Abitur 2016 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die Ebene $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

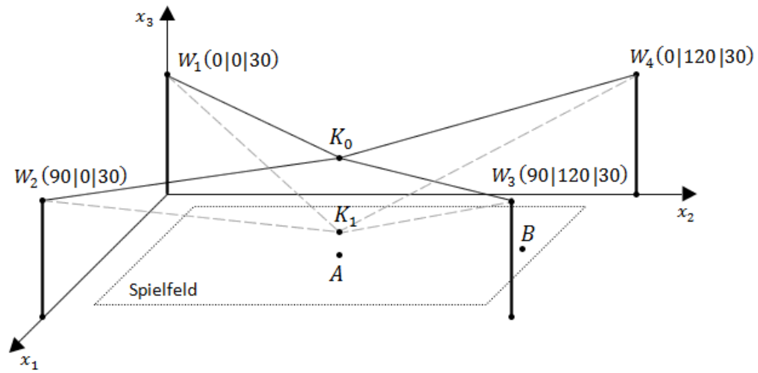
Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

Für die Fernsehübertragung eines Fußballspiels wird über dem Spielfeld eine bewegliche Kamera installiert. Ein Seilzugsystem, das an vier Masten befestigt wird, hält die Kamera in der gewünschten Position. Seilwinden, welche die Seile koordiniert verkürzen und verlängern, ermöglichen eine Bewegung der Kamera.
In der Abbildung ist das horizontale Spielfeld modellhaft als Rechteck in der x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Die Punkte W_1, W_2, W_3 und W_4 beschreiben die Positionen der vier Seilwinden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität, d. h. alle vier Seilwinden sind in einer Höhe von 30 m angebracht.



Der Punkt $A(45|60|0)$ beschreibt die Lage des Anstoßpunkts auf dem Spielfeld. Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt. Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19m vertikal abgesenkt. In der Abbildung ist die ursprüngliche Kameraposition durch den Punkt K_0, die abgesenkte Position durch den Punkt K_1 dargestellt.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Berechnen Sie die Seillänge, die von jeder der vier Seilwinden abgerollt werden muss, um dieses Absenken zu ermöglichen, wenn man davon ausgeht, dass die Seile geradlinig verlaufen.

Kurze Zeit später legt sich ein Torhüter den Ball für einen Abstoß bereit. Der Abstoß soll von der Kamera aufgenommen werden. Durch das gleichzeitige Verlängern beziehungsweise Verkürzen der vier Seile wird die Kamera entlang einer geraden Bahn zu einem Zielpunkt bewegt, der in einer Höhe von 10 m über dem Spielfeld liegt. Im Modell wird der Zielpunkt durch den Punkt K_2 beschrieben, die Bewegung der Kamera erfolgt vom Punkt K_1 entlang der Geraden g mit der Gleichung $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{K_1} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, zum Punkt K_2.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von K_2.
[Ergebnis: $K_2(51|100|10)$]

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Im Zielpunkt ist die Kamera zunächst senkrecht nach unten orientiert. Um die Position des Balls anzuvisieren, die im Modell durch den Punkt $B(40|105|0)$ beschrieben wird, muss die Kamera gedreht werden. Berechnen Sie die Größe des erforderlichen Drehwinkels.

Der Torwart führt den Abstoß aus. Der höchste Punkt der Flugbahn des Balls wird im Modell durch den Punkt $H(50|70|15)$ beschrieben.

Teilaufgabe Teil B d (7 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der durch die Punkte W_1, W_2 und K_2 festgelegten Ebene E in Normalenform und weisen Sie nach, dass H unterhalb von E liegt.

[Mögliches Teilergebnis: $E : x_2 + 5x_3 - 150 = 0$]

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Machen Sie plausibel, dass folgende allgemeine Schlussfolgerung falsch ist: „Liegen der Startpunkt und der anvisierte höchste Punkt einer Flugbahn des Balls im Modell unterhalb der Ebene E, so kann der Ball entlang seiner Bahn die Seile, die durch $[W_1 K_2]$ und $[W_2 K_2]$ beschrieben werden, nicht berühren."

Lösung

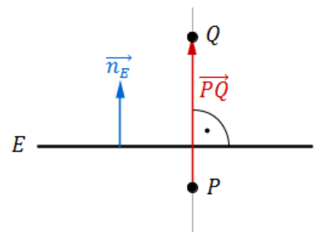
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben sind die Ebene $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Lagebeziehung Gerade und Ebene



Normalenvektor der Ebene:

$$E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Gerade:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}}$$

Erläuterung: *Parallele Vektoren*

Zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ sind genau dann parallel, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.
Also genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} \parallel \overrightarrow{PQ}$ (die Vektoren sind parallel)

Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf diese Ebene.

