Fachabitur 2015 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen
$f_a: x \mapsto a \cdot \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Zerlegen Sie $f_a(x)$ in Linearfaktoren und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_a mit der jeweiligen Vielfachheit an.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle $x = -3$ die y-Achse bei $y = 5$ schneidet.

Nun wird $a = \frac{1}{8}$ gesetzt. Die Funktion $f_{\frac{1}{8}}$ wird im Folgenden mit f bezeichnet.
Es gilt: $f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem der Graph der Funktion f am stärksten fällt.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen von f im Bereich $-5 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Gegeben ist ferner die quadratische Funktion p mit $p''(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$, wenn der Punkt $A(-4|8)$ auf der Parabel G_p und ihr Scheitel bei $x_S = -\frac{1}{8}$ liegt.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{4}x + 1\right)$]

Teilaufgabe 3.2 (9 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen p und f (mit f aus 2.1) und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \leq x \leq 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

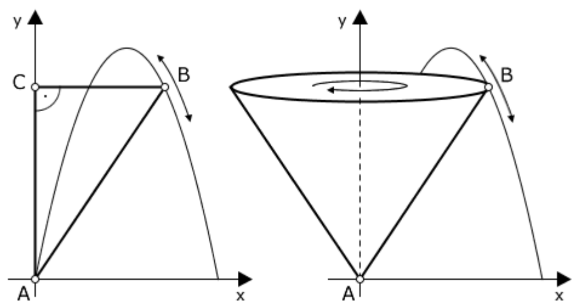
Teilaufgabe 3.3 (2 BE)

Geben Sie die Lösung der Ungleichung $p(x) - f(x) > 0$ an und erläutern Sie, was das Ergebnis für die Graphen G_f und G_p bedeutet.

Teilaufgabe 3.4 (5 BE)

Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Das Dreieck ABC in untenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse, und dabei entsteht ein Kegel. Der Punkt A ist der Ursprung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel G_q mit $q(x) = -x^2 + 8x$ und $x \in \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Stellen Sie eine Gleichung $V(r)$ für das Volumen des Kegels auf, wobei $r = \overline{BC}$ der Radius des Kegels ist.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$]

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V : r \mapsto V(r)$.

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Kegelvolumen seinen absolut größten Wert annimmt, und berechnen Sie das maximale Kegelvolumen.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen
$f_a : x \mapsto a \cdot \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Zerlegen Sie $f_a(x)$ in Linearfaktoren und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_a mit der jeweiligen Vielfachheit an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$f_a(x) = a \cdot \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

Ansatz: $f_a(x) = 0$

$a \cdot \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right) = 0$

$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$

Erläuterung: *Lösen einer Gleichung dritten Grades*

Das Lösen einer Gleichung dritten Grades (auf der rechten Seite muss die Null stehen) setzt voraus, dass bereits eine Lösung bekannt ist. Ist dies nicht der Fall, so muss eine Lösung durch Ausprobieren geraten werden (für x werden die Werte ±1, ±2, ±3, ±4, etc. eingesetzt).

Hat man eine Lösung gefunden, so teilt man mittels Polynomdivision den Term links des Gleichheitszeichens durch die bekannte Lösung.

Erste Nullstelle durch „Ausprobieren“ : $x_1^N = 1$

Polynomdivision durchführen: $\left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right) : (x-1)$

Erläuterung: *Polynomdivision*

Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ beispielsweise lässt sich in Faktoren folgendermaßen schreiben:

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.

Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision.

