Fachabitur 2015 Mathematik NT Stochastik S II

Die zwei Freundinnen Anna und Eva besuchen das örtliche Volksfest. Im Festzelt wird ein besonderes Glücksspiel angeboten:
Gegen eine Teilnahmegebühr von 2,00 € kann bis zu zweimal an einem Glücksrad gedreht werden. Das Glücksrad hat 36 Sektoren, davon sind 18 Sektoren rot (r), 12 gelb (g) und 6 schwarz (s). Wenn der Spieler ein rotes Feld trifft, darf er kein zweites Mal drehen. Trifft der Spieler zweimal ein gelbes oder schwarzes Feld, so erhält er seinen Einsatz zurück. Trifft der Spieler jedoch beim ersten Drehen die Farbe Gelb und im zweiten die Farbe Schwarz, so bekommt er eine Getränkemarke im Wert von 9 €. Trifft der Spieler hingegen beim ersten Mal ein schwarzes Feld und beim zweiten Mal ein gelbes Feld, so erhält er zwei Getränkemarken im Wert von insgesamt 18 €. In allen anderen Fällen geschieht keine Auszahlung.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Erstellen Sie für dieses Glücksspiel ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.
[Teilergebnis: $P\left(\{g\,g\}\right) = \frac{1}{9}$]

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: „Es wird ein rotes Feld getroffen."
E_2: „Es wird zweimal dieselbe Farbe getroffen."
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt den Reingewinn, den der Festwirt durch ein Spiel des Glücksspiels erhält. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in tabellarischer Form und geeignet graphisch dar.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Anna und Eva spielen insgesamt zehnmal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_3: „Gelb/Gelb erscheint nur genau beim vierten und fünften Spiel."
E_4: „Beim ersten und letzten Spiel erscheint Rot, dazwischen genau dreimal Gelb/Gelb, und zwar jeweils hintereinander."

Anna und Eva versuchen ihr Glück an der Schießbude. Sie schießen jeweils einmal. Anna trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 32% (Ereignis A), Eva mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% (Ereignis E). Die Wahrscheinlichkeit, dass beide treffen, liegt bei $20,8\%$.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Berechnen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den beiden Mädchen
a) keine trifft,
b) genau eine trifft,
c) höchstens eine trifft.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{\overline{A} \cap E}$ und beschreiben Sie dieses Ereignis möglichst einfach in Worten.

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Untersuchen Sie die Ereignisse A: „Anna trifft" und E: „Eva trifft" auf stochastische Unabhängigkeit.

Im Festzelt treffen Anna und Eva auf Dora, Max, Horst und Klaus.

Teilaufgabe 3.1 (2 BE)

Die sechs jungen Leute bilden bei einer Polonaise eine „bunte" Reihe, d. h. abwechselnd Mädchen und Junge. Berechnen Sie, wie viele Anordnungen hierfür möglich sind.

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Bei einer zweiten Polonaise ist Max nicht dabei, da er mit einem Mädchen am Nebentisch flirtet. Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es jetzt für die „bunte" Reihe gibt.

Teilaufgabe 4. (6 BE)

„Jedes 4. Los gewinnt" behauptet der Werbeslogan einer Losbude. Die misstrauische Eva glaubt diese Behauptung nicht. Sie glaubt, dass weniger Lose gewinnen (Gegenhypothese). Dies soll anhand einer Stichprobe von 50 Losen getestet werden.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 10 Gewinnlose in der Stichprobe enthalten sind?

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Die zwei Freundinnen Anna und Eva besuchen das örtliche Volksfest. Im Festzelt wird ein besonderes Glücksspiel angeboten:
Gegen eine Teilnahmegebühr von 2,00 € kann bis zu zweimal an einem Glücksrad gedreht werden. Das Glücksrad hat 36 Sektoren, davon sind 18 Sektoren rot (r), 12 gelb (g) und 6 schwarz (s). Wenn der Spieler ein rotes Feld trifft, darf er kein zweites Mal drehen. Trifft der Spieler zweimal ein gelbes oder schwarzes Feld, so erhält er seinen Einsatz zurück. Trifft der Spieler jedoch beim ersten Drehen die Farbe Gelb und im zweiten die Farbe Schwarz, so bekommt er eine Getränkemarke im Wert von 9 €. Trifft der Spieler hingegen beim ersten Mal ein schwarzes Feld und beim zweiten Mal ein gelbes Feld, so erhält er zwei Getränkemarken im Wert von insgesamt 18 €. In allen anderen Fällen geschieht keine Auszahlung.

Erstellen Sie für dieses Glücksspiel ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.
[Teilergebnis: $P(\{g\,g\}) = \frac{1}{9}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Wahrscheinlichkeit

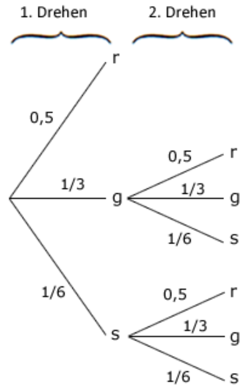
Aus dem Text der Einleitung:

$$p(r) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad p(g) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad p(s) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Baumdiagramm zeichnen:

Erläuterung:

Wenn der Spieler ein rotes Feld trifft, darf er kein zweites Mal drehen.



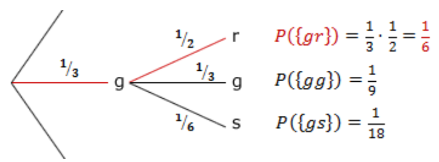
Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bestimmen:

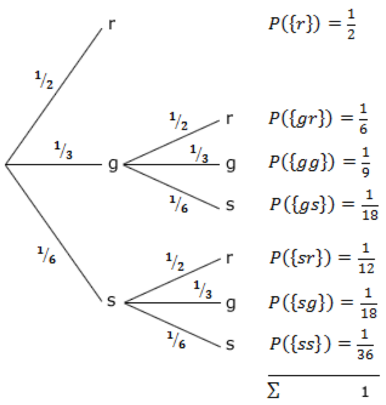
Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall z.B.:

$$P(\{g\,r\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



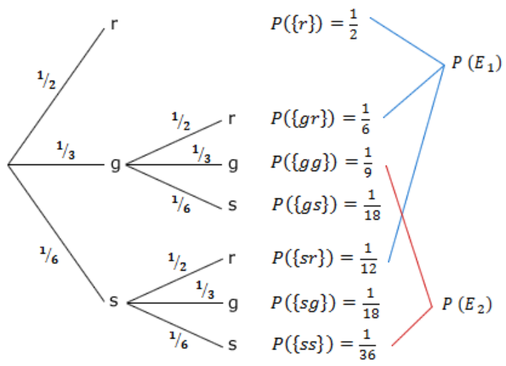


Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: „Es wird ein rotes Feld getroffen."
E_2: „Es wird zweimal dieselbe Farbe getroffen."
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Wahrscheinlichkeit



$E_1 = \{r; g\,r; s\,r\}$

$E_2 = \{g\,g; s\,s\}$

Erläuterung: *2. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

$$P\,(E_1) = P\,(\{r\}) + P\,(\{g\,r\}) + P\,(\{s\,r\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$P\,(E_2) = P\,(\{g\,g\}) + P\,(\{s\,s\}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

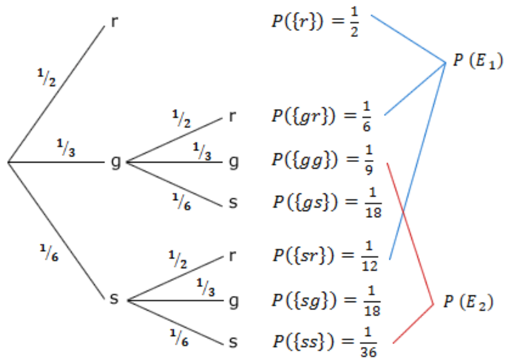
Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt den Reingewinn, den der Festwirt durch ein Spiel des Glücksspiels erhält. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in tabellarischer Form und geeignet graphisch dar.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Baumdiagramm aus vorheriger Teilaufgabe:



Reingewinn:

Erläuterung:

Aus der Einleitung zur Teilaufgabe 1:

Teilnahmegebühr: 2,00 €

Trifft ein Spieler zweimal ein gelbes oder schwarzes Feld, so erhält er seinen Einsatz zurück.
$\Rightarrow$ Gewinn Festwirt = 0 €

Trifft ein Spieler beim ersten Drehen die Farbe Gelb und im zweiten die Farbe Schwarz, so bekommt er eine Getränkemarke im Wert von 9 €.
$\Rightarrow$ Gewinn Festwirt = 2 - 9 = -7 €

Trifft ein Spieler beim ersten Mal ein schwarzes Feld und beim zweiten Mal ein gelbes Feld, so erhält er zwei Getränkemarken im Wert von insgesamt 18 €.
$\Rightarrow$ Gewinn Festwirt = 2 - 18 = -16 €

In allen anderen Fällen geschieht keine Auszahlung.
$\Rightarrow$ Gewinn Festwirt = 2 €

2 €, 0 €, -7 € und -16 €

Erläuterung: *Ereignis*

Wenn keine Auszahlung stattfindet, dann ist der Reingewinn gleich 2 €. Das ist der Fall, wenn ein rotes Feld getroffen wird, also das Ereignis E_1 aus Teilaufgabe 1.2.

$$P(X=2) = P\ (E_1) = \frac{3}{4} = \frac{27}{36}$$

Erläuterung: *Ereignis*

Trifft ein Spieler zweimal ein gelbes oder schwarzes Feld, so erhält dieser seinen Einsatz zurück. Der Reingewinn des Wirtes ist dann gleich 0 €.

Dies entspricht dem Ereignis E_2 aus Teilaufgabe 1.2.

$$P(X=0) = P\ (E_2) = \frac{5}{36}$$

Erläuterung: *Ereignis*

Trifft ein Spieler beim ersten Drehen die Farbe Gelb und im zweiten die Farbe Schwarz, so bekommt er eine Getränkemarke im Wert von 9 €.

$\Rightarrow$ Gewinn Festwirt = 2 - 9 = -7 €

$\Rightarrow$ $P(X=-7) = P(\{g\,s\}) = \frac{1}{18}$

Der Wert von $P(\{g\,s\})$ wird am Baumdiagramm abgelesen.

$$P(X=-7) = P(\{g\,s\}) = \frac{1}{18} = \frac{2}{36}$$

Erläuterung: *Ereignis*

Trifft ein Spieler beim ersten Mal ein schwarzes Feld und beim zweiten Mal ein gelbes Feld, so erhält er zwei Getränkemarken im Wert von insgesamt 18 €.

$\Rightarrow$ Gewinn Festwirt = 2 - 18 = -16 €

$\Rightarrow$ $P(X = -16) = P(\{s\,g\}) = \dfrac{1}{18}$

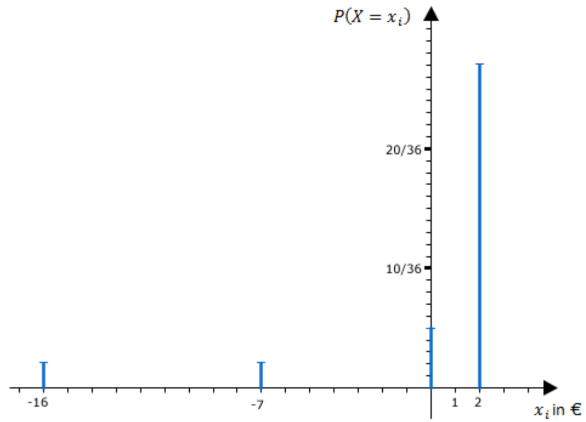
Der Wert von $P(\{s\,g\})$ wird am Baumdiagramm abgelesen.

$P(X = -16) = P(\{s\,g\}) = \dfrac{2}{36}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i in €	2	0	-7	-16	Σ
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

Graphische Darstellung (Stabdiagramm):



Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe 1.3:

x_i in €	2	0	-7	-16	Σ
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$$E(X) = 2 \cdot \frac{27}{36} + 0 \cdot \frac{5}{36} - 7 \cdot \frac{2}{36} - 16 \cdot \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0,22$$

$\Rightarrow$ Der Festwirt erwartet pro Spiel durchschnittlich einen Reingewinn von 22 Cent.

Standardabweichung einer Zufallsgröße

Varianz bestimmen:

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für die Varianz dieser Zufallsgröße:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \qquad (\mu = E(X) = \text{Erwartungswert von } X)$$

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

$$Var(X) = \left(2 - \frac{8}{36}\right)^2 \cdot \frac{27}{36} + \left(0 - \frac{8}{36}\right)^2 \cdot \frac{5}{36} + \left(-7 - \frac{8}{36}\right)^2 \cdot \frac{2}{36} + \left(-16 - \frac{8}{36}\right)^2 \cdot \frac{2}{36} = \frac{3223}{162}$$

Standardabweichung bestimmen:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3223}{162}} \approx 4,46$$

Alternative Lösung

Berechnung der Varianz über die Verschiebungsregel:

$$E\left(X^2\right) = 2^2 \cdot \frac{27}{36} + 0^2 \cdot \frac{5}{36} + (-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (-16)^2 \cdot \frac{2}{36} = \frac{359}{18}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 = \frac{359}{18} - \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{3223}{162}$$

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Anna und Eva spielen insgesamt zehnmal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_3: „Gelb/Gelb erscheint nur genau beim vierten und fünften Spiel.“
E_4: „Beim ersten und letzten Spiel erscheint Rot, dazwischen genau dreimal Gelb/Gelb, und zwar jeweils hintereinander.“

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Binomialverteilung

Aus Teilaufgabe 1.1: $\quad p = P(\{g\,g\}) = \frac{1}{9}$

$q = P(\text{„nicht Gelb/Gelb“}) = 1 - p = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$$P(E_3) = \underbrace{\frac{8}{9}}_{1.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{2.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{3.} \cdot \underbrace{\frac{1}{9}}_{4.} \cdot \underbrace{\frac{1}{9}}_{5.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{6.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{7.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{8.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{9.} \cdot \underbrace{\frac{8}{9}}_{10.} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8 \approx 0,00481$$

Aus Teilaufgabe 1.3: $\quad P(\text{„Rot erscheint“}) = P(E_1) = \frac{3}{4}$

Erläuterung:

Möglichkeiten dreimal Gelb/Gelb hintereinander:

Spiele

Möglichkeit	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1		{gg}	{gg}	{gg}						
2			{gg}	{gg}	{gg}					
3				{gg}	{gg}	{gg}				
4					{gg}	{gg}	{gg}			
5						{gg}	{gg}	{gg}		
6							{gg}	{gg}	{gg}	

Anzahl Möglichkeiten dreimal Gelb/Gelb hintereinander: 6

Erläuterung:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2}_{\text{2x Rot}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^3}_{\text{3x Gelb/Gelb}} \cdot 6 \cdot \underbrace{\left(\frac{8}{9}\right)^5}_{\text{5x nicht Gelb/Gelb}}$$

$$P(E_4) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^5 \approx 0,00257$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Anna und Eva versuchen ihr Glück an der Schießbude. Sie schießen jeweils einmal. Anna trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 32% (Ereignis A), Eva mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% (Ereignis E). Die Wahrscheinlichkeit, dass beide treffen, liegt bei $20,8\%$.

Berechnen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den beiden Mädchen
a) keine trifft,
b) genau eine trifft,
c) höchstens eine trifft.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Wahrscheinlichkeit

$P(A) = P(\text{„Anna trifft“}) = 32\% = 0,32$

$P(E) = P(\text{„Eva trifft“}) = 65\% = 0,65$

$P(A \cap E) = P(\text{„Beide treffen“}) = 20,8\% = 0,208$

	A	$\overline{A}$	Σ
E	0,208		0,65
$\overline{E}$			
Σ	0,32		1

Tafel vervollständigen:

	A	$\overline{A}$	Σ
E	0,208	0,442	0,65
$\overline{E}$	0,112	0,238	0,35
Σ	0,32	0,68	1

Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

Erläuterung: *Ereignis*

„Keine trifft“ = Anna trifft nicht ($\overline{A}$) **und** Eva trifft nicht ($\overline{E}$)

Das “ **und**“ kennzeichnet ein Schnittwahrscheinlichkeit.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann direkt von der Vierfeldertafel abgelesen werden.

$P(\text{„keine trifft“}) = P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = 0,238$

Erläuterung: *Ereignis*

„eine trifft" = entweder „trifft Anna **und** Eva nicht" ($A \cap \overline{E}$) oder „Anna trifft nicht **und** Eva trifft" ($\overline{A} \cap E$).

Das " **und**" kennzeichnet ein Schnittwahrscheinlichkeit.
Das " oder" kennzeichnet Alternativen, die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden addiert.

Die Schnittwahrscheinlichkeiten können direkt von der Vierfeldertafel abgelesen werden.

$P(\text{„eine trifft"}) = P\left(A \cap \overline{E}\right) + P\left(\overline{A} \cap E\right) = 0,112 + 0,442 = 0,554$

Erläuterung: *Ereignis*

„höchstens eine trifft" = entweder „keine trifft" oder „Anna trifft und Eva nicht" oder „Anna trifft nicht und Eva trifft" = „Anna und Eva treffen nicht gleichzeitig" ($\overline{A \cap E}$)

$P(\text{„höchstens eine trifft"}) = P\left(\overline{A \cap E}\right) = 1 - P(A \cap E) = 1 - 0,208 = 0,792$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{\overline{A} \cap E}$ und beschreiben Sie dieses Ereignis möglichst einfach in Worten.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Wahrscheinlichkeit

Vierfeldertafel aus Teilaufgabe 2.1:

	A	$\overline{A}$	Σ
E	0,208	0,442	0,65
$\overline{E}$	0,112	0,238	0,35
Σ	0,32	0,68	1

Erläuterung: *De Morgansche Gesetze*

Gesetze von De Morgan (s. auch Merkhilfe Mathematik):

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

In diesem Fall: $\overline{\overline{A} \cap E} = \underbrace{\overline{\overline{A}}}_{A} \cup \overline{E} = A \cup \overline{E}$

$\overline{\overline{A} \cap E} = A \cup \overline{E}$

„Anna trifft **oder** Eva trifft nicht".

$P\left(\overline{\overline{A} \cap E}\right) = P\left(A \cup \overline{E}\right)$

Erläuterung: *Satz von Sylvester*

Satz von Sylvester (s. auch Merkhilfe Mathematik):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P\left(\overline{\overline{A} \cap E}\right) = P(A) + P\left(\overline{E}\right) - P\left(A \cap \overline{E}\right)$

Erläuterung:

Die Werte für $P(A)$, $P\left(\overline{E}\right)$ und $P\left(A \cap \overline{E}\right)$ können direkt von der Vierfeldertafel abgelesen werden.