Ein zum Normalenvektor paralleler Vektor steht somit auch senkrecht auf diese Ebene.

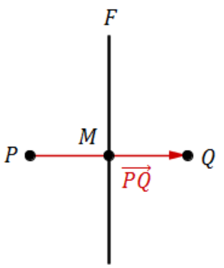
$\Rightarrow$ Gerade durch P und Q steht senkrecht auf E

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Mittelpunkt einer Strecke



$P(1|0|2)$, $Q(5|2|6)$

Mittelpunkt M der Strecke $[PQ]$ bestimmen:

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (s. vorherige Teilaufgabe)

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Multiplizieren/Teilen mit/durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 2 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

Normalenvektor der Ebene F: $\overrightarrow{n_F} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (M ist Aufpunkt):

$$F: \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_F}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{M}}$$

$F: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 + 1 + 8$

$F: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 15 = 0$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gesucht ist der Punkt C $(c_1|c_2|c_3)$.

Es soll gelten: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - 2 \cdot \left[\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\right]$

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C(2|3|0)$

Alternative Lösung

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-c_1 \\ 1-c_2 \\ 4-c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-c_1 \\ 1-c_2 \\ 4-c_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} -2-c_1 = -4 \\ 1-c_2 = -2 \\ 4-c_3 = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad C(2|3|0)$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

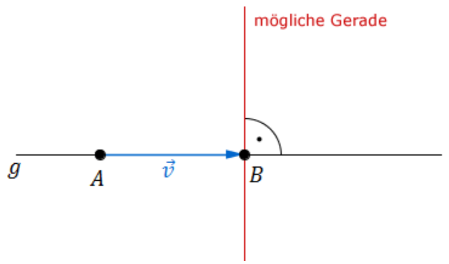
Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Geradengleichung aufstellen



Richtungsvektor der Geraden g: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

> Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*
>
> Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Möglicher Richtungsvektor der Geraden: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Begründung: $\vec{v} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0$

Geradengleichung einer der Geraden:

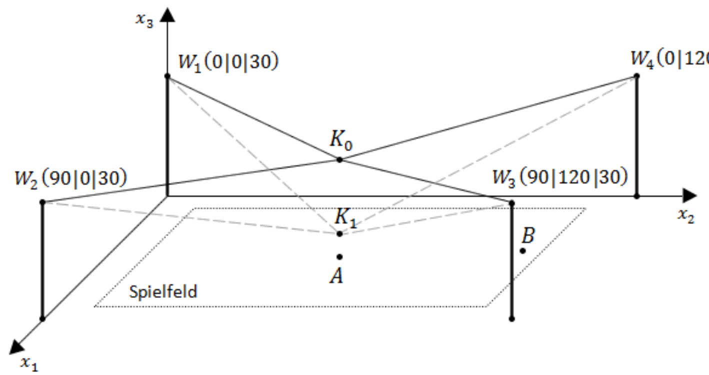
> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor $\vec{P}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ eindeutig bestimmt:
>
> $l : \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$
>
> Wenn B als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\vec{B}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden l.

$$\vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g schneidet die obige Gerade im Punkt B, und da $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$, ist der Abstand der Geraden vom Punkt A gleich 3.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Für die Fernsehübertragung eines Fußballspiels wird über dem Spielfeld eine bewegliche Kamera installiert. Ein Seilzugsystem, das an vier Masten befestigt wird, hält die Kamera in der gewünschten Position. Seilwinden, welche die Seile koordiniert verkürzen und verlängern, ermöglichen eine Bewegung der Kamera.
In der Abbildung ist das horizontale Spielfeld modellhaft als Rechteck in der x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Die Punkte W_1, W_2, W_3 und W_4 beschreiben die Positionen der vier Seilwinden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität, d. h. alle vier Seilwinden sind in einer Höhe von 30 m angebracht.



Der Punkt $A(45|60|0)$ beschreibt die Lage des Anstoßpunkts auf dem Spielfeld. Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt. Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19m vertikal abgesenkt. In der Abbildung ist die ursprüngliche Kameraposition durch den Punkt K_0, die abgesenkte Position durch den Punkt K_1 dargestellt.