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \quad +x \quad -2\ ) : (x-1) = x+2 \\
\underline{-(x^2 \quad -x)} \\
\qquad\quad 2x \quad -2 \\
\qquad \underline{-(2x \quad -2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 \quad +2x^2 \quad -7x \quad +4) : (x-1) = x^2 + 3x - 4 \\
\underline{-(x^3 \quad -x^2)} \\
\qquad\quad 3x^2 \quad -7x \\
\qquad \underline{-(3x^2 \quad -3x)} \\
\qquad\qquad\quad -4x \quad +4 \\
\qquad\qquad \underline{-(-4x \quad +4)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_2^N = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$x_3^N = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Erläuterung: *Linearfaktorzerlegung*

Die Linearfaktorzerlegung einer Polynomfunktion dritten Grades mit den Nullstellen x_1, x_2 und x_3 lautet:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}$

a stellt den Leitkoeffizienten dar.

Im Falle, dass eine doppelte Nullstelle (z.B. $x_1 = x_3$) vorliegt:

$f(x) = a \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_1)^2$

Linearfaktoren: $f_a(x) = a \cdot (x+4) \cdot (x-1)^2$

Vielfachheit von Nullstellen

$f_a(x) = a \cdot (x+4) \cdot (x-1)^2$

$x = -4$ ist eine einfache Nullstelle.

$x = 1$ ist eine doppelte Nullstelle.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle $x = -3$ die y-Achse bei $y = 5$ schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Tangentengleichung ermitteln

$f_a(x) = a \cdot \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Benötigte Ableitungsregeln:

1. Faktorregel:
$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$

2. Ableitung einer Summe:
$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

3. Potenzregel:
$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Erste Ableitung: $f_a'(x) = a \cdot \left(3x^2 + 4x - 7\right)$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $\quad y = m \cdot x + t$

m gibt die Steigung der Geraden an.
t entspricht dem y-Achsenabschnitt.

Tangentengleichung: $\quad y = m\,x + t$

Erläuterung: *y-Achsenabschnitt*

Der y-Achsenabschnitt t gibt an, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse (senkrechte Achse) schneidet.

In diesem Fall soll die Tangente die y-Achse bei $y = 5$ schneiden, also ist $t = 5$

$P(0|5) \quad \Rightarrow \quad t = 5$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente am Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

$f_a'(-3) = 8a = m$

$\Rightarrow \quad y = 8a \cdot x + 5$

Wert der Funktion an der Stelle $x = -3$: $\quad f_a(-3) = 16a$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Tangente verläuft durch den Punkt $(-3|16a)$.
Die Punktkoordinaten müssen die Geradengleichung der Tangente erfüllen.

$16a = 8a \cdot (-3) + 5$

$40a = 5$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{8}$

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Nun wird $a = \frac{1}{8}$ gesetzt. Die Funktion $f_{\frac{1}{8}}$ wird im Folgenden mit f bezeichnet.
Es gilt: $f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$.

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Monotonieverhalten einer Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$$

Erste Ableitung bilden:

> Erläuterung: *Ableitungsregel*
>
> Benötigte Ableitungsregeln:
>
> **1. Faktorregel**:
> $f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$
>
> **2. Ableitung einer Summe**:
> $f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
>
> **3. Potenzregel**:
> $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left(3x^2 + 4x - 7\right)$$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$\frac{1}{8}\left(3x^2 + 4x - 7\right) = 0$$

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:
>
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

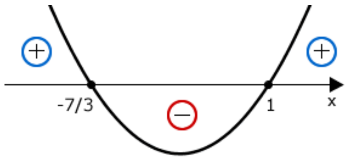
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 10}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 10}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 10}{6} = -\frac{7}{3}$$

Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung mit Hilfe einer Skizze von f' bestimmen:

> Erläuterung: *Parabel*
>
> Der Graph von f' ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{7}{3}$.



> Erläuterung: *Funktionswert*
>
> Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die erste Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.
>
> Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]-\infty; -\frac{7}{3}\right[\cup]1; \infty[$$

$f'(x) < 0 \quad$ für $\quad x \in \left]-\frac{7}{3}; 1\right[$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist streng monoton steigend für $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [1, \infty[$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist streng monoton fallend für $x \in \left[-\frac{7}{3}, 1\right]$

Lage von Extrempunkten ermitteln

Mögliche Extremstellen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

$x_1^E = 1$

$x_2^E = -\frac{7}{3}$

Lage der möglichen Extrempunkte:

$y_1^E = f\left(x_1^E\right) = f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1\ (1|0)$

$y_2^E = f\left(x_2^E\right) = f\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{125}{54} \quad \Rightarrow \quad E_2\left(-\frac{7}{3}\Big|\frac{125}{54}\right)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Aus dem Monotonieverhalten:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

Vorzeichenwechsel in f' von $(+)$ nach $(-)$ bei $x = -\frac{7}{3}$
$\Rightarrow \quad E_2\left(-\frac{7}{3}\Big|\frac{125}{54}\right)$ ist Maximum

Vorzeichenwechsel in f' von $(-)$ nach $(+)$ bei $x = 1$
$\Rightarrow \quad E_1\ (1|0)$ ist Minimum.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem der Graph der Funktion f am stärksten fällt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Wendepunkt ermitteln

$f'(x) = \frac{1}{8}\left(3x^2 + 4x - 7\right) \qquad$ (s. Teilaufgabe 2.1)

Stärkstes Gefälle oder größter Anstieg $\quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Benötigte Ableitungsregeln:

1. Faktorregel:
$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$

2. Ableitung einer Summe:
$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

3. Potenzregel:
$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$f''(x) = \frac{1}{8}\,(6x+4)$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:

$f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$$\frac{1}{8}\,(6x+4) = 0$$

$$6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^P = -\frac{2}{3} \qquad \text{(mögliche Wendestelle)}$$

$$y^P = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{125}{108}$$

Nachweis über die dritte Ableitung:

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$$f'''(x) = \frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{3}{4}$$

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad P\left(-\frac{2}{3}\Big|\frac{125}{108}\right) \text{ ist Wendepunkt}$$

Nachweis Gefälle:

$$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 7\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{25}{3}\right) = -\frac{25}{24} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Gefälle}$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

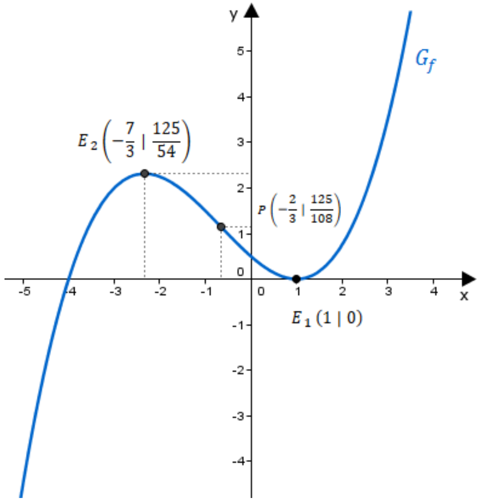
Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen von f im Bereich $-5 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Skizze

$$E_2\left(-\frac{7}{3}\Big|\frac{125}{54}\right) \approx (-2,33|2,31)$$

$$P\left(-\frac{2}{3}\Big|\frac{125}{108}\right) \approx (-0,67|1,16)$$



Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Gegeben ist ferner die quadratische Funktion p mit $p''(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$, wenn der Punkt $A(-4|8)$ auf der Parabel G_p und ihr Scheitel bei $x_S = -\frac{1}{8}$ liegt.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{4}x + 1\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Steckbriefaufgaben

$p''(x) = 1$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von 1 (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int 1 \, \mathrm{d}x = \int x^0 = \mathrm{d}x = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

$p'(x) = x + c$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $x + c$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int x + c \, \mathrm{d}x = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} + d = \frac{1}{2}x^2 + c\,x + d$$

$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + c\,x + d$

Erläuterung: *Extrempunkt*

Der Scheitelpunkt einer Parabel ist ein Extrempunkt. Der Wert der erste Ableitung an einer Extremstelle ist gleich Null.

