{1}{x}$  und  $v'(x) = 2x$ .

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

Erläuterung: *Waagerechte Tangente*

Die Steigung einer waagerechten Tangente ist gleich Null.

Erste Ableitung gleich Null setzen:  $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$$0 = x - 2x \cdot \ln x$$

$$0 = x \cdot (1 - 2 \ln x)$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme  $a$  und  $b$  ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \iff \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

Der Fall  $x = 0$  muss hier ausgeschlossen werden, da 0 nicht im Definitionsbereich  $D_f$  liegt.

$$0 = 1 - 2 \ln x$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \quad |e^{(\cdot)}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}}$$

#### Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Geben Sie jeweils den Term und den Definitionsbereich einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

Der Punkt  $(2|0)$  ist ein Wendepunkt des Graphen von  $g$ .

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

##### **Funktionsgleichung ermitteln**

$$g(x) = (x - 2)^3, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Vorwissen:

Der Graph von  $x^3$  hat ein Wendepunkt an der Stelle  $x = 0$ .

Verschiebt man den Graphen von  $x^3$  entlang der x-Achse um 2 nach rechts, so hat dieser an der Stelle  $x = 2$  ein Wendepunkt.

#### Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Der Graph der Funktion  $h$  ist streng monoton fallend und rechtsgekrümmt.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

##### **Funktionsgleichung ermitteln**

Zum Beispiel:

$$h(x) = -e^x, \quad D_h = \mathbb{R}$$

##### **Alternative Lösung**

Weitere Funktion:

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion, Krümmungsverhalten einer Funktion*

Überlegung:

Jede nach unten geöffnete Parabel ist ab dem Scheitelpunkt streng monoton fallend und rechtsgekrümmt.

Damit die Funktion im ganzen Definitionsbereich diese Eigenschaften hat, muss der Definitionsbereich der Parabel eingegrenzt werden.

$$h(x) = -x^2, \quad D_h = [0, \infty[$$

#### Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$ .

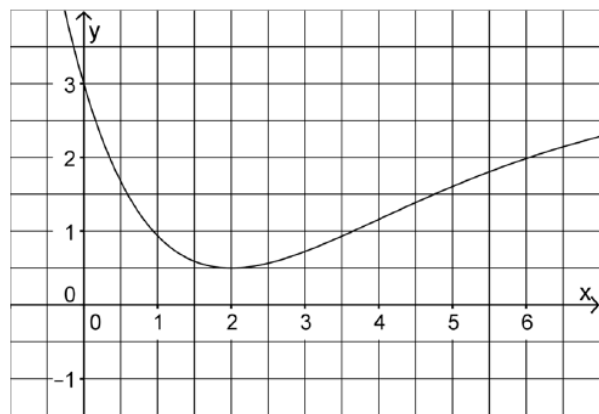
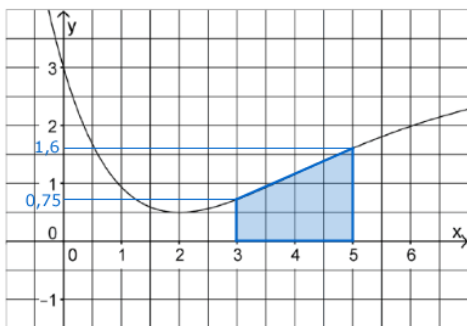


Abb. 1

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung 1 einen Näherungswert für  $\int_3^5 f(x) dx$ .

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

##### *Abschätzen eines Integrals durch Flächen*



$$\int_3^5 f(x) dx \approx A_{\text{Trapez}} = \frac{(0,75 + 1,6)}{2} \cdot 2 = 2,35$$

#### Teilaufgabe Teil A 3b (1 BE)

Die Funktion  $F$  ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Stammfunktion von  $f$  mit  $F(3) = 0$ .

Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von  $F$  an der Stelle  $x = 2$  an.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

##### *Anwendungsaufgabe*

$F' = f$ , da  $F$  Stammfunktion von  $f$ .

$$F'(2) = f(2) \approx 0,5$$

#### Teilaufgabe Teil A 3c (2 BE)

Zeigen Sie, dass  $F(b) = \int_3^b f(x) dx$  mit  $b \in \mathbb{R}$  gilt.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3c

##### *Eigenschaften der Integralfunktion*

$$F(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) = \int_3^b f(x) dx$$

#### Teilaufgabe Teil A 4 (4 BE)

Abbildung 2 zeigt den Graphen  $G_k$  einer in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $k$ . Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion  $k'$ . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für die Steigung des Graphen  $G_k$  an dessen Wendepunkt  $(0 | -3)$  sowie die Nullstelle von  $k'$ .

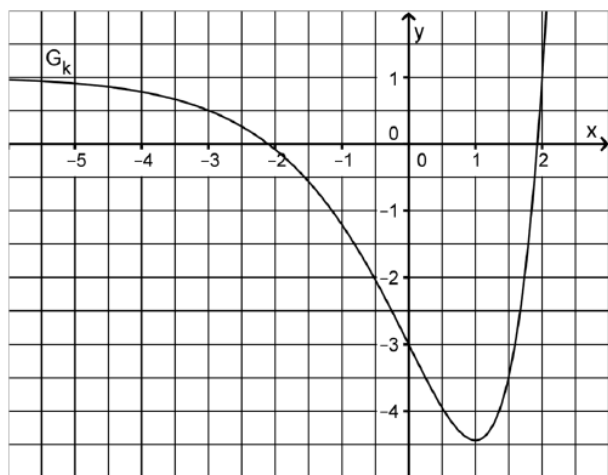


Abb. 2

### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4

#### Graph der Ableitungsfunktion

$$k'(0) \approx -2$$

#### Erläuterung: Tangentensteigung

Die Steigung  $m$  der Tangente  $t$  an dem Graphen  $G_f$  einer Funktion  $f(x)$  in einem Punkt  $S(x_S|y_S)$  ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle  $x_S$ .

$$m = f'(x_S)$$

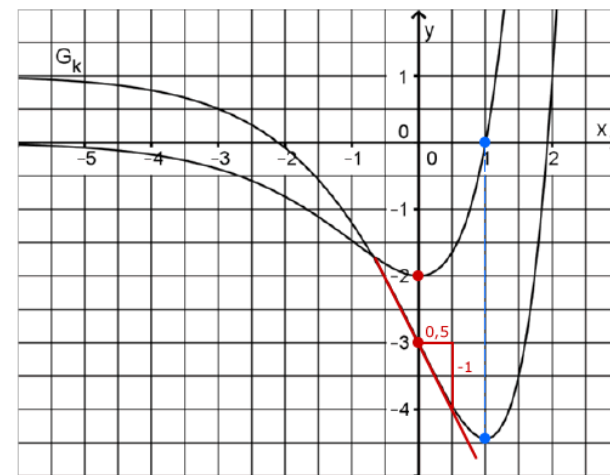
In diesem Fall ist  $x_S = 0$ . Man legt dort eine Tangente an und liest am Steigungsdreieck den Wert der Steigung ab:

$$k'(0) \approx \frac{-1}{0,5} = -2$$

$$k'(1) = 0$$

#### Erläuterung:

Der Graph der ersten Ableitung hat genau dort Nullstellen, wo der Graph der Funktion Extrempunkte hat.





Erläuterung:

Zusammenhang zwischen Stammfunktion  $F$  und Ausgangsfunktion  $f$ :

wo $f$ ...	ist $F$ ...
<b>oberhalb</b> der $x$ -Achse verläuft	streng monoton <b>steigend</b>
<b>unterhalb</b> der $x$ -Achse verläuft	streng monoton <b>fallend</b>
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

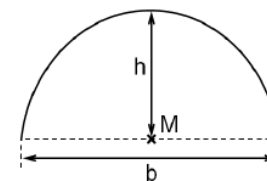
Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

$f$ besitzt	$F$ besitzt
eine Nullstelle mit <b>VZW +/-</b>	Maximum / <b>Hochpunkt</b>
eine Nullstelle mit <b>VZW -/+</b>	Minimum / <b>Tiefpunkt</b>
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