Berechnen Sie die Seillänge, die von jeder der vier Seilwinden abgerollt werden muss, um dieses Absenken zu ermöglichen, wenn man davon ausgeht, dass die Seile geradlinig verlaufen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Länge eines Vektors

$A(45|60|0)$, $W_1(0|0|30)$

Erläuterung:

Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt A, also sind die x_1- und x_2-Koordinaten von K_0 dieselben wie die von A und die x_3-Koordinate ist gleich 25.

Ausgangspunkt der Kamera: $K_0(45|60|25)$

Erläuterung:

„Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19 m vertikal abgesenkt.“

Die x_3-Koordinate von K_1 ist die von K_0 minus 19.

Abgesenkte Position: $K_1(45|60|\underbrace{25-19}_{6})$

Erläuterung: *Rechteck*

Da die Punkte K_0 und K_1 vertikal über A liegen (Diagonalschnittpunkt des Spielfeldes), sind alle Seile gleich lang (zu einem bestimmten Zeitpunkt). Es reicht somit nur eine Länge zu bestimmen.

Länge der Seile vor dem Absenken:

$$\overrightarrow{W_1K_0} = \overrightarrow{K_0} - \overrightarrow{W_1} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{W_1K_0}\right| = \left|\begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{45^2 + 60^2 + 5^2} = \sqrt{5650}$$

Länge der Seile nach dem Absenken:

$$\overrightarrow{W_1K_1} = \overrightarrow{K_1} - \overrightarrow{W_1} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{W_1K_1}\right| = \left|\begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ -24 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{45^2 + 60^2 + 24^2} = \sqrt{6201}$$

Differenz $= \sqrt{6201} - \sqrt{5650} \approx 3{,}6$ m

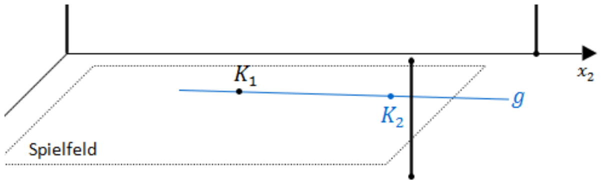
Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Kurze Zeit später legt sich ein Torhüter den Ball für einen Abstoß bereit. Der Abstoß soll von der Kamera aufgenommen werden. Durch das gleichzeitige Verlängern beziehungsweise Verkürzen der vier Seile wird die Kamera entlang einer geraden Bahn zu einem Zielpunkt bewegt, der in einer Höhe von 10 m über dem Spielfeld liegt. Im Modell wird der Zielpunkt durch den Punkt K_2 beschrieben, die Bewegung der Kamera erfolgt vom Punkt K_1 entlang der Geraden g mit der Gleichung $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{K_1} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, zum Punkt K_2.

Bestimmen Sie die Koordinaten von K_2.
[Ergebnis: $K_2(51|100|10)$]

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Koordinaten von Punkten ermitteln



$K_1(45|60|6)$ (s. vorherige Teilaufgabe)

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{K_1}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung:
>
> Die Kamera bewegt sich auf der Geraden g zum Zielpunkt K_2, also liegt dieser Punkt auch auf g.

$$K_2 \in g \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{K_2} = \begin{pmatrix} 45+3\lambda \\ 60+20\lambda \\ 6+2\lambda \end{pmatrix}$$

> Erläuterung:
>
> Der Punkt K_2 liegt 10 m über dem Spielfeld ($x_1 x_2$-Ebene). Seine x_3-Koordinate ist somit gleich 10.

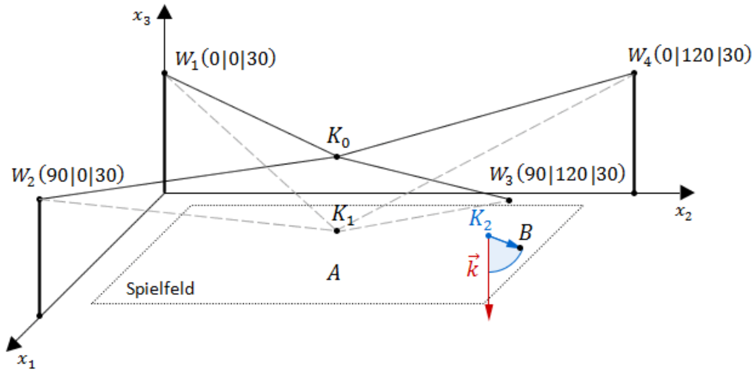
$$6+2\lambda = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{K_2} = \begin{pmatrix} 45+6 \\ 60+40 \\ 6+4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K_2(51|100|10)$$

