Fachabitur 2015 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Alle im Folgenden zu entnehmenden Werte sind ganzzahlig.

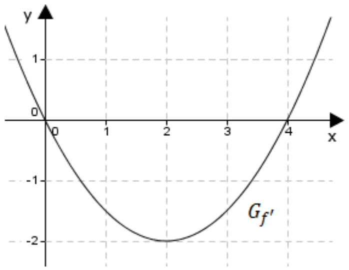


Abb. 1

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Geben Sie nur mithilfe des Graphen $G_{f'}$ die maximalen Monotonieintervalle und die Wendestelle des Graphen der Funktion f an. Begründen Sie das Vorliegen der Wendestelle hinreichend.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Bestimmen Sie ausgehend vom Graphen $G_{f'}$ den Funktionsterm $f'(x)$ und dann den Funktionsterm $f(x)$ für den Fall, dass G_f den Ursprung enthält.

[Mögliches Teilergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right)$]

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit und ermitteln Sie unter Verwendung vorliegender Ergebnisse Art und Koordinaten der Extrempunkte und den Wendepunkt des Graphen G_f.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und f' im Bereich $