In diesem Fall ist  $k$  die Stammfunktion, und  $k'$  die Ausgangsfunktion**Teilaufgabe Teil B 1a** (6 BE)

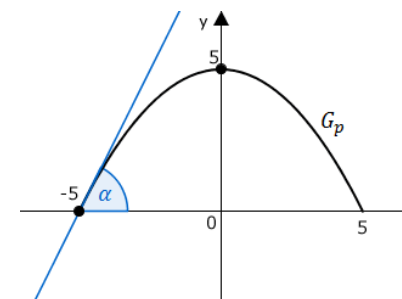
Im Rahmen eines W-Seminars modellieren Schülerinnen und Schüler einen Tunnelquerschnitt, der senkrecht zum Tunnelverlauf liegt. Dazu beschreiben sie den Querschnitt der Tunnelwand durch den Graphen einer Funktion in einem Koordinatensystem. Der Querschnitt des Tunnelbodens liegt dabei auf der  $x$ -Achse, sein Mittelpunkt  $M$  im Ursprung des Koordinatensystems; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Für den Tunnelquerschnitt sollen folgende Bedingungen gelten:

- I** Breite des Tunnelbodens:  $b = 10$  m
- II** Höhe des Tunnels an der höchsten Stelle:  $h = 5$  m
- III** Der Tunnel ist auf einer Breite von mindestens 6 m mindestens 4 m hoch.



Eine erste Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet die Funktion  $p: x \mapsto -0,2x^2 + 5$  mit Definitionsbereich  $D_p = [-5;5]$ .

Zeigen Sie, dass die Bedingungen I und II in diesem Modell erfüllt sind. Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, unter dem bei dieser Modellierung die linke Tunnelwand auf den Tunnelboden trifft.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a****Nullstellen einer Funktion**

$$p(x) = -0,2x^2 + 5$$

**Erläuterung: Nullstellen**

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion  $f$  mit der  $x$ -Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach  $x$  aufgelöst werden.

Nullstellen bestimmen:  $p(x) = 0$

$$0 = -0,2x^2 + 5$$

$$0,2x^2 = 5$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \Rightarrow \text{Bedingung I erfüllt}$$

**Scheitelpunktform einer Parabel**

$S(0|5)$  ist Scheitelpunkt von  $G_p \Rightarrow$  Bedingung II erfüllt

**Winkel bestimmen**

Erste Ableitung bestimmen:  $p'(x) = -0,4x$

**Erläuterung: Tangentensteigung**

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle  $x_0$ , ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle  $x_0$ .

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels  $\alpha$ , welcher die Tangente mit der  $x$ -Achse bildet.

$$f'(x_0) = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = p'(-5)$$

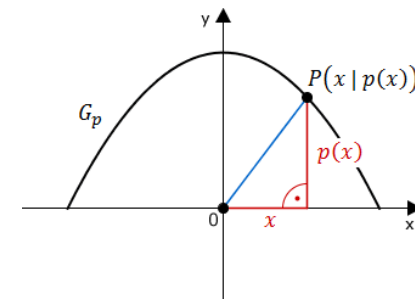
$$\tan \alpha = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63,4^\circ$$

**Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)**

Schülerinnen und Schüler untersuchen nun den Abstand  $d(x)$  der Graphenpunkte  $P_x(x|p(x))$  vom Ursprung des Koordinatensystems.

Zeigen Sie, dass  $d(x) = \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}$  gilt.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b****Abstand zweier Punkte**

$$p(x) = -0,2x^2 + 5$$

**Erläuterung: Satz des Pythagoras**

Der Abstand zwischen einem Punkt  $P$  auf dem Graphen  $p$  und dem Ursprung kann mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden.

