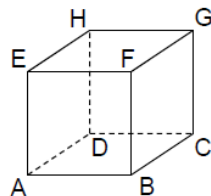


Abitur 2016 Mathematik Geometrie V

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$.

Die Eckpunkte D , E , F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Der Punkt P liegt auf der Kante $[FB]$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P .

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g .
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

- I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
- II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E , in der das Dreieck ABC liegt, in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E : x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$]

Spiegelt man die Punkte A , B und C am Symmetriezentrum $Z(3|3|3)$, so erhält man die Punkte A' , B' bzw. C' .

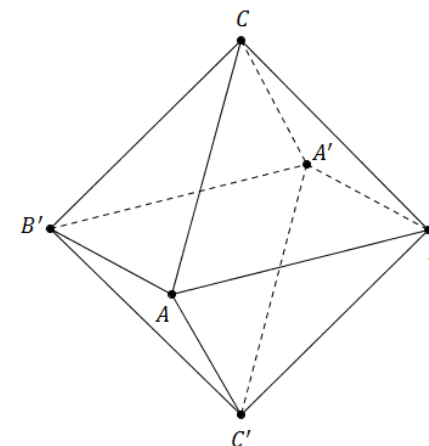
Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Beschreiben Sie die Lage der Ebene, in der die Punkte A , B und Z liegen, im Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass die Strecke $[CC']$ senkrecht auf dieser Ebene steht.

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Begründen Sie, dass das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

Der Körper $ABA'B'CC'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $ABA'B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C bzw. C' .



Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

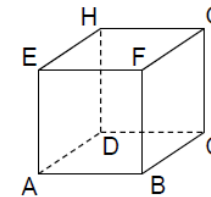
Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.

Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.

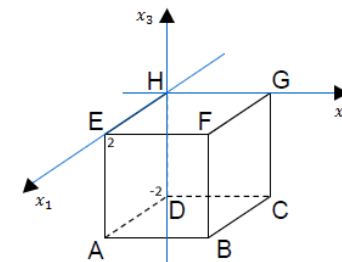
Lösung**Teilaufgabe Teil A 1a** (2 BE)

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$.

Die Eckpunkte D , E , F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a**Skizze****Koordinaten von Punkten ermitteln**

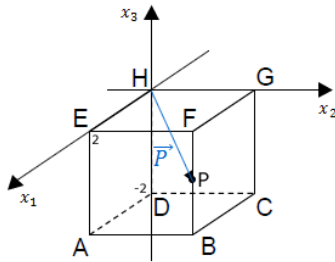
$$A(2|0|-2)$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Der Punkt P liegt auf der Kante $[FB]$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P .

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Länge eines Vektors



Erläuterung: Punktkoordinaten

Der Punkt P hat die gleiche x_1 - und x_2 -Koordinate wie der Punkt F . Seine x_3 -Koordinate muss negativ sein, da er auf der Kante $[FB]$ liegt.

Koordinaten des Punktes P : $P(2|2|\lambda)$ mit $\lambda < 0$

Es gilt: $|\vec{p}| = 3$

Erläuterung: Betrag eines Vektors

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + \lambda^2} = \sqrt{8 + \lambda^2}$$

$$\sqrt{8 + \lambda^2} = 3 \quad |^2$$

$$8 + \lambda^2 = 9$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad (\lambda_2 = 1)$$

$$\Rightarrow P(2|2|-1)$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\vec{CA} = 2 \cdot \vec{AB}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Koordinaten von Punkten ermitteln

Es soll gelten: $\vec{CA} = 2 \cdot \vec{AB}$

$$\vec{A} - \vec{C} = 2 \cdot [\vec{B} - \vec{A}] \quad | \text{ nach } \vec{C} \text{ umstellen}$$

$$\vec{C} = \vec{A} - 2 \cdot [\vec{B} - \vec{A}]$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C(2|3|0)$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

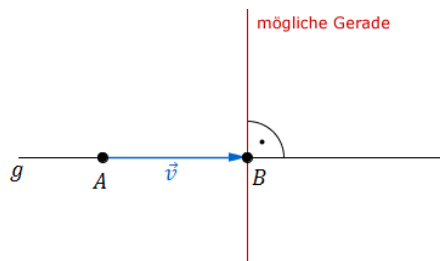
Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g .
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

