Abitur 2016 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln x}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Bestimmen Sie D.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert $x \in D$ mit $f(x) = 2$.

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto x^2 \cdot \sin x$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und geben Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$ an.

Teilaufgabe Teil A 3 (3 BE)

Skizzieren Sie im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- f ist nur an der Stelle $x = 3$ nicht differenzierbar.
- $f(0) = 2$ und für die Ableitung f' von f gilt: $f'(0) = -1$.
- Der Graph von f ist im Bereich $-1 < x < 3$ linksgekrümmt.

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph G_f an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 4$ einen Tiefpunkt besitzt.

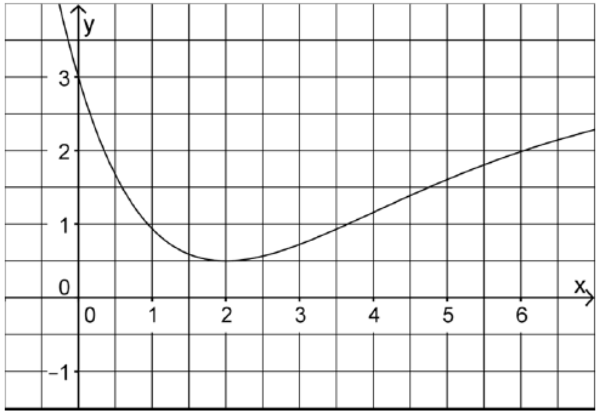
Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Begründen Sie, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' von f eine Parabel ist, welche die x-Achse in den Punkten $(1|0)$ und $(4|0)$ schneidet und nach oben geöffnet ist.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Begründen Sie, dass $2,5$ die x-Koordinate des Wendepunkts von G_f ist.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int\limits_3^5 f(x) \, \mathrm{d}x$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

Teilaufgabe Teil A 5b (1 BE)

Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

Teilaufgabe Teil A 5c (2 BE)

Zeigen Sie, dass $F(b) = \int\limits_3^b f(x) \, \mathrm{d}x$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und begründen Sie, dass G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitung f'' von f die Beziehung $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Weisen Sie nach, dass G_f linksgekrümmt ist.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$]

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Berechnen Sie die Steigung der Tangente g an G_f im Punkt $P(2|f(2))$ auf eine Dezimale genau. Zeichnen Sie den Punkt P und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 9$).

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Berechnen Sie $f(4)$, im Hinblick auf eine der folgenden Aufgaben auf zwei Dezimalen genau, und zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1e ein.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\frac{1}{4} \cdot [f(x)]^2 - \left[f'(x)\right]^2 = 1$ gilt.

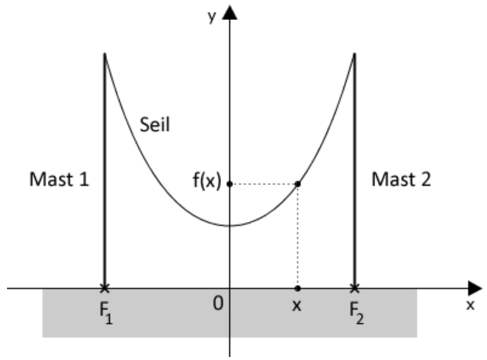
Die als Kurvenlänge $L_{a;b}$ bezeichnete Länge des Funktionsgraphen von f zwischen den Punkten $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ mit $a < b$ lässt sich mithilfe der Formel $L_{a;b} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{dx}$ berechnen.

Teilaufgabe Teil B 1h (4 BE)

Bestimmen Sie mithilfe der Beziehung aus Aufgabe 1g die Kurvenlänge $L_{0;b}$ des Graphen von f zwischen den Punkten $(0|f(0))$ und $(b|f(b))$ mit $b > 0$.

[Ergebnis: $L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$]

Die Enden eines Seils werden an zwei vertikalen Masten, die 8,00 m voneinander entfernt sind, in gleicher Höhe über dem Erdboden befestigt. Der Graph G_f aus Aufgabe 1 beschreibt im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ modellhaft den Verlauf des Seils, wobei die Fußpunkte F_1 und F_2 der Masten durch die Punkte $(-4|0)$ bzw. $(4|0)$ dargestellt werden (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Der Höhenunterschied zwischen den Aufhängepunkten und dem tiefsten Punkt des Seils wird als Durchhang bezeichnet. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Durchhang des Seils auf Zentimeter genau.