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Im Zielpunkt ist die Kamera zunächst senkrecht nach unten orientiert. Um die Position des Balls anzuvisieren, die im Modell durch den Punkt $B(40|105|0)$ beschrieben wird, muss die Kamera gedreht werden. Berechnen Sie die Größe des erforderlichen Drehwinkels.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Winkel zwischen zwei Vektoren



$K_2(51|100|10)$, $B(40|105|0)$

$$\overrightarrow{K_2B} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{K_2} = \begin{pmatrix} 40 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Richtungsvektor*
>
> Der Vektor k, der die Richtung der Kamera repräsentiert, ist parallel zur x_3-Achse, da er senkrecht zur $x_1 x_2$-Ebene verläuft.

$$\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{K_2B} \circ \overrightarrow{k}}{\left|\overrightarrow{K_2B}\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos\alpha == \frac{0+0+10}{\sqrt{11^2+5^2+10^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{10}{\sqrt{246}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{246}}\right) \approx 50,4^\circ$$

Teilaufgabe Teil B d (7 BE)

Der Torwart führt den Abstoß aus. Der höchste Punkt der Flugbahn des Balls wird im Modell durch den Punkt $H(50|70|15)$ beschrieben.

Ermitteln Sie eine Gleichung der durch die Punkte W_1, W_2 und K_2 festgelegten Ebene E in Normalenform und weisen Sie nach, dass H unterhalb von E liegt.

[Mögliches Teilergebnis: $E: x_2 + 5x_3 - 150 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Ebene aus drei Punkte

$W_1(0|0|30)$, $W_2(90|0|30)$, $K_2(51|100|10)$

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{W_1W_2} = \overrightarrow{W_2} - \overrightarrow{W_1} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{W_1K_2} = \overrightarrow{K_2} - \overrightarrow{W_1} = \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ -20 \end{pmatrix}$$

W_1 sei der Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-20) - 0 \cdot 100 \\ 0 \cdot 51 - 90 \cdot (-20) \\ 90 \cdot 100 - 0 \cdot 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1800 \\ 9000 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{W_1W_2} \times \overrightarrow{W_1K_2} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1800 \\ 9000 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Multiplizieren/Teilen mit/durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 1800 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n} = \frac{1}{1800} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1800 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

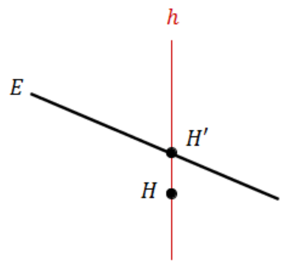
Hier (W_1 ist Aufpunkt):

$$E : \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{W_1}}$$

$E : x_2 + 5x_3 = 0 + 0 + 150$

$E : x_2 + 5x_3 = 150$

Geradengleichung aufstellen



Gerade h durch H senkrecht zur $x_1\,x_2$-Ebene:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Der Richtungsvektor der Geraden h ist parallel zur x_3-Koordinatenachse.

$$h : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{H}} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Schnitt Ebene und Gerade

Gerade h mit Ebene E schneiden: $E \cap h$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also h in E eingesetzt und nach μ aufgelöst.

$$\begin{array}{rcl} E \cap h: \quad 70 + 5 \cdot (15 + \mu) & = & 150 \\ 70 + 75 + 5\mu & = & 150 \\ 5\mu & = & 5 \\ \mu & = & 1 \end{array}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wird der gefundene μ-Wert in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\overrightarrow{H'} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 15 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H'(50|70|16)$$

Erläuterung:

Die Punkte H und H' unterscheiden sich nur in der x_3-Koordinate.

Da $16 > 15$, liegt H' oberhalb von H.

Der Punkt H' liegt oberhalb von H.
Da H' auf der Ebene E liegt, liegt somit H unterhalb der Ebene.

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Machen Sie plausibel, dass folgende allgemeine Schlussfolgerung falsch ist: „Liegen der Startpunkt und der anvisierte höchste Punkt einer Flugbahn des Balls im Modell unterhalb der Ebene E, so kann der Ball entlang seiner Bahn die Seile, die durch $[W_1 K_2]$ und $[W_2 K_2]$ beschrieben werden, nicht berühren.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Anwendungsaufgabe

Die Ebene E ist gegenüber der $x_1 x_2$-Ebene geneigt.
Die Flugbahn eines Balles ist gekrümmt, sodass es möglich ist, dass diese die Ebene E nach erreichen des höchsten Punktes trotzdem berühren bzw. schneiden kann.

Skizze: