

Abitur 2015 Mathematik Stochastik IV

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Aus dieser wird achtmal eine Kugel zufällig gezogen, die Farbe notiert und die Kugel anschließend wieder zurückgelegt.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden gleich viele rote und blaue Kugeln gezogen.“ berechnet werden kann.

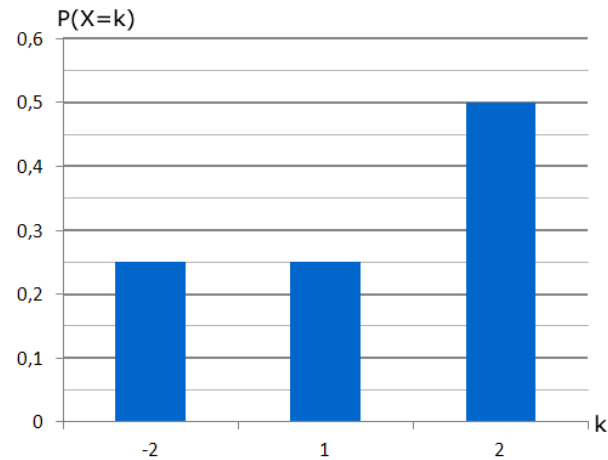
Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den angegebenen Term berechnet werden kann.

$$\alpha) 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8$$

$$\beta) \left(\frac{3}{5}\right)^8 + 8 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7$$

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte $-2, 1$ und 2 annehmen kann. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



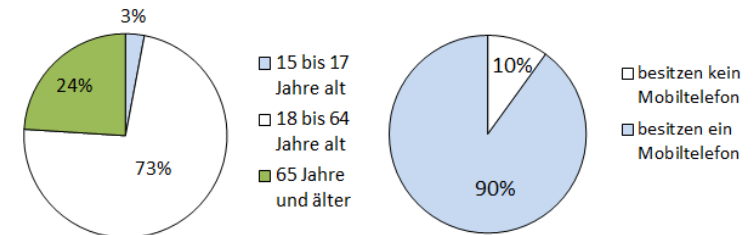
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X .

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

Die beiden Diagramme zeigen für die Bevölkerungsgruppe der über 14-Jährigen in Deutschland Daten zur Altersstruktur und zum Besitz von Mobiltelefonen.



Aus den über 14-Jährigen in Deutschland wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

M : „Die Person besitzt ein Mobiltelefon.“

S : „Die Person ist 65 Jahre oder älter.“

E : „Mindestens eines der Ereignisse M und S tritt ein.“

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Geben Sie an, welche zwei der folgenden Mengen I bis VI jeweils das Ereignis E beschreiben.

- | | | | |
|-----|--|----|--|
| I | $M \cap S$ | II | $M \cup S$ |
| III | $\overline{M \cup S}$ | IV | $(M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S) \cup (\overline{M} \cap \overline{S})$ |
| V | $(M \cap S) \cup (M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S)$ | VI | $\overline{M \cap S}$ |

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Entscheiden Sie anhand geeigneter Terme und auf der Grundlage der vorliegenden Daten, welche der beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

p_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn bekannt ist, dass sie 65 Jahre oder älter ist.

p_2 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn bekannt ist, dass sie ein Mobiltelefon besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachverhalt für den Fall, dass das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eintritt, eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit $P_S(M)$.

Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow zum Thema „Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren in Deutschland mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon besitzen.

Teilaufgabe Teil B 3 (4 BE)

Eine Handelskette hat noch zahlreiche Smartphones des Modells Y3 auf Lager, als der Hersteller das Nachfolgemodell Y4 auf den Markt bringt. Der Einkaufspreis für das neue Y4 beträgt 300 €, während die Handelskette für das Vorgängermodell Y3 im Einkauf nur 250 € bezahlen musste. Um die Lagerbestände noch zu verkaufen, bietet die Handelskette ab dem Verkaufsstart des Y4 die Smartphones des Typs Y3 für je 199 € an.