„Scheitel liegt bei $x_S = -\frac{1}{8}$“ $\quad \Longleftrightarrow \quad p'\left(-\frac{1}{8}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{8} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{8}$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Parabel verläuft durch den Punkt A. Seine Koordinaten erfüllen somit die Parabelgleichung.

„ $A(-4|8)$ liegt auf der Parabel.“ $\iff$ $p(-4)=8$

$$\Rightarrow \quad 8=\frac{1}{2}\cdot(-4)^2+\frac{1}{8}\cdot(-4)+d \quad \Rightarrow \quad d=\frac{1}{2}$$

$$p(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{4}x+1\right)$$

Teilaufgabe 3.2 (9 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen p und f (mit f aus 2.1) und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \leq x \leq 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Schnittpunkt zweier Funktionen

Gemeinsame Punkte bestimmen:

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x,y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.
>
> Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$p(x)=f(x)$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{4}x+1\right)=\frac{1}{8}\left(x^3+2x^2-7x+4\right)$$

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{1}{2} \qquad \left|-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$0=\underbrace{\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}x^2-x}_{f(x)-p(x)}$$

$$0=x\cdot\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x-1\right)$$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $a\cdot b=0 \iff a=0$ und/oder $b=0$
>
> Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $x_1^S=0 \quad y_1^S=p(0)=0,5$

2 . $\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x-1=0$

> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2+b\,x+c=0$:
>
> $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

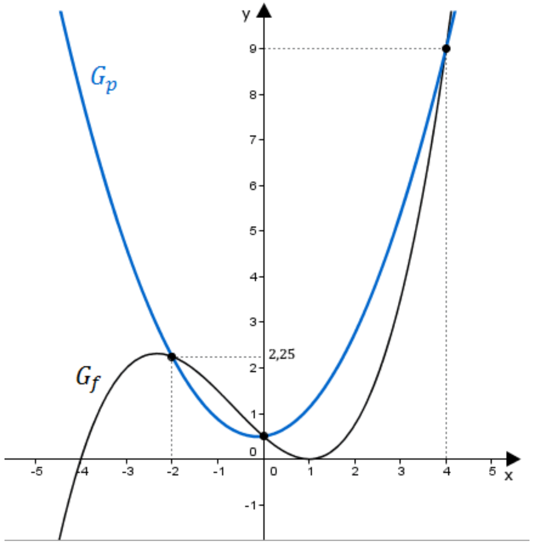
$$x_{2,3}^S=\frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-4\cdot\frac{1}{8}\cdot(-1)}}{2\cdot\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=1\pm 3$$

$\Rightarrow \quad x_2^S=-2 \quad y_2^S=p(-2)=2,25$

$\Rightarrow \quad x_3^S=4 \quad y_3^S=p(4)=9$

Schnittpunkte: $\text{SP}_1(0|0,5)$, $\text{SP}_2(-2|2,25)$, $\text{SP}_3(4|9)$

Skizze

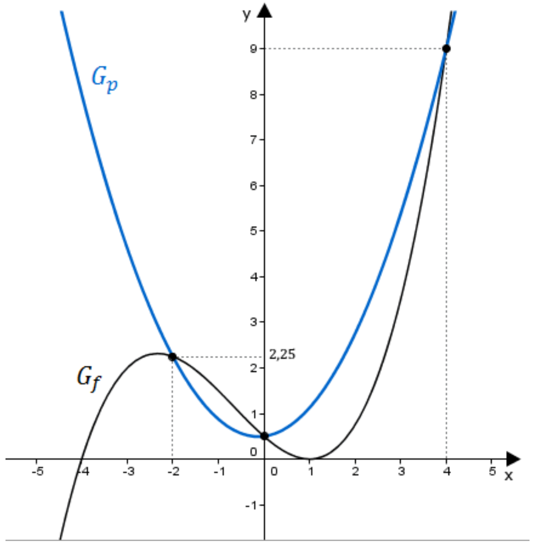


Teilaufgabe 3.3 (2 BE)

Geben Sie die Lösung der Ungleichung $p(x) - f(x) > 0$ an und erläutern Sie, was das Ergebnis für die Graphen G_f und G_p bedeutet.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Lagebeziehung von Funktionen



$p(x) - f(x) > 0 \qquad | + f(x)$

$p(x) > f(x)$

Erläuterung: *Funktionswert*

Die Lösung zu $p(x) > f(x)$ ist die Menge aller x-Werte, für die die Funktionswerte von $p(x)$ größer sind als die von $f(x)$.

Diese Menge entspricht dem Bereich, wo der Graph G_p von p oberhalb vom Graphen G_f von f verläuft, denn dort sind die Funktionswerte von p größer als die von f.

Wo verläuft G_p oberhalb von G_f?

Aus dem Koordinatensystem aus Teilaufgabe 3.2 liest man ab:

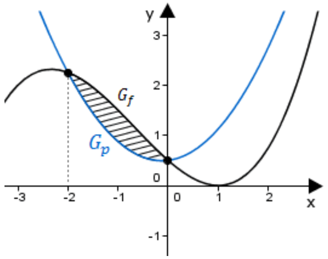
$x \in]-\infty; -2[\cup]0; 4[$

Teilaufgabe 3.4 (5 BE)

Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Lösung zu Teilaufgabe 3.4

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \text{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$A = \int_{-2}^{0} (f(x) - p(x))\ \text{dx} \qquad \text{(mit } f(x) - p(x) \text{ aus Teilaufgabe 3.2)}$$

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x\right)\ \text{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r\ \text{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \qquad \int \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x\right)\ \text{dx} = \frac{1}{8}\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{1}{4}\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2}$$

$$A = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

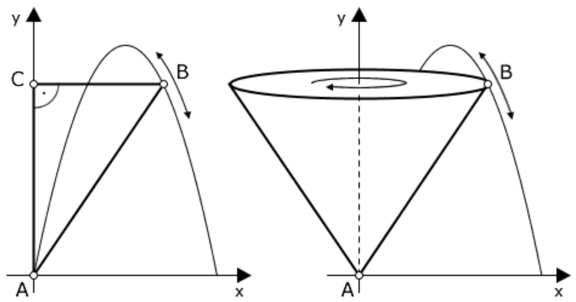
$$\int_a^b f(x)\ \text{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = 0 - \left(\frac{1}{32}\cdot(-2)^4 - \frac{1}{12}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2\right)$$

$$A = \frac{5}{6}$$

Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

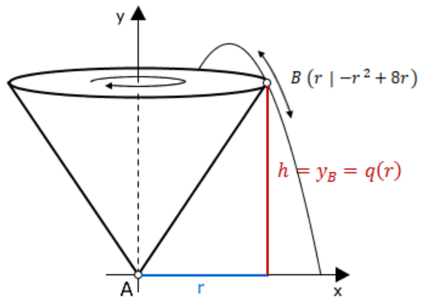
Das Dreieck ABC in untenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse, und dabei entsteht ein Kegel. Der Punkt A ist der Ursprung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel G_q mit $q(x) = -x^2 + 8x$ und $x \in \mathbb{R}$.



Stellen Sie eine Gleichung $V(r)$ für das Volumen des Kegels auf, wobei $r = \overline{BC}$ der Radius des Kegels ist.
[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$]

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Volumen eines Kegels



Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die x-Koordinate vom Punkt B entspricht dem Radius des Kegels, also $x_B = r$.

