Fachabitur 2015 Mathematik NT Stochastik S I

Ein neues Medikament wird vor der Markteinführung einem klinischen Test unterzogen. Dabei erhält die Hälfte der am Test teilnehmenden Patienten das neue Medikament (M). 30% aller Patienten bekommen ein entsprechendes, schon auf dem Markt vorhandenes Alternativmedikament (A) und der Rest Placebos (P) ohne medizinische Wirkstoffe. Bei 70% der Patienten, die das neue Medikament bekommen haben, stellt sich eine Besserung (B) ein. Bei den Patienten, denen das Alternativmedikament verabreicht wurde, gibt es bei 40% eine Besserung. Insgesamt konnte bei 57% aller getesteten Patienten eine Besserung beobachtet werden.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Bestimmen Sie mithilfe eines vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse und beschreiben Sie das Ereignis $E_1 = \{M\,\overline{B}; A\,\overline{B}\}$ möglichst einfach mit Worten.
[Teilergebnis: $P(\{P\,B\}) = 0,1$]

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Beim klinischen Test mit insgesamt 400 Teilnehmern sind bei 12% Nebenwirkungen (N) aufgetreten. Die Hälfte aller Teilnehmer hat das neue Medikament M bekommen. 168 Personen haben M erhalten, und es sind keine Nebenwirkungen aufgetreten. Untersuchen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Ereignisse M und N auf stochastische Abhängigkeit.

Ein Medikament wird in zwei Varianten (normal und plus) sowie in drei verschiedenen Packungsgrößen ($N1$, $N2$ und $N3$) angeboten. Der Verkaufspreis in Euro wird als Zufallsgröße X aufgefasst. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Art	N1	N1plus	N2	N2plus	N3	N3plus
x	5	7	9	12	22	28
$P(X=x)$	0,1	a	b	$b-0,05$	$a+0,15$	$2a$

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Bestimmen Sie die Werte von a und b, wenn $E(X) = 18,48$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.
[Teilergebnis: $a = 0,16$]

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 2.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Zufallswerte um mehr als die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert unterscheiden und schraffieren Sie die zugehörige Fläche im Histogramm von 2.1.

Bei den Kunden einer bestimmten Apotheke wird eine Umfrage zu ihrem Kaufverhalten durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Kunde ein bestimmtes Medikament kauft, beträgt $p = 0,35$.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Es werden 50 Kunden befragt. Bestimmen Sie die Wahrschein1ichkeiten folgender Ereignisse.
E_2: „Mindestens 13 aber weniger als 21 Kunden kaufen das Medikament."
E_3: „Weniger als 11 Kunden kaufen das Medikament."

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_4 : „Von 10 Kunden kaufen nur genau der 2., 5. und 9. das Medikament."
E_5: „Von 10 Kunden kaufen genau drei das Medikament und diese folgen aufeinander."

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Für ein weiteres Medikament gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer von zwei befragten Kunden dieses Medikament kauft, $\frac{15}{32}$ beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein beliebiger Kunde dieses Medikament kauft (2 Lösungen).

Teilaufgabe 5. (6 BE)

Der Hersteller gibt an, dass ein bestimmtes Medikament bei 70% der Patienten, denen es verabreicht wird, wirksam ist. In einer Klinik wird vermutet, dass der Anteil der Patienten, bei denen das Medikament nicht wirkt, sich erhöht hat (Gegenhypothese) und man führt einen Signifikanztest mit 200 Patienten durch.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an.
Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.
Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn das Medikament bei 73 Patienten unwirksam ist?

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Ein neues Medikament wird vor der Markteinführung einem klinischen Test unterzogen. Dabei erhält die Hälfte der am Test teilnehmenden Patienten das neue Medikament (M). 30% aller Patienten bekommen ein entsprechendes, schon auf dem Markt vorhandenes Alternativmedikament (A) und der Rest Placebos (P) ohne medizinische Wirkstoffe. Bei 70% der Patienten, die das neue Medikament bekommen haben, stellt sich eine Besserung (B) ein. Bei den Patienten, denen das Alternativmedikament verabreicht wurde, gibt es bei 40% eine Besserung. Insgesamt konnte bei 57% aller getesteten Patienten eine Besserung beobachtet werden.