- I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
- II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Geradengleichung aufstellen



$$\text{Richtungsvektor der Geraden } g: \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\text{Möglicher Richtungsvektor der Geraden: } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Begründung: } \vec{v} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0$$

Geradengleichung einer der Geraden:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor \vec{P} und einen Richtungsvektor \vec{v} eindeutig bestimmt:

$$l: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn B als Aufpunkt genommen wird, dann ist \vec{B} der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden l .

$$h: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g schneidet die Gerade h im Punkt B , und da $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$, ist der Abstand der Geraden vom Punkt A gleich 3.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

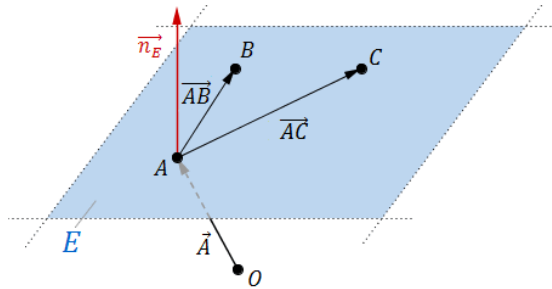
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E , in der das Dreieck ABC liegt, in Normalen-

form.

[mögliches Ergebnis: $E : x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Ebene aus drei Punkte



Richtungsvektoren der Ebene E :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A(6|3|3)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E .

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor \vec{n}_E der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Vektor \vec{n} , der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 0 \\ 0 - (-3) \cdot 3 \\ 0 - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen. Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einem Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 9 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \vec{n}_E = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf diese Ebene.

Ein zum Normalenvektor paralleler Vektor steht somit auch senkrecht auf diese Ebene.

⇒ $[C C']$ steht senkrecht auf der Ebene

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Begründen Sie, dass das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Eigenschaften eines Parallelogramms

Das Viereck $ABA'B'$ ist wegen seiner Konstruktion punktsymmetrisch und somit ein Parallelogramm.

Spiegelpunkt

$A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$, $Z(3|3|3)$

Der Punkt B' lässt sich analog zum Punkt C' aus Teilaufgabe Teil B b bestimmen:

$$\vec{B}' = \vec{B} + 2 \cdot \vec{BZ}$$

$$\vec{B}' = \vec{B} + 2 \cdot [\vec{Z} - \vec{B}]$$

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}' = \vec{B}' - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$|\vec{AB}'| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

⇒ Alle Seiten sind gleich lang

Lagebeziehung von Vektoren

$$\vec{AB} \circ \vec{AB}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 - 9 + 0 = 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

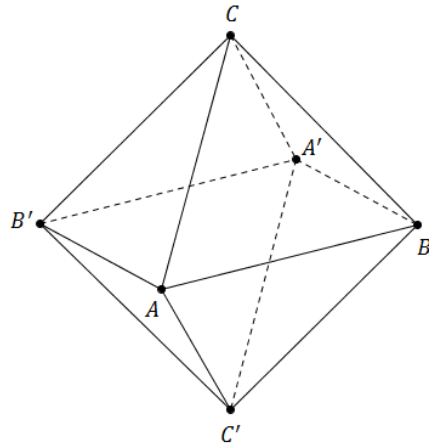
$$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AB}'$$

⇒ $ABA'B'$ ist ein Quadrat

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Der Körper $ABA'B'CC'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $ABA'B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C

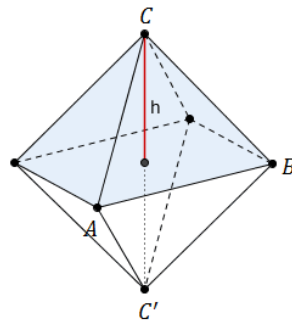
bzw. C' .



Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Volumen einer Pyramide

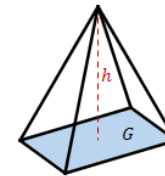


$C(3|3|6)$, $C(3|3|0)$

$$|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2} \quad (\text{s. Teil B Teilaufgabe c})$$

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot V_{\text{Pyramide}}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung:

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenlänge \overline{AB} .