Die y-Koordinate vom Punkt B entspricht dem Wert der Funktion q an der Stelle x_B, also $y_B = q(r)$.

$$B(r|q(r)) \quad \Rightarrow \quad B\left(r| -r^2 + 8r\right)$$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*

Das Volumen eines Kegels mit Grundfläche G und Höhe h ist gegeben durch:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Ist r der Radius der Kreisfläche (Grundfläche), so gilt für das Volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \underbrace{h}_{y_B}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \left(-r^2 + 8r\right)$$

$$V = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$$

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V : r \mapsto V(r)$.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Definitionsbereich bestimmen

1. $r > 0 \quad \Rightarrow \quad D_V =]0; \ldots$

2. $h > 0$

$-r^2 + 8r > 0$

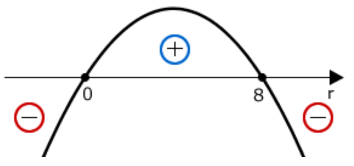
$-r^2 + 8r = 0$

$r \cdot (-r + 8) = 0$

$r_1 = 0\ ;\ r_2 = 8$

Skizze von $-r^2 + 8r$:

> Erläuterung: *Parabel*
>
> Der Graph von $-r^2 + 8r$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen $r_1 = 0$ und $r_2 = 8$.



> Erläuterung: *Funktionswert*
>
> Dort wo der Graph oberhalb der r-Achse liegt, hat die Funktion positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.
>
> Dort wo der Graph unterhalb der r-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$r \in]0; 8[$

$\Rightarrow \quad D_V =]0; 8[$

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Kegelvolumen seinen absolut größten Wert annimmt, und berechnen Sie das maximale Kegelvolumen.

Lösung zu Teilaufgabe 4.3

Extremwertaufgabe

$V = -\frac{1}{3}\pi\, r^4 + \frac{8}{3}\pi\, r^3 \qquad D_V =]0; 8[\quad$ (s. vorherige Teilaufgaben)

Erste und zweite Ableitung bilden:

$V'(r) = -\frac{4}{3}\pi\, r^3 + 8\pi\, r^2$

$V''(r) = -4\pi\, r^2 + 16\pi\, r$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $V'(r) = 0$

$-\frac{4}{3}\pi\, r^3 + 8\pi\, r^2 = 0$

$r^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\pi\, r + 8\pi\right) = 0$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$
>
> Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} \notin D_V$

2. $-\frac{4}{3}\pi\, r + 8\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad r_3 = 6$

$V(r_3) = V(6) = -\frac{1}{3}\pi \cdot 6^4 + \frac{8}{3}\pi \cdot 6^3 = 144\pi$

$\Rightarrow$ $(6|144\pi)$ möglicher Extrempunkt

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$V''(r_3) = V''(6) = -4\pi \cdot 36 + 16\pi \cdot 6 = -48\pi < 0$

$\Rightarrow$ relatives Maximum $(6|144\pi)$

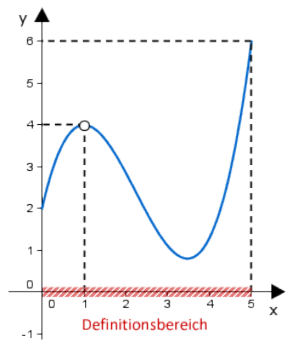
Randbetrachtung:

Erläuterung: *Randbetrachtung*

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

Beispiel:



Diese Funktion hat zwar ein relatives Maximum im Punkt $HOP(1|4)$, dies ist jedoch nicht der größte Wert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annehmen kann.
Bei $(5|6)$ gibt es am Rand des Definitionsbereichs damit noch einen größeren Wert. Dies wäre dann hier das globale Maximum.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{r\to 0^+} V(r) = \lim\limits_{r\to 0^+} -\frac{1}{3}r^4\pi + \frac{8}{3}\pi r^3 = 0 \\ \lim\limits_{r\to 8^-} V(r) = \lim\limits_{r\to 8^-} -\frac{1}{3}r^4\pi + \frac{8}{3}\pi r^3 = 0 \end{array}\right\} < 144\pi$$

$\Rightarrow$ absolutes Maximum $(6|144\pi)$

$\Rightarrow$ $V_{\max} = 144\pi$ für $r = 6$

$\Rightarrow$ $B\left(r|-r^2+8r\right)$ $\Rightarrow$ $B(6|12)$