Der Abstand entspricht der Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck (siehe Bild).

$$d(x) = \sqrt{x^2 + p^2(x)}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (-0,2x^2 + 5)^2}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 0,04x^4 - 2x^2 + 25} = \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}$$

**Teilaufgabe Teil B 1c** (5 BE)

Es gibt Punkte des Querschnitts der Tunnelwand, deren Abstand zu  $M$  minimal ist. Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte  $P_x$ , für die  $d(x)$  minimal ist, und geben Sie davon ausgehend diesen minimalen Abstand an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c**Extremwertaufgabe**

$$d(x) = \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Potenzregel*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Die Wurzel wird hier als Potenz geschrieben.

$$d'(x) = \left[ (0,04x^4 - x^2 + 25)^{\frac{1}{2}} \right]'$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

$$\text{Hier ist } u(x) = (\dots)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad v(x) = 0,04x^4 - x^2 + 25.$$

$$\text{Dann ist } u'(x) = \frac{1}{2}(\dots)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad v'(x) = 0,16x^3 - 2x.$$

$$d'(x) = \frac{1}{2} \cdot (0,04x^4 - x^2 + 25)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0,16x^3 - 2x)$$

Erläuterung: *Umformung*

$$d'(x) = \frac{1}{2} \cdot (0,04x^4 - x^2 + 25)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0,16x^3 - 2x) \quad | \quad \text{Regel } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ anwenden}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0,04x^4 - x^2 + 25)^{\frac{1}{2}}} \cdot (0,16x^3 - 2x) \quad | \quad \text{Potenz als Wurzel umformen}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}} \cdot (0,16x^3 - 2x)$$

$$d'(x) = \frac{0,16x^3 - 2x}{2 \cdot \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}}$$

$$d'(x) = \frac{0,16x^3 - 2x}{2 \cdot \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle  $x^E$  erfüllt sein:

$$f'(x^E) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f'(x) = 0$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:  $d'(x) = 0$

$$0 = \frac{0,16x^3 - 2x}{2 \cdot \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}}$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$$0 = 0,16x^3 - 2x$$

$$0 = 2x \cdot (0,08x^2 - 1)$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme  $a$  und  $b$  ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$$1. x_1 = 0$$

$$2. 0,08x^2 - 1 = 0 \implies x_{2,3} = \pm\sqrt{12,5}$$

$$d(0) = 5$$

$$d(\pm\sqrt{12,5}) = \sqrt{0,04 \cdot (\pm\sqrt{12,5})^4 - (\pm\sqrt{12,5})^2 + 25} = \sqrt{18,75} \approx 4,3$$

$$\implies d(x) \text{ ist minimal für } x = \pm\sqrt{12,5}$$

(Da die Aufgabenstellung die Existenz von Punkten mit minimalem Abstand vorgibt, ist die Überprüfung, ob es sich tatsächlich um Extremwerte handelt, in diesem Fall nicht notwendig.)

#### Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Eine zweite Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet eine Kosinusfunktion vom Typ  $k : x \mapsto 5 \cdot \cos(c \cdot x)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und Definitionsbereich  $D_k = [-5; 5]$ , bei der offensichtlich Bedingung II erfüllt ist.

Bestimmen Sie  $c$  so, dass auch Bedingung I erfüllt ist, und berechnen Sie damit den Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels.

$$\text{(zur Kontrolle: } c = \frac{\pi}{10}, \text{ Inhalt der Querschnittsfläche: } \frac{100}{\pi} \text{ m}^2\text{)}$$

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

##### **Funktionsgleichung ermitteln**

$$k(x) = 5 \cdot \cos(c \cdot x), \quad D_k = [-5; 5]$$

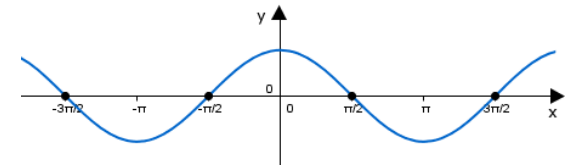
Erläuterung:

Damit Bedingung I erfüllt ist, muss die Funktion  $k$  an den Stellen  $x = \pm 5$  Nullstellen besitzen.