$[CC']$ steht senkrecht auf die Grundfläche, deswegen entspricht die Höhe der Pyramide der Hälfte der Strecke $[CC']$.

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{CC'}}{2}$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Punkte C und C' unterscheiden sich nur in der x_3 -Koordinate. Ihr Abstand ist also gleich 6.

Alternativ:

$$\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{CC'}| = \sqrt{0+0+36} = 6$$

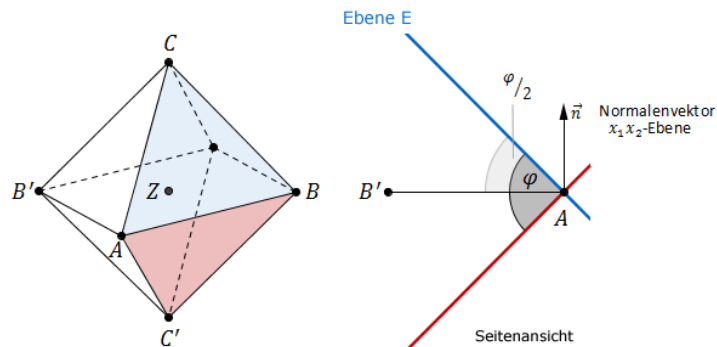
$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \frac{6}{2} = 36$$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Winkel zwischen zwei Ebenen



Erläuterung:

Begründung:

- Die Seitenfläche ABC liegt in der Ebene E (s. Teilaufgabe Teil B a).
- Die Ebene, in der die Punkte A , B und Z (Symmetriezentrum) liegen, ist parallel zur x_1x_2 -Ebene (s. Teilaufgabe Teil B b).
- Die Ebene in der die Seitenfläche $AC'B$ liegt, bildet mit der x_1x_2 -Ebene aus Symmetrie-Gründen den gleichen Winkel, wie die Ebene E und die x_1x_2 -Ebene.

Der gesuchte Winkel φ entspricht zweimal dem Winkel zwischen der Ebene E (aus Teilaufgabe Teil B a) und der x_1x_2 -Ebene.

Normalenvektor der Ebene E : $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

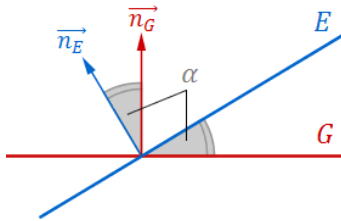
Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf dieser Ebene und hat eine beliebige Länge.

Im Falle der x_1x_2 -Ebene (Koordinatenebene) wählt man z.B. als Normalenvektor den Einheitsvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der auch Richtungsvektor der x_3 -Achse ist.

Normalenvektor der x_1x_2 -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: Winkel zwischen zwei Ebenen



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren \vec{n}_E und \vec{n}_G .

Winkel φ zwischen den Seitenflächen bestimmen:

Erläuterung: Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

Erläuterung: Betrag eines Vektors

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 54,7^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 109,4^\circ$$

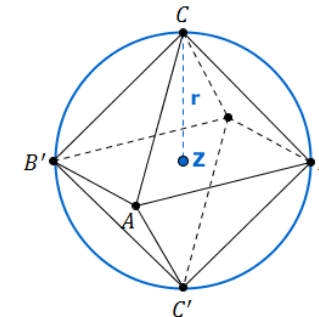
Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.

Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Kugel



$Z(3|3|3)$ (Mittelpunkt der Kugel)

$r = h_{\text{Pyramide}} = 3$ (Radius der Kugel)

Erläuterung: *Kugelgleichung*

Die Gleichung einer Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r ist gegeben durch:

$$K : \left[\vec{X} - \vec{M} \right]^2 = r^2$$

$$K : \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$$

Volumen einer Kugel

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

$$V_{\text{Oktaeder}} = 36$$

$$\text{Anteil: } \frac{V_{\text{Oktaeder}}}{V_{\text{Kugel}}} = \frac{36}{36\pi} = \frac{1}{\pi}$$