Aufgrund früherer Erfahrungen geht die Handelskette davon aus, dass von den verkauften Smartphones der Modelle Y3 und Y4 trotz des Preisnachlasses nur 26% vom Typ Y3 sein werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung, zu welchem Preis die Handelskette das Y4 anbieten muss, damit sie voraussichtlich pro verkauftem Smartphone der Modelle Y3 und Y4 im Mittel 97 € mehr erhält, als sie beim Einkauf dafür zahlen musste.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Aus dieser wird achtmal eine Kugel zufällig gezogen, die Farbe notiert und die Kugel anschließend wieder zurückgelegt.

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden gleich viele rote und blaue Kugeln gezogen.“ berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Binomialverteilung

A: „Es werden gleich viele rote und blaue Kugeln gezogen.“

4 rote Kugeln + 6 blaue Kugeln = 10 Kugeln

$$p = P(\text{„rote Kugel“}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$q = 1 - p = \frac{3}{5}$$

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 8$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$ angesehen werden.

$$n = 8$$

$$k = 4$$

$$P(A) = P_{\frac{2}{5}}^8(X = 4)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P(A) = \binom{8}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den angegebenen Term berechnet werden kann.

$$\alpha) 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8$$

$$\beta) \left(\frac{3}{5}\right)^8 + 8 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Binomialverteilung

$$\alpha) 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Term untersuchen:

$\frac{3}{5}$ ist die Wahrscheinlichkeit eine blaue Kugel zu ziehen.

$\left(\frac{3}{5}\right)^8$ ist die Wahrscheinlichkeit nur blaue Kugeln zu ziehen. Anders ausgedrückt: die Wahrscheinlichkeit keine rote Kugel zu ziehen.

$1 - P(\text{Ereignis})$ stellt die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses dar. Das Gegenereignis zu „keine rote Kugel“ lautet „mindestens eine rote Kugel“.

Als Ergebnis der Bernoulli-Formel mit $n = 8$, $k \geq 1$ und $p = \frac{2}{5}$ (= Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel):

$$P_{\frac{2}{5}}^8(X \geq 1) = 1 - P_{\frac{2}{5}}^8(X = 0) = 1 - \underbrace{\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^8}_1 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8$$

z. B.: Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen.

$$\beta) \left(\frac{3}{5}\right)^8 + 8 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^7$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Term untersuchen:

$\left(\frac{3}{5}\right)^8$ ist die Wahrscheinlichkeit 8 blaue Kugeln zu ziehen.

$8 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^7$ kann geschrieben werden als $\binom{8}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^7$. Dieser Term entspricht der Bernoulli-Formel für $n = 8$, $k = 1$ und $p = \frac{2}{5}$ (rote Kugel), also $P_{\frac{2}{5}}^8(X = 1)$. Das ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen, oder anders ausgedrückt, die Wahrscheinlichkeit 7 blaue Kugeln zu ziehen.

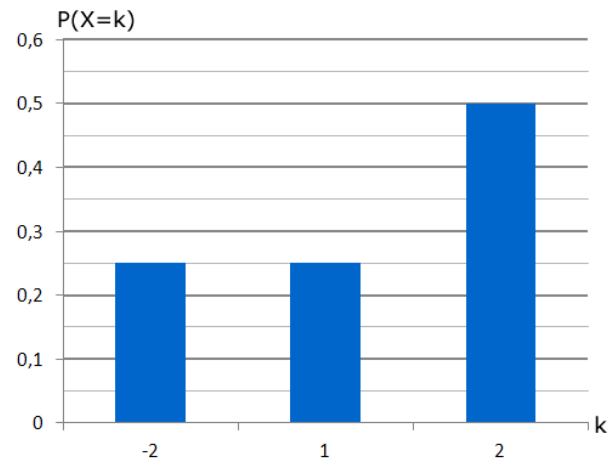
Die Summe der beiden Terme bedeutet, dass Alternativen zusammenaddiert werden.

$\left(\frac{3}{5}\right)^8 + 8 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^7$ ist also die Wahrscheinlichkeit **entweder** 8 blaue Kugeln **oder** 7 blaue Kugeln zu ziehen. Dies kann mit „mindestens 7 blaue Kugeln“ ausgedrückt werden.

z. B.: Es werden mindestens 7 blaue Kugeln gezogen.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte -2 , 1 und 2 annehmen kann. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X .