$$\text{Bedingung I: } k(-5) = k(5) = 0$$

Erläuterung: *Nullstellen der Kosinusfunktion*

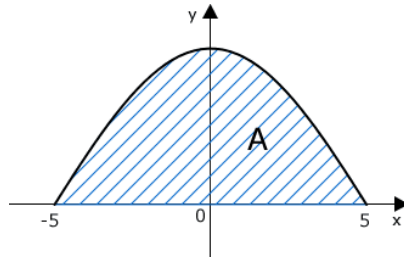
Die Nullstellen der Kosinusfunktion, sprich die Schnittpunkte der Funktion mit der  $x$ -Achse, wiederholen sich periodisch.



$$\text{Nullstellen: } x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2} \dots$$

$$\begin{aligned} k(-5) = 5 \cdot \cos(-5c) = 0 &\iff -5c = -\frac{\pi}{2} \\ k(5) = 5 \cdot \cos(5c) = 0 &\iff 5c = \frac{\pi}{2} \\ \implies c &= \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

##### **Flächenberechnung**



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die  $G_k$  mit der x-Achse zwischen  $-5$  und  $5$  einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_{-5}^5 k(x) \, dx$$

$$A = \int_{-5}^5 k(x) \, dx$$

Erläuterung: *Achsensymmetrie*

Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch, die Fläche die  $G_k$  mit der x-Achse zwischen  $-5$  und  $5$  einschließt ist doppelt so groß, wie die Fläche zwischen  $0$  und  $5$ .

$$A = 2 \cdot \int_0^5 \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) \, dx$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

$$A = 10 \cdot \int_0^5 \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) \, dx$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von  $\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right)$  (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (F \text{ Stammfunktion von } f)$$

Ein Stammfunktion von  $\cos x$  ist  $\sin x$ .

$$A = 10 \cdot \left[ \frac{1}{\frac{\pi}{10}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) \right]_0^5$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist  $F' = f$  und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = 10 \cdot \left[ \underbrace{\frac{10}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 - \underbrace{\frac{10}{\pi} \cdot \sin(0)}_0 \right] = \frac{100}{\pi} \, \text{m}^2$$

**Teilaufgabe Teil B 2b** (2 BE)

Zeigen Sie, dass Bedingung III weder bei einer Modellierung mit  $p$  aus Aufgabe 1 noch bei einer Modellierung mit  $k$  erfüllt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

**Funktionswert berechnen**

Beispiel:

## Erläuterung:

Man zeigt, dass die Funktionswerte für  $x = \pm 3$  kleiner sind als 4.  
Dies bedeutet, dass auf einer Breite von 6 m die Tunnelwand nicht 4 m hoch ist.

$$p(\pm 3) = -0,2 \cdot 3^2 + 5 = 3,2 < 4$$

$$k(\pm 3) = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 3\right) \approx 2,94 < 4$$

## Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Eine dritte Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand, bei der ebenfalls die Bedingungen I und II erfüllt sind, verwendet die Funktion  $f: x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$  mit Definitionsbereich  $D_f = [-5; 5]$ .

Begründen Sie, dass in diesem Modell jeder Punkt des Querschnitts der Tunnelwand von der Bodenmitte  $M$  den Abstand 5 m hat.

Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf spätere Aufgaben:  $-5 \leq x \leq 9$ ,  $-1 \leq y \leq 13$ ) und begründen Sie, dass bei dieser Modellierung auch Bedingung III erfüllt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a**Abstand zweier Punkte**

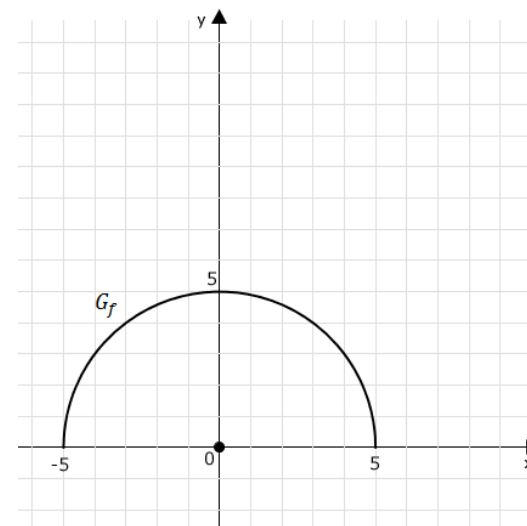
Begründung: der Graph von  $f$  ist ein Halbkreis mit Radius 5 um den Ursprung  $(0|0)$ .