Bestimmen Sie mithilfe eines vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse und beschreiben Sie das Ereignis $E_1 = \{M\,\overline{B}; A\,\overline{B}\}$ möglichst einfach mit Worten.
[Teilergebnis: $P\left(\{P\,B\}\right) = 0,1$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

Gegeben:

$P(M) = 50\% = 0,5$; $\quad P(A) = 30\% = 0,3;$ $\quad P(P) = 20\% = 0,2$

$P(M - B) = 70\% = 0,7$; $\quad P(A - B) = 40\% = 0,4;$ $\quad P(B) = 57\% = 0,57$

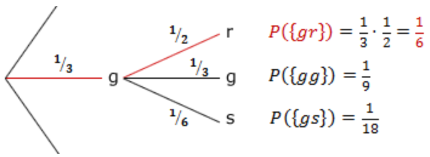
Baumdiagramm zeichnen:

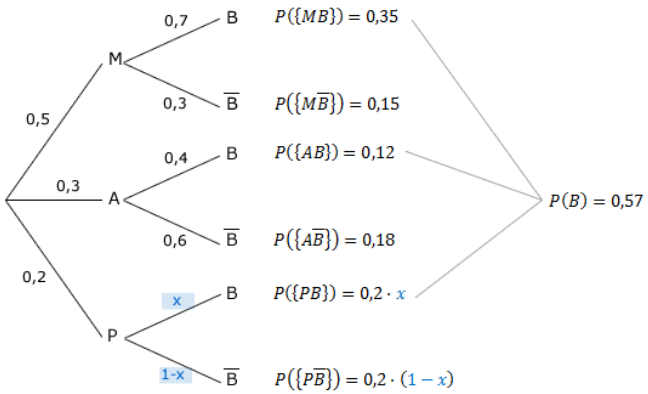
Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel:

$$P(\{g\,r\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$





x bestimmen:

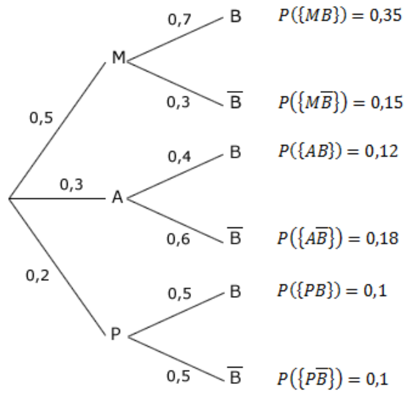
Erläuterung: *2. Pfadregel*

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $\quad P(B) = P(\{M\,B\}) + P(\{A\,B\}) + P(\{P\,B\})$

$$0,57 = 0,35 + 0,12 + 0,2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 0,5$$

Baumdiagramm vervollständigen:



Ereignis beschreiben

$E_1 = \{M\,\overline{B}; A\,\overline{B}\}$

E_1: „Ein verabreichtes Medikament führt zu keiner Besserung.“

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Beim klinischen Test mit insgesamt 400 Teilnehmern sind bei 12% Nebenwirkungen (N) aufgetreten. Die Hälfte aller Teilnehmer hat das neue Medikament M bekommen. 168

Personen haben M erhalten, und es sind keine Nebenwirkungen aufgetreten. Untersuchen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Ereignisse M und N auf stochastische Abhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Gegeben:

$$P(N) = 12\% = 0{,}12\ ; \quad P(M) = 50\% = 0{,}5\ ; \quad P\left(M \cap \overline{N}\right) = \frac{168}{400} = 0{,}42$$

	M	$\overline{M}$	Σ
N			0,12
$\overline{N}$	0,42		
Σ	0,5		1

Tafel vervollständigen:

	M	$\overline{M}$	Σ
N	0,08	0,04	0,12
$\overline{N}$	0,42	0,46	0,88
Σ	0,5	0,5	1

Stochastische Unabhängigkeit

$$P(M) \cdot P(N) = 0{,}5 \cdot 0{,}12 = 0{,}06 \neq 0{,}08 = P(M \cap N)$$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$\Rightarrow$ M und N sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ein Medikament wird in zwei Varianten (normal und plus) sowie in drei verschiedenen Packungsgrößen ($N1$, $N2$ und $N3$) angeboten. Der Verkaufspreis in Euro wird als Zufallsgröße X aufgefasst. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Art	N1	N1plus	N2	N2plus	N3	N3plus
x	5	7	9	12	22	28
$P(X = x)$	0,1	a	b	$b - 0{,}05$	$a + 0{,}15$	$2a$

Bestimmen Sie die Werte von a und b, wenn $E(X) = 18{,}48$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.
[Teilergebnis: $a = 0{,}16$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$E(X) = 18{,}48$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

(I) $18,48 = 5 \cdot 0,1 + 7a + 9b + 12 \cdot (b - 0,05) + 22 \cdot (a + 0,15) + 28 \cdot 2a$

(I) $18,48 = 0,5 + 7a + 9b + 12b - 0,6 + 22a + 3,3 + 56a$

(I) $15,28 = 85a + 21b$

Erläuterung:

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gleich 1.

(II) $0,1 + a + b + b - 0,05 + a + 0,15 + 2a = 1$

(II) $4a + 2b = 0,8$

Gleichung (II) nach b lösen:

$2b = 0,8 - 4a \qquad \Rightarrow \qquad b = 0,4 - 2a$

$b = 0,4 - 2a$ in (I) einsetzen:

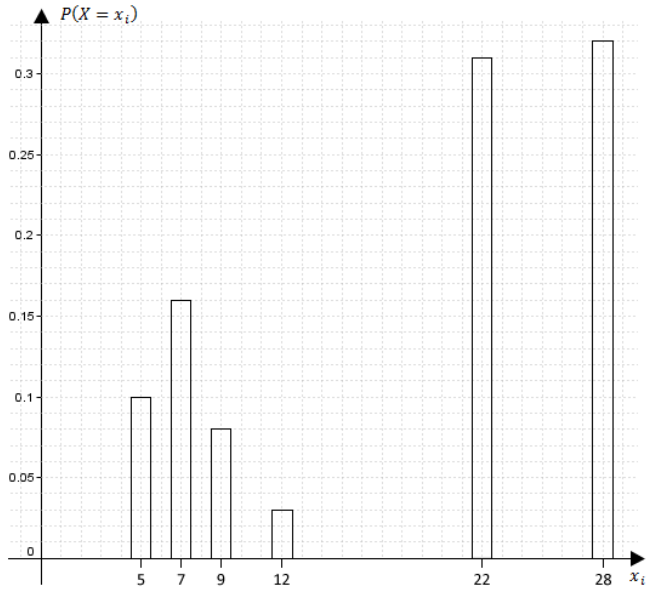
$15,28 = 85a + 21 \cdot (0,4 - 2a)$

$15,28 = 85a + 8,4 - 42a \qquad \Rightarrow \qquad 6,88 = 43a \qquad \Rightarrow \qquad a = 0,16$

$a = 0,16$ in $b = 0,4 - 2a$ einsetzen: $\qquad b = 0,08$

x	5	7	9	12	22	28
$P(X = x)$	0,1	0,16	0,08	0,03	0,31	0,32

Histogramm:



Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 2.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Zufallswerte um mehr als die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert unterscheiden und schraffieren Sie die zugehörige Fläche im Histogramm von 2.1.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Varianz einer Zufallsgröße

x	5	7	9	12	22	28
$P(X=x)$	0,1	0,16	0,08	0,03	0,31	0,32

$\mu = E(X) = 18,48$

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für die Varianz dieser Zufallsgröße:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \qquad (\mu = E(X) = \text{Erwartungswert von } X)$$

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

$$\begin{aligned} Var(x) = \; & (5-18,48)^2 \cdot 0,1 + (7-18,48)^2 \cdot 0,16 \\ & + \\ & (9-18,48)^2 \cdot 0,08 + (12-18,48)^2 \cdot 0,03 \\ & + \\ & (22-18,48)^2 \cdot 0,31 + (28-18,48)^2 \cdot 0,32 \end{aligned}$$

$Var(X) = 80,5496$

Alternative Berechnung der Varianz über die Verschiebungsregel:

$E\left(X^2\right) = 5^2 \cdot 0,1 + 7^2 \cdot 0,16 + 9^2 \cdot 0,08 + 12^2 \cdot 0,03 + 22^2 \cdot 0,31 + 28^2 \cdot 0,32 = 422,06$

$Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 = 422,06 - 18,48^2 = 80,5496$

Standardabweichung bestimmen: $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{80,5496} \approx 8,97$

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung:

„um mehr als die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert“ $= |X - \mu| > \sigma$

Die Ungleichung $|X - \mu| > \sigma$ ist gleichbedeutend zu $\mu - \sigma > X > \mu + \sigma$.

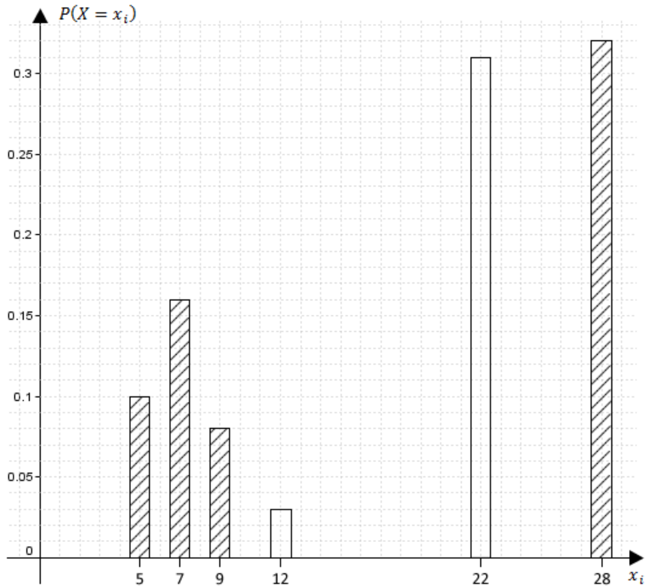
$P(|X - \mu| > \sigma) = P(\mu - \sigma > X > \mu + \sigma)$

$P(|X - 18,48| > 8,97) = P(9,51 > X > 27,45)$

$P(|X - 18,48| > 8,97) = P(X < 9,51) + P(X > 27,45)$

$P(|X - 18,48| > 8,97) = P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 9) + P(X = 28)$

$P(|X - 18,48| > 8,97) = 0,1 + 0,16 + 0,08 + 0,32 = 0,66$



Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Bei den Kunden einer bestimmten Apotheke wird eine Umfrage zu ihrem Kaufverhalten durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Kunde ein bestimmtes Medikament kauft, beträgt $p = 0,35$.

Es werden 50 Kunden befragt. Bestimmen Sie die Wahrschein1ichkeiten folgender Ereignisse.
E_2: „Mindestens 13 aber weniger als 21 Kunden kaufen das Medikament.“
E_3: „Weniger als 11 Kunden kaufen das Medikament.“

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Binomialverteilung

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,35$ angesehen werden.

Erläuterung:

mindestens 13 $\iff$ $T \geq 13$

weniger als 21 $\iff$ $T < 21$ $\iff$ $T \leq 20$

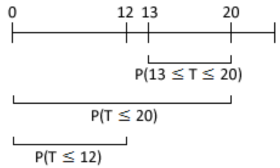
$P\ (E_2) = P(13 \leq T \leq 20)$

Erläuterung:

Wenn die Zufallsgröße T zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a - 1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$P\ (E_2) = P^{50}_{0,35}(T \leq 20) - P^{50}_{0,35}(T \leq 12)$

$P\ (E_2) = 0,81395 - 0,06613 = 0,74782$

(Werte werden aus dem Tafelwerk abgelesen.)

Erläuterung:

weniger als 11 $\iff$ $T < 11$ $\iff$ $T \leq 10$

$P\ (E_3) = P^{50}_{0,35}(T < 11) = P^{50}_{0,35}(T \leq 10) = 0,01601$

(Wert wird aus dem Tafelwerk abgelesen.)