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle:

k_i	-2	1	2
$P(X = k_i)$	0,25	0,25	0,5

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier 3), ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$E(X) = -2 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 = 0,75$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

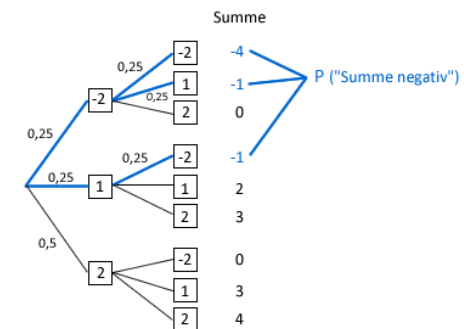
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm erstellen:

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

Die Wahrscheinlichkeiten werden der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teil A Teilaufgabe 2a entnommen.



Erläuterung: 1. Pfadregel, 2. Pfadregel

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$$P(-2 \cap -2) = P(-2) \cdot P_{-2}(-2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(-2 \cap 1) = P(-2) \cdot P_{-2}(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(1 \cap -2) = P(1) \cdot P_1(-2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

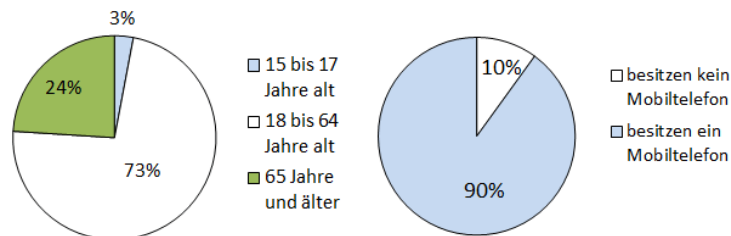
2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(\text{„Summe ist negativ“}) = P(-2 \cap -2) + P(-2 \cap 1) + P(1 \cap -2)$

$$P(\text{„Summe ist negativ“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Die beiden Diagramme zeigen für die Bevölkerungsgruppe der über 14-Jährigen in Deutschland Daten zur Altersstruktur und zum Besitz von Mobiltelefonen.



Aus den über 14-Jährigen in Deutschland wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

M : „Die Person besitzt ein Mobiltelefon.“

S : „Die Person ist 65 Jahre oder älter.“

E : „Mindestens eines der Ereignisse M und S tritt ein.“

Geben Sie an, welche zwei der folgenden Mengen I bis VI jeweils das Ereignis E beschreiben.

- | | | | |
|-----|--|----|--|
| I | $M \cap S$ | II | $M \cup S$ |
| III | $\overline{M \cup S}$ | IV | $(M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S) \cup (\overline{M} \cap \overline{S})$ |
| V | $(M \cap S) \cup (M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S)$ | VI | $\overline{M \cap S}$ |

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Ereignis beschreiben

Darstellung des Ereignisses E in eine Vierfeldertafel:

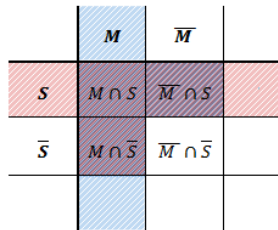
Erläuterung: Ereignis

Das Ereignis E : „Mindestens eines der Ereignisse M und S tritt ein.“ bedeutet:

Entweder es tritt M und nicht S ein ($M \cap \overline{S}$) oder es tritt S und nicht M ein ($S \cap \overline{M}$) oder es treten beide zusammen ein ($M \cap S$).

	M	\overline{M}	
S	$M \cap S$	$\overline{M} \cap S$	S
\overline{S}	$M \cap \overline{S}$	$\overline{M} \cap \overline{S}$	\overline{S}
	M	\overline{M}	Ω

Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse*



Die violette schraffierte Fläche stellt die Vereinigung von M und S dar.