Rechnerischer Beweis wie in Teilaufgabe Teil B 1b:

$$P(x|f(x)) \in G_f$$

$$d(P, M) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$$

$$d(P, M) = \sqrt{x^2 + 25 - x^2} = \sqrt{25} = 5$$

**Skizze**

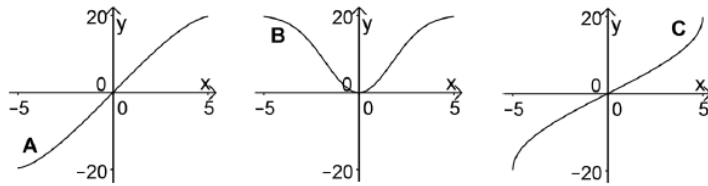
$$f(\pm 3) = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Bedingung III ist erfüllt}$$

## Teilaufgabe Teil B 3b (5 BE)

Betrachtet wird nun die Integralfunktion  $F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  mit Definitionsbereich  $D_F = [-5; 5]$ .

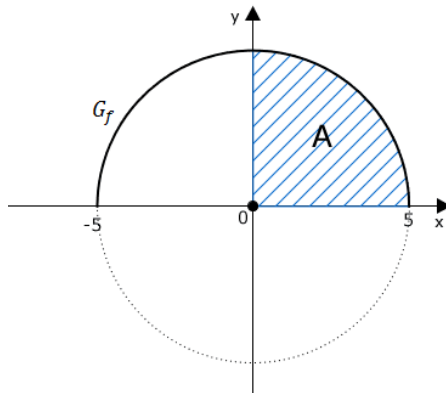
Zeigen Sie mithilfe einer geometrischen Überlegung, dass  $F(5) = \frac{25}{4}\pi$  gilt.

Einer der Graphen A, B und C ist der Graph von  $F$ . Entscheiden Sie, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht infrage kommen.



### Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

#### Flächenberechnung



Flächeninhalt Kreis mit Radius 5:  $A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

#### Erläuterung: Bestimmtes Integral

Die Fläche die  $G_f$  mit der  $x$ -Achse zwischen 0 und 5 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$F(5) = \int_0^5 f(t) dt$$

$$F(5) = \int_0^5 f(t) dt = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{Kreis}} = \frac{25}{4}\pi$$

#### Abschätzen eines Integrals durch Flächen

A ist der Graph von  $F$ .

Begründung:

Erläuterung: Zusammenhang Stammfunktion / Funktion

Zusammenhang zwischen  $F$  und  $f$ :

wo $f \dots$	ist $F \dots$
oberhalb der $x$ -Achse verläuft	streng monoton <b>steigend</b>
unterhalb der $x$ -Achse verläuft	streng monoton <b>fallend</b>
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

$f$ besitzt	$F$ besitzt
eine Nullstelle mit <b>VZW +/-</b>	Maximum / <b>Hochpunkt</b>
eine Nullstelle mit <b>VZW -/+</b>	Minimum / <b>Tiefpunkt</b>
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

B ist falsch, da  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist und als solche wegen  $f(x) \geq 0$  monoton steigend ist.

C ist falsch, da  $f$  im Bereich  $0 < x < 5$  streng monoton abnehmend ist und der Graph von  $F$  in diesem Bereich damit rechtsgekrümmt ist.