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, den das Seil mit Mast 2 im Aufhängepunkt einschließt, sowie mithilfe der Kurvenlänge aus Aufgabe 1h die Länge des zwischen den Masten hängenden Seils auf Zentimeter genau.

Der Graph von f soll durch eine Parabel näherungsweise dargestellt werden. Dazu wird die in $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion q betrachtet, deren Graph den Scheitelpunkt $(0|2)$ hat und durch den Punkt $(4|f(4))$ verläuft.

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Ermitteln Sie den Term $q(x)$ der Funktion q, ohne dabei zu runden.

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Für jedes $x \in]0;4[$ wird der Abstand der vertikal übereinander liegenden Punkte $(x|q(x))$ und $(x|f(x))$ der Graphen von q bzw. f betrachtet, wobei in diesem Bereich $q(x) > f(x)$ gilt. Der größte dieser Abstände ist ein Maß dafür, wie gut die Parabel den Graphen G_f im Bereich $0 < x < 4$ annähert. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte, mithilfe derer man diesen größten Abstand rechnerisch bestimmen kann.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln x}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Bestimmen Sie D.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$f(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $1 - \ln x$, muss größer oder gleich Null sein.

Für $\ln x$ muss zusätzlich gelten: $x > 0$.

$1 - \ln x \geq 0 \qquad \text{und} \qquad x > 0$

$1 \geq \ln x \qquad | \quad e^x$

$e \geq x$

$\Rightarrow \qquad D =]0; e]$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert $x \in D$ mit $f(x) = 2$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Wurzelgleichungen

$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}, \qquad D =]0; e]$

$2 = \sqrt{1 - \ln x} \qquad | \quad ()^2$

$4 = 1 - \ln x$

$-3 = \ln x \qquad | \quad e^x$

$x = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3} < e \quad \Rightarrow \quad x \in D$

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto x^2 \cdot \sin x$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, \mathrm{dx}$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Symmetrieverhalten einer Funktion

$g(x) = x^2 \cdot \sin x$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$g(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x)$

Erläuterung: *Sinusfunktion*

Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Es gilt somit: $\sin(-x) = -\sin x$

$g(-x) = x^2 \cdot (-\sin x) = -x^2 \cdot \sin x = -g(x)$

$\Rightarrow \quad G_g$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Bestimmtes Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, \mathrm{dx} = 0$$

Da die Integrationsgrenzen gleich weit vom Ursprung entfernt sind und die Funktion punktsymmetrisch ist, heben sich die Flächen beim Integrieren auf.

Teilaufgabe Teil A 3 (3 BE)

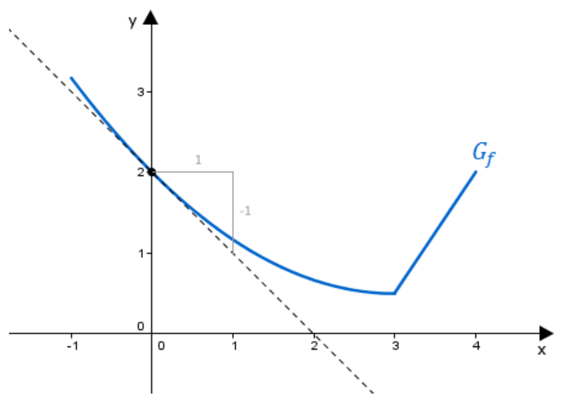
Skizzieren Sie im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- f ist nur an der Stelle $x = 3$ nicht differenzierbar.
- $f(0) = 2$ und für die Ableitung f' von f gilt: $f'(0) = -1$.
- Der Graph von f ist im Bereich $-1 < x < 3$ linksgekrümmt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3

Skizze

Beispiel:



Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen, Krümmungsverhalten einer Funktion*

Der obige Graph schneidet die y-Achse an der Stelle 2, also gilt $f(0) = 2$.

Die Steigung der Tangente im Punkt $(0|2)$ ist gleich -1, also gilt $f'(0) = -1$.

Der Graph hat ein Knick an der Stelle $x = 3$, also ist dort die Funktion nicht differenzierbar.

Der Graph dreht sich (von links nach rechts betrachtet) entgegen dem Uhrzeigersinn, also ist er im Bereich $-1 < x < 3$ linksgekrümmt.

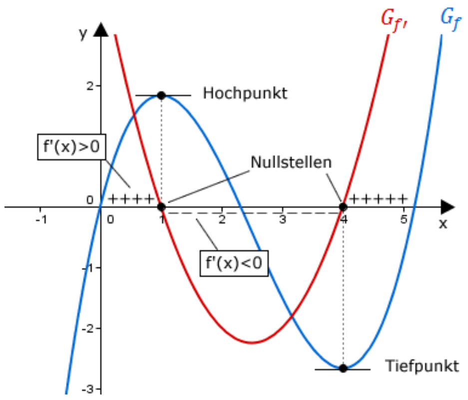
Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph G_f an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 4$ einen Tiefpunkt besitzt.

Begründen Sie, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' von f eine Parabel ist, welche die x-Achse in den Punkten $(1|0)$ und $(4|0)$ schneidet und nach oben geöffnet ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Eigenschaften der Ableitungsfunktion



Begründung:

1. Die Ableitungsfunktion einer Funktion 3. Grades ist eine Funktion 2. Grades. Ihr Graph ist somit eine Parabel.

2. Der Graph der ersten Ableitung hat genau dort Nullstellen, wo der Graph der Funktion f Extrempunkte hat.

3. Die Funktion f hat im Punkt $(1|0)$ ein Hochpunkt, d.h. die erste Ableitung hat dort ein Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus.Der Graph der ersten Ableitung schneidet somit die x-Achse an der Stelle $x = 1$ von oben nach unten. Die Parabel muss somit nach oben geöffnet sein.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Begründen Sie, dass $2,5$ die x-Koordinate des Wendepunkts von G_f ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

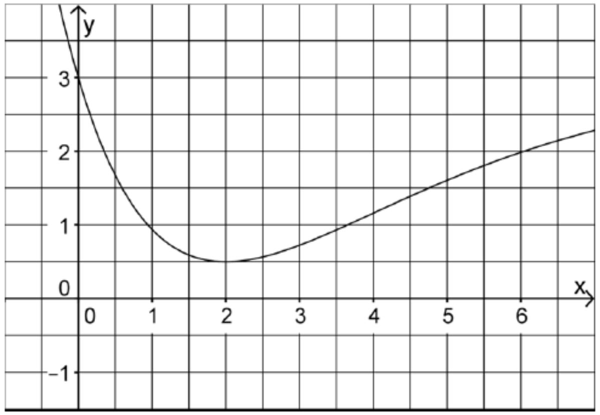
Wendepunkt ermitteln

1. G_f hat dort ein Wendepunkt, wo $G_{f'}$ ein Extrempunkt hat.

2. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt mittig zwischen den Nullstellen, also zwischen $x = 1$ und $x = 4$. Die x-Koordinate lautet somit: $x = \dfrac{1+4}{2} = 2,5$.

Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

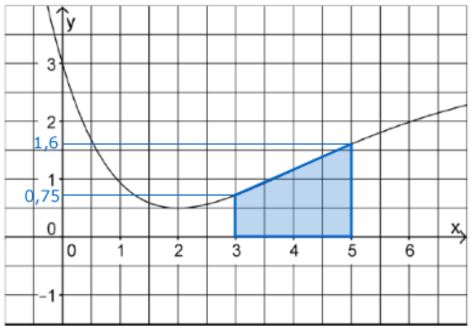
Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int\limits_3^5 f(x)\ \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5a

Abschätzen eines Integrals durch Flächen



$$\int\limits_3^5 f(x)\ \mathrm{dx} \approx A_{\text{Trapez}} = \frac{(0,75+1,6)}{2} \cdot 2 = 2,35$$

Teilaufgabe Teil A 5b (1 BE)

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5b

Anwendungsaufgabe

$$F'(2) = f(2) \approx 0,5$$

Teilaufgabe Teil A 5c (2 BE)

Zeigen Sie, dass $F(b) = \int\limits_3^b f(x)\ \mathrm{dx}$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5c