Bei der Vereinigung von zwei Ereignissen tritt **entweder** das eine **oder** das andere Ereignis ein.

$$\Rightarrow M \cup S \quad (\text{Mengen II})$$

Erläuterung:

An der Vierfeldertafel kann die schraffierte Menge direkt abgelesen werden.

$$\Rightarrow (M \cap S) \cup (M \cap \bar{S}) \cup (\bar{M} \cap S) \quad (\text{Mengen V})$$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Entscheiden Sie anhand geeigneter Terme und auf der Grundlage der vorliegenden Daten, welche der beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

p_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn bekannt ist, dass sie 65 Jahre oder älter ist.

p_2 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn bekannt ist, dass sie ein Mobiltelefon besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

M : „Die Person besitzt ein Mobiltelefon.“

S : „Die Person ist 65 Jahre oder älter.“

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Die Bezeichnung $P_S(M)$ bedeutet:

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M unter der Bedingung, dass das Ereignis S bereits eingetreten ist.
Diese Wahrscheinlichkeit heißt bedingte Wahrscheinlichkeit.

$$p_1 = P_S(M)$$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Die Bezeichnung $P_M(S)$ bedeutet:

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses S unter der Bedingung, dass das Ereignis M bereits eingetreten ist.
Diese Wahrscheinlichkeit heißt bedingte Wahrscheinlichkeit.

$$p_2 = P_M(S)$$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$p_1 = \frac{P(S \cap M)}{P(S)}; \quad p_2 = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$$

Erläuterung:

Die Zähler von $p_1 = \frac{P(S \cap M)}{P(S)}$ und $p_2 = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$ sind gleich, also ist derjenige Bruch größer, der den kleineren Nenner hat.

Aus den Diagrammen der Teilaufgabe Teil B 1a entnimmt man, dass $P(S) = 24\%$ und $P(M) = 90\%$.

Somit gilt $P(S) < P(M)$ und demnach $p_1 > p_2$.

Da $\underbrace{P(S)}_{0,24} < \underbrace{P(M)}_{0,9}$ gilt und die Zähler gleich sind, ist $p_1 > p_2$.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachverhalt für den Fall, dass das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eintritt, eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit $P_S(M)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Aus Teilaufgabe Teil B 1a ist bekannt:

$$P(M) = 90\% = 0,9$$

$$P(S) = 24\% = 0,24$$

Für die Gegenereignisse ergibt sich somit:

$$P(\bar{M}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P(\bar{S}) = 1 - 0,24 = 0,76$$

Aus Teilaufgabe Teil B 1b ist weiterhin bekannt: $P(E) = P(M \cup S) = 0,98$

$$\Rightarrow P(\bar{M} \cap \bar{S}) = 1 - 0,98 = 0,02$$

Werte in eine Vierfeldertafel eintragen:

	M	\bar{M}	
S			0,24
\bar{S}		0,02	0,76
	0,9	0,1	1

Vierfeldertafel vervollständigen:

	M	\bar{M}	
S	0,16	0,08	0,24
\bar{S}	0,74	0,02	0,76
	0,9	0,1	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0,16}{0,24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Erläuterung: Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow

zum Thema „Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren in Deutschland mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Binomialverteilung

Ereignis A: „Unter 30 Senioren besitzen mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon“

$$p = P(\text{„Senior besitzt ein Mobiltelefon“}) = \frac{2}{3}$$

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

$$\begin{array}{lll} p & \text{Wahrscheinlichkeit für einen Treffer} & \text{hier : } p = \frac{2}{3} \\ q = 1 - p & \text{Wahrscheinlichkeit für eine Niete} & \text{hier : } q = \frac{1}{3} \end{array}$$

In diesem Fall ist ein Senior mit ein Mobiltelefon ein Treffer.

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

$$n \quad \text{Anzahl der Züge („Länge“ der Bernoulli-Kette)} \quad \text{hier : } n = 30$$

Bernoulli-Kette mit $n = 30$ und $p = \frac{2}{3}$.