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_4 : „Von 10 Kunden kaufen nur genau der 2., 5. und 9. das Medikament.“
E_5: „Von 10 Kunden kaufen genau drei das Medikament und diese folgen aufeinander.“

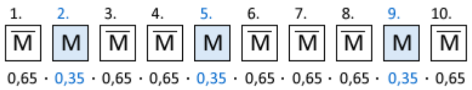
Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Binomialverteilung

Aus vorheriger Teilaufgabe: $p = P(\text{„Kunde kauf Medikament“}) = 0,35$

$q = 1 - p = 1 - 0,35 = 0,65$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*



$P\ (E_4) = 0,35^3 \cdot 0,65^7 \approx 0,0021$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

Anzahl der Möglichkeiten dreimal hintereinander „Kunde kauft Medikament“.

Kunden

Möglichkeit	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1	*M*	*M*	*M*							
2		*M*	*M*	*M*						
3			*M*	*M*	*M*					
4				*M*	*M*	*M*				
5					*M*	*M*	*M*			
6						*M*	*M*	*M*		
7							*M*	*M*	*M*	
8								*M*	*M*	*M*

$P\ (E_5) = 8 \cdot 0,35^3 \cdot 0,65^7 \approx 0,01681$

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Für ein weiteres Medikament gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer von zwei befragten Kunden dieses Medikament kauft, $\frac{15}{32}$ beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein beliebiger Kunde dieses Medikament kauft (2 Lösungen).

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Binomialverteilung

Gesucht: $p = P(\text{„Kunde kauft Medikament“})$

Es gilt: $P_p^2(T = 1) = \dfrac{15}{32}$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(T = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

(s. Merkhilfe der Mathematik)

$$\frac{15}{32} = \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^1$$
$$\frac{15}{32} = 2p - 2p^2$$
$$2p^2 - 2p + \frac{15}{32} = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{15}{32}}}{4} = \frac{2 \pm \frac{1}{2}}{4}$$
$$p_1 = \frac{3}{8}\ ;\ p_2 = \frac{5}{8}$$

Teilaufgabe 5. (6 BE)

Der Hersteller gibt an, dass ein bestimmtes Medikament bei 70% der Patienten, denen es verabreicht wird, wirksam ist. In einer Klinik wird vermutet, dass der Anteil der Patienten, bei denen das Medikament nicht wirkt, sich erhöht hat (Gegenhypothese) und man führt einen Signifikanztest mit 200 Patienten durch.

Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an.
Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.
Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn das Medikament bei 73 Patienten unwirksam ist?

Lösung zu Teilaufgabe 5.

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

T: Anzahl der Patienten unter 200, bei denen das Medikament wirkt.

Nullhypothese: $H_0 : p = 0,7$

Gegenhypothese: $H_1 : p_1 < 0,7$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

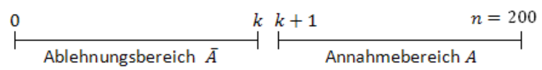
Erläuterung: *Gegenhypothese*

Die Gegenhypothese lautet „Anteil der Patienten, bei denen das Medikament nicht wirkt, hat sich erhöht“.

Anders formuliert lautet die Gegenhypothese:

„Anteil der Patienten, bei denen das Medikament wirkt, ist **niedriger** geworden“ , also $p_1 < 0,7$.

Deswegen liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 200]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

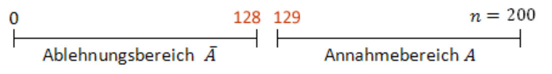
Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt (hier also, wenn $T \leq k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,7}^{200}(T \leq k) \leq 0,05$

$P_{0,7}^{200}(T \leq k) \leq 0,05$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 128$

Entscheidungsregel:



$\overline{A} = \{0, 1, \ldots, 128\}$

Wenn das Medikament bei 73 Patienten unwirksam ist, dann wirkt es bei 127 Patienten.

$127 \in \overline{A} \quad \Rightarrow \quad H_0$ abgelehnt.