Eigenschaften der Integralfunktion

$$F(b) = \int\limits_3^b f(x)\ \mathrm{dx}, \qquad \text{da } F(3) = 0$$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und begründen Sie, dass G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

y-Achsenabschnitt bestimmen:

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

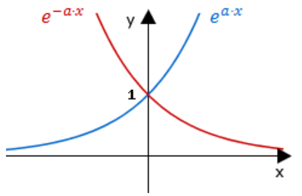
$f(0) = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|2)$

Wertebereich bestimmen

$f(x) = \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{>0} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{>0} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad G_f$ verläuft oberhalb der x-Achse

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion $e^{a\cdot x}$ mit $a > 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

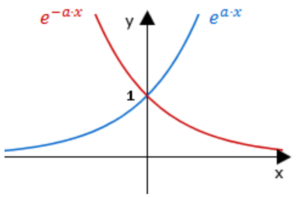
$f(-x) = e^{\frac{1}{2}(-x)} + e^{-\frac{1}{2}(-x)} = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

Grenzwerte bilden:

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion $e^{a\cdot x}$ mit $a > 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

Für $a > 0$ steigt der Graph streng monoton, für $a < 0$ fällt er streng monoton.

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2}x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} + \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x}^{\to-\infty}}}_{\to 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2}x}^{\to-\infty}}}_{\to 0} + \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = +\infty$$

(Hinweis: wegen der Symmetrie von G_f kann aus einem Grenzwert der andere geschlussfolgert werden.)

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitung f'' von f die Beziehung $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Weisen Sie nach, dass G_f linksgekrümmt ist.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Erste und zweite Ableitung einer Funktion ermitteln

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist einmal $g(x) = \frac{1}{2}x$ und einmal $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

$f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung, Ableitung eines Produktes*

Folgende Regeln müssen hier beachtet werden:

1. Ableitung eines Produktes

$h(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = a \cdot f'(x)$

2. Kettenregel für Exponentialfunktionen

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Beispiel:

$\left(2 \cdot e^{4x}\right)' = 2 \cdot \left(e^{4x}\right)'$ (Produktregel)
$\left(2 \cdot e^{4x}\right)' = 2 \cdot \left(e^{4x}\right)' = 2 \cdot e^{4x} \cdot 4$ (Kettenregel)

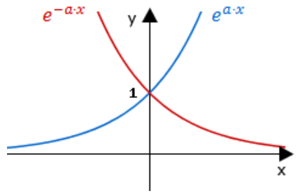
$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$

Krümmungsverhalten einer Funktion

Vorzeichen der zweiten Ableitung untersuchen:

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion $e^{a\cdot x}$ mit $a > 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{>0} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{>0} \right) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''\left(x^W\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist linksgekrümmt

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} \right) \qquad \text{(s. Teilaufgabe Teil B 1c)}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} \right)$$

$$e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad | \quad \ln()$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x \qquad | \quad +\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad x^E = 0$$

Lage des möglichen Extrempunkts:

$$y^E = f\left(x^E\right) = f(0) = 2$$

Art von Extrempunkten ermitteln

$$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x) \qquad \text{(s. Teilaufgabe Teil B 1c)}$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der möglichen Extremstelle untersuchen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$$f''(0) = \frac{1}{4} \cdot f(0) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad E(0|2) \text{ Tiefpunkt}$$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Berechnen Sie die Steigung der Tangente g an G_f im Punkt $P(2|f(2))$ auf eine Dezimale genau. Zeichnen Sie den Punkt P und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 9$).

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Tangentengleichung ermitteln

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right) \qquad \text{(s. Teilaufgabe Teil B 1c)}$$

Tangentensteigung im Punkt $(2|f(2))$:

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

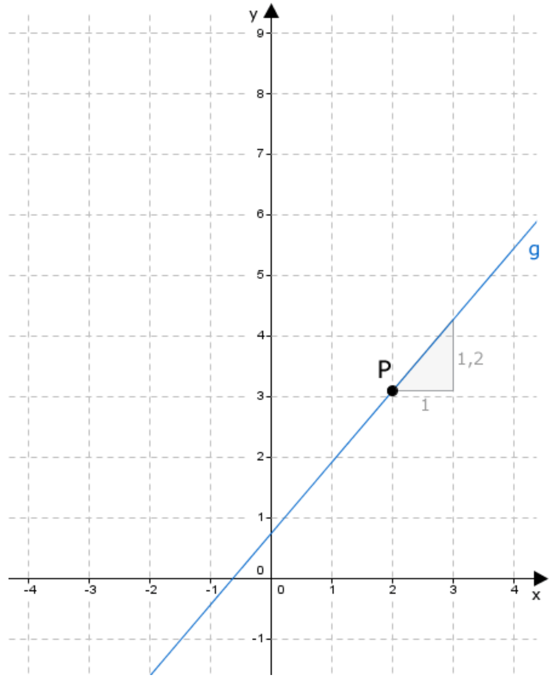
$m = f'(x_S)$

$$m = f'(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}\cdot 2} - \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{1} - e^{-1}\right) \approx 1,2$$

Skizze

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

$f(2) = e^{1} + e^{-1} \approx 3,1$



Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Berechnen Sie $f(4)$, im Hinblick auf eine der folgenden Aufgaben auf zwei Dezimalen genau, und zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1e ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Skizze

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

$f(4) = e^{2} + e^{-2} \approx 7,52$

Erläuterung:

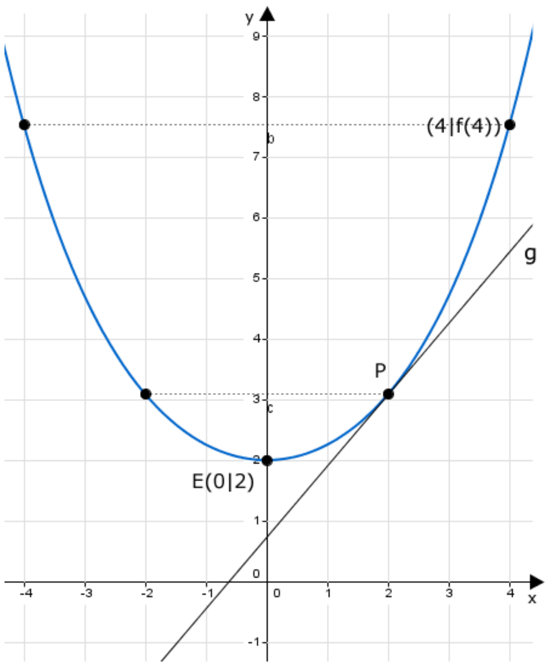
Eigenschaften von G_f:

- Minimum $E(0|2)$

- verläuft durch $P(2|3,1)$ und $(4|7,52)$

- achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse

- steigt für $x \to \pm\infty$



Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\frac{1}{4} \cdot [f(x)]^2 - \left[f'(x)\right]^2 = 1$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Anwendungsaufgabe

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$ (s. Teilaufgabe Teil B 1c)

Erläuterung: *Rechenweg, Binomische Formel, Potenzregel*

1. Binomische Formel anwenden:

$$\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = \left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2$$

Potenzeregeln anwenden:

1. $\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$
2. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}x\cdot 2} + 2e^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x\cdot 2}$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = e^x + 2\underbrace{e^0}_{=1} + e^{-x}$$

$$\frac{1}{4} \cdot [f(x)]^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot e^x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot e^{-x}$$

Erläuterung: *Rechenweg, Binomische Formel, Potenzregel*

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2$$

2. Binomische Formel anwenden:

$$\left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^2-2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2$$

Potenzeregeln anwenden:

1. $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$
2. $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=e^{\frac{1}{2}x\cdot 2}-2e^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x\cdot 2}$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=e^x-2\underbrace{e^0}_{=1}+e^{-x}$$

$$[f'(x)]^2=\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-x}$$

Somit gilt:

$$\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2-[f'(x)]^2=\frac{1}{4}\cdot e^x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-x}-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Teilaufgabe Teil B 1h (4 BE)

Die als Kurvenlänge $L_{a;b}$ bezeichnete Länge des Funktionsgraphen von f zwischen den Punkten $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ mit $a<b$ lässt sich mithilfe der Formel $L_{a;b}=\int\limits_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{dx}$ berechnen.

Bestimmen Sie mithilfe der Beziehung aus Aufgabe 1g die Kurvenlänge $L_{0;b}$ des Graphen von f zwischen den Punkten $(0|f(0))$ und $(b|f(b))$ mit $b>0$.

[Ergebnis: $L_{0;b}=e^{\frac{1}{2}b}-e^{-\frac{1}{2}b}$]

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1h

Bestimmtes Integral

Aussage aus Teilaufgabe 1g: $\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2-\left[f'(x)\right]^2=1$

Umstellen: $\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2=1+\left[f'(x)\right]^2$

$$L_{0;b}=\int\limits_0^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Ausdruck unter der Wurzel wird mit $\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2$ ersetzt, da durch die Umstellung der Aussage aus Teilaufgabe 1g die Beziehung

$$\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2=1+\left[f'(x)\right]^2$$

gilt.

$$L_{0;b}=\int\limits_0^b\sqrt{\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2}\,\mathrm{dx}$$

$$L_{0;b}=\int\limits_0^b\frac{1}{2}\cdot f(x)\,\mathrm{dx}$$

$$L_{0;b}=\int\limits_0^b\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\right)\,\mathrm{dx}=\int\limits_0^b\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gelten folgende Rechenregeln für Integrale:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\ \text{dx} = c \cdot \int_a^b f(x)\ \text{dx}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ \ \text{dx} = \int_a^b f(x)\ \text{dx} + \int_a^b g(x)\ \text{dx}$$

$$L_{0;b} = \int_0^b \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\ \text{dx} + \int_0^b \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\ \text{dx}$$

Erläuterung:

Beim zweiten Integral wird das Vorzeichen des Bruchs $\frac{1}{2}$ in ein Minus geändert, um eine Integral-Rechenregel anwenden zu können. Siehe hierfür nächste Schritterklärung.

$$L_{0;b} = \int_0^b \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\ \text{dx} - \int_0^b -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\ \text{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int g'(x) \cdot e^{g(x)}\ \text{dx} = e^{g(x)} + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{g'(x)} \cdot e^{\overbrace{\frac{1}{2}x}^{g(x)}}\ \text{dx} = e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \underbrace{-\frac{1}{2}}_{g'(x)} \cdot e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x}^{g(x)}}\ \text{dx} = e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

$$L_{0;b} = \left[e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^b - \left[e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^b$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \text{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

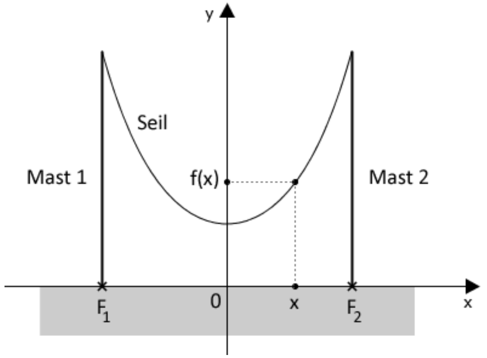
$$L_{0;b} = \left(e^{\frac{1}{2}b} - \underbrace{e^0}_{=1}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}b} - \underbrace{e^0}_{=1}\right)$$

$$L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$$

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Die Enden eines Seils werden an zwei vertikalen Masten, die 8,00 m voneinander entfernt sind, in gleicher Höhe über dem Erdboden befestigt. Der Graph G_f aus Aufgabe 1 beschreibt im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ modellhaft den Verlauf des Seils, wobei die Fußpunkte F_1 und F_2 der Masten durch die Punkte $(-4|0)$ bzw. $(4|0)$ dargestellt werden (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der

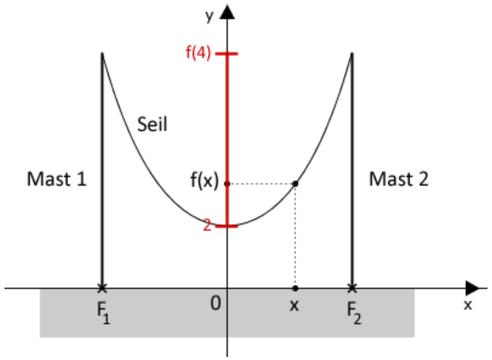
Realität.



Der Höhenunterschied zwischen den Aufhängepunkten und dem tiefsten Punkt des Seils wird als Durchhang bezeichnet. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Durchhang des Seils auf Zentimeter genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Anwendungsaufgabe



$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

$f(0) = 2$

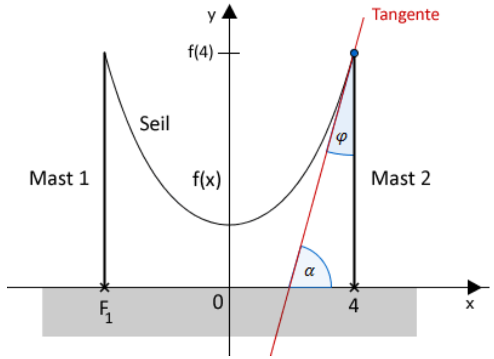
Durchhang $= f(4) - 2 = e^2 + e^{-2} - 2 \approx 5,52$ m

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, den das Seil mit Mast 2 im Aufhängepunkt einschließt, sowie mithilfe der Kurvenlänge aus Aufgabe 1h die Länge des zwischen den Masten hängenden Seils auf Zentimeter genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Schnittwinkel eines Graphen mit der x-Achse



$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$$

Erläuterung:

Der Aufhängepunkt entspricht dem Punkt $(4|f(4))$.

Steigung der Tangente im Punkt $(4|f(4))$:

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α, welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.

$f'(x_0) = \tan\alpha$

$\tan\alpha = f'(4) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^2 - e^{-2}\right)$

$\Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^2 - e^{-2}\right)\right] \approx 74,6°$

(Winkel α zwischen Tangente und x-Achse)

Winkel φ zwischen Seil und Mast 2:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Im rechtwinkligen Dreieck, welches die Tangente, der Mast 2 und die x-Achse bilden, gilt:

$\alpha + \varphi + 90° = 180°$

$\varphi = 90° - \alpha = 90° - 74,6° = 15,4°$

Anwendungsaufgabe

Aus Teilaufgabe Teil B 1h: $\quad L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$

Länge des Seils: $\quad 2\cdot L_{0;4} = 2\cdot\left(e^2 - e^{-2}\right) \approx 14,51 \text{ m}$

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Der Graph von f soll durch eine Parabel näherungsweise dargestellt werden. Dazu wird die in $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion q betrachtet, deren Graph den Scheitelpunkt

$(0|2)$ hat und durch den Punkt $(4|f(4))$ verläuft.

Ermitteln Sie den Term $q(x)$ der Funktion q, ohne dabei zu runden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Funktionsgleichung ermitteln

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

$f(4) = e^2 + e^{-2}$

Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*

Die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion lautet $y = a\cdot(x-s)^2 + t$ mit Scheitelpunkt $S(s|t)$.

Hier ist der Scheitelpunkt $(0|2)$.

$q(x) = a\cdot(x-0)^2 + 2 = a\,x^2 + 2$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Graph der Funktion q verläuft durch die Punkte $(0|2)$ und $(4|f(4))$. Die Punktkoordinaten dieser Punkte erfüllen somit die Funktionsgleichung von q.

$q(4) = f(4) \quad \Longleftrightarrow \quad 16a + 2 = e^2 + e^{-2}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{16}\cdot\left(e^2 + e^{-2} - 2\right)$

$\Rightarrow \quad q(x) = \frac{1}{16}\cdot\left(e^2 + e^{-2} - 2\right)\,x^2 + 2$

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Für jedes $x \in]0;4[$ wird der Abstand der vertikal übereinander liegenden Punkte $(x|q(x))$ und $(x|f(x))$ der Graphen von q bzw. f betrachtet, wobei in diesem Bereich $q(x) > f(x)$ gilt. Der größte dieser Abstände ist ein Maß dafür, wie gut die Parabel den Graphen G_f im Bereich $0 < x < 4$ annähert. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte, mithilfe derer man diesen größten Abstand rechnerisch bestimmen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Extremwertaufgabe

Beispiel eines möglichen Vorgehens:

1. Differenzfunktion d bilden

$d(x) = q(x) - f(x), \qquad x \in]0;4[$

2. Erste Ableitung bilden und Nullstellen bestimmen

$d'(x) = 0$

3. Zweite Ableitung bilden und mögliche Extremstellen einsetzen, um das Maximum zu bestimmen.

$d''\left(x^E\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(x^E\right)$ ist größter Abstand