**Teilaufgabe Teil B 3c** (2 BE)

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels bei einer Modellierung mit  $f$  von dem in Aufgabe 2a berechneten Wert abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c**Verhältnis von Teilflächen**

Teilaufgabe Teil B 2a:  $A = \frac{100}{\pi}$

Erläuterung:

$$F(5) = \frac{25}{4}\pi \quad \Rightarrow \quad A = 2 \cdot F(5) = \frac{25}{2}\pi$$

Modellierung mit  $f$ :  $A = \frac{25}{2}\pi$

Prozentuale Abweichung:

$$\frac{\frac{25}{2}\pi - \frac{100}{\pi}}{\frac{100}{\pi}} \cdot 100 \approx 23,4\%$$

**Teilaufgabe Teil B 3d** (4 BE)

Der Tunnel soll durch einen Berg führen. Im betrachteten Querschnitt wird das Profil des Berghangs über dem Tunnel durch eine Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = -\frac{4}{3}x + 12$  modelliert.

Zeigen Sie, dass die Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $R(4|f(4))$  parallel zu  $g$  verläuft. Zeichnen Sie  $g$  und  $t$  in das Koordinatensystem aus Aufgabe 3a ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3d**Steigung eines Funktionsgraphen**

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Potenzregel*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \left[ (25 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right]'$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Hier ist  $u(x) = (\dots)^{\frac{1}{2}}$  und  $v(x) = 25 - x^2$ .

Dann ist  $u'(x) = \frac{1}{2}(\dots)^{-\frac{1}{2}}$  und  $v'(x) = -2x$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

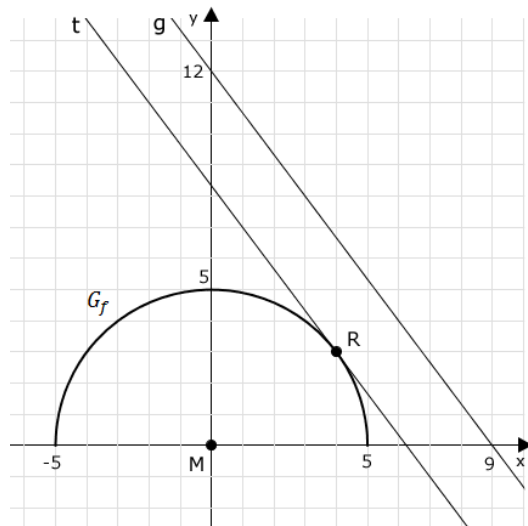
Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle  $x_0$ , ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle  $x_0$ .

$$f'(4) = -\frac{4}{\sqrt{25 - 16}} = -\frac{4}{3} \text{ stimmt mit der Steigung von } g \text{ überein.}$$

$$\Rightarrow \quad t \text{ und } g \text{ sind parallel}$$

**Skizze**



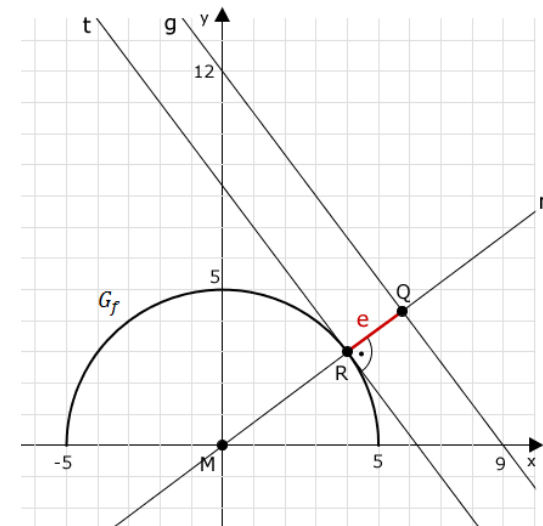


### Teilaufgabe Teil B 3e (3 BE)

Der Punkt  $R$  aus Aufgabe 3d entspricht demjenigen Punkt der Tunnelwand, der im betrachteten Querschnitt vom Hangprofil den kleinsten Abstand  $e$  in Metern hat. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte eines Verfahrens zur rechnerischen Ermittlung von  $e$ .

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3e

#### Abstand Punkt - Gerade



Beispiel einer Vorgehensweise:

1. Senkrechte Gerade  $n$  zu  $G_f$  in  $R$  aufstellen.
2.  $n$  und  $g$  schneiden und Schnittpunkt  $Q$  ermitteln.
3. Länge der Strecke  $\overline{RQ}$  bestimmen.