$P\left(\overline{\overline{A} \cap E}\right) = 0,32 + 0,35 - 0,112 = 0,558$

Alternative Lösung

$P\left(\overline{\overline{A} \cap E}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cap E\right) = 1 - 0,442 = 0,558$

$\overline{A} \cap E$: „Anna trifft nicht und Eva trifft“

$\overline{\overline{A} \cap E}$: Komplement zu „Anna trifft nicht und Eva trifft“ = „Anna trifft oder Eva trifft nicht“

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Untersuchen Sie die Ereignisse A: „Anna trifft“ und E: „Eva trifft“ auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Stochastische Unabhängigkeit

Vierfeldertafel aus Teilaufgabe 2.1:

	A	$\overline{A}$	Σ
E	0,208	0,442	0,65
$\overline{E}$	0,112	0,238	0,35
Σ	0,32	0,68	1

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse M und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Die Wahrscheinlichkeiten werden aus der Vierfeldertafel entnommen.

$P(A) \cdot P(E) = 0,32 \cdot 0,65 = 0,208 = P(A \cap E)$

$\Rightarrow \quad A$ und E sind stochastisch unabhängig

Teilaufgabe 3.1 (2 BE)

Im Festzelt treffen Anna und Eva auf Dora, Max, Horst und Klaus.

Die sechs jungen Leute bilden bei einer Polonaise eine „bunte“ Reihe, d. h. abwechselnd Mädchen und Junge. Berechnen Sie, wie viele Anordnungen hierfür möglich sind.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Kombinatorik

Entweder	M	J	M	J	M	J
Oder	J	M	J	M	J	M
Möglichkeiten:	3	3	2	2	1	1

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen*

Mädchen (M) und Jungen (J) sollen abwechselnd in der Reihen stehen. Somit gibt es zwei mögliche Reihenfolgen:

M J M J M J oder J M J M J M

Für den ersten und zweiten Platz gibt es jeweils 3 Jungen und 3 Mädchen zur Auswahl.
Für den dritten und vierten gibt es jeweils nur noch 2 Jungen und 2 Mädchen zur Auswahl, da 1 Junge und 1 Mädchen bereits auf den vorherigen zwei Plätzen stehen.
Für die letzten zwei Plätze stehen dann nur noch 1 Mädchen und 1 Junge zur Auswahl.

$|E| = 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) = 2 \cdot 3! \cdot 3!$

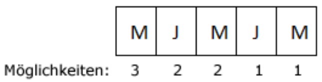
$|E| = 2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Bei einer zweiten Polonaise ist Max nicht dabei, da er mit einem Mädchen am Nebentisch flirtet. Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es jetzt für die „bunte“ Reihe gibt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Kombinatorik



Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen*

Im Gegensatz zu Teilaufgabe 3.1 kann die Reihe hier nur mit einem Mädchen beginnen, da es nur 2 Jungen gibt. Das Zählprinzip für die Möglichkeiten pro Platz ist jedoch identisch.

$|E| = 3! \cdot 2! = 12$

Teilaufgabe 4. (6 BE)

„Jedes 4. Los gewinnt“ behauptet der Werbeslogan einer Losbude. Die misstrauische Eva glaubt diese Behauptung nicht. Sie glaubt, dass weniger Lose gewinnen (Gegenhypothese). Dies soll anhand einer Stichprobe von 50 Losen getestet werden.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 10 Gewinnlose in der Stichprobe enthalten sind?

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

T: Anzahl der Gewinnlose unter 50 gezogenen Losen.

Nullhypothese: $H_0 : p = 0,25$

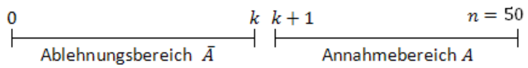
Gegenhypothese: $H_1 : p_1 < 0,25$

Stichprobenumfang: $n = 50$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Erläuterung: *Nullhypothese, Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese “ $p_1 < 0,25$“ bzw. “ **weniger** Lose gewinnen“ lautet, liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 50]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

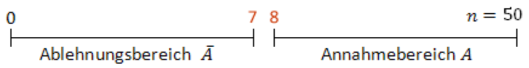
Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($T \leq k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,25}^{50}(T \leq k) \leq 0,05$

$P_{0,25}^{50}(T \leq k) \leq 0,05$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 7$

Entscheidungsregel:



$\overline{A} = \{0, 1, \ldots, 7\}$

$10 \in A$: H_0 wird angenommen