Erläuterung: *Ereignis*

$$\text{„... mindestens 17 und höchstens 23 ...“} \Rightarrow 17 \leq X \leq 23$$

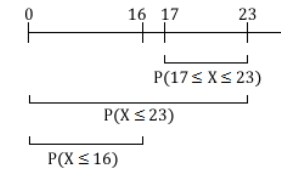
$$P(A) = P_{\frac{2}{3}}^{30}(17 \leq X \leq 23)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$$P(A) = P_{\frac{2}{3}}^{30}(X \leq 23) - P_{\frac{2}{3}}^{30}(X \leq 16)$$

(Werte werden aus dem stochastischen Tafelwerk entnommen)

$$P(A) \approx 0,91616 - 0,08977$$

$$P(A) \approx 82,6\%$$

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon besitzen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

E: „2 von 3 Senioren besitzen ein Mobiltelefon“

Erläuterung: Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen

Es handelt sich hier um Ziehen ohne Reihenfolge (welcher Senior wann befragt wird ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (eine Person wird nur einmal befragt).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \cdot \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

2 Senioren mit Mobiltelefon (aus den möglichen 24) werden ausgewählt:

$$\Rightarrow |\text{Treffer}| = \binom{24}{2}$$

1 Senior ohne Mobiltelefon (aus den übrigen 6) werden ausgewählt:

$$\Rightarrow |\text{Niete}| = \binom{6}{1}$$

3 Senioren werden aus 30 gezogen:

$$\Rightarrow |\Omega| = \binom{30}{3}$$

Merkhilfe zur Kontrolle:

$$\binom{24}{2} \cdot \binom{6}{1} = \binom{30}{3}$$

$$P(E) = \frac{\binom{24}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{30}{3}} \approx 40,8\%$$

Teilaufgabe Teil B 3 (4 BE)

Eine Handelskette hat noch zahlreiche Smartphones des Modells Y3 auf Lager, als der Hersteller das Nachfolgemodell Y4 auf den Markt bringt. Der Einkaufspreis für das neue Y4 beträgt 300 €, während die Handelskette für das Vorgängermodell Y3 im Einkauf nur 250 € bezahlen musste. Um die Lagerbestände noch zu verkaufen, bietet die Handelskette ab dem Verkaufsstart des Y4 die Smartphones des Typs Y3 für je 199 € an.

Aufgrund früherer Erfahrungen geht die Handelskette davon aus, dass von den verkauften Smartphones der Modelle Y3 und Y4 trotz des Preisnachlasses nur 26% vom Typ Y3 sein werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung, zu welchem Preis die Handelskette das Y4 anbieten muss, damit sie voraussichtlich pro verkauftem Smartphone der Modelle Y3 und Y4 im Mittel 97 € mehr erhält, als sie beim Einkauf dafür zahlen musste.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$P(\text{„Verkauft wurde ein Y3“}) = 0,26$$

$$P(\text{„Verkauft wurde ein Y4“}) = 1 - 0,26 = 0,74$$

x_i	Y3	Y4
$p_i = P(X = x_i)$	0,26	0,74
Kosten $K(x_i)$	250 €	300 €
Verkaufspreis $V(x_i)$	199 €	x

Im Mittel zu erwartende Kosten bestimmen:

Erläuterung: Erwartungswert einer Zufallsgröße

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X (hier K) bei n Versuchen (hier 2), ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

In diesem Fall:

$$E(K) = \sum_{i=1}^2 K(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

$$E(K) = 0,26 \cdot 250 + 0,74 \cdot 300 = 287 \text{ €}$$

Im Mittel zu erwartende Einnahmen V bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X (hier V) bei n Versuchen (hier 2), ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

In diesem Fall:

$$E(V) = \sum_{i=1}^2 V(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

$$E(V) = 0,26 \cdot 199 + 0,74 \cdot x$$

$$\text{Es soll gelten: } E(V) = E(K) + 97 = 287 + 97 = 384 \text{ €}$$

Einsetzen in $E(V)$ und nach x auflösen:

$$384 = 0,26 \cdot 199 + 0,74 \cdot x$$

$$x = \frac{384 - 0,26 \cdot 199}{0,74} = 449 \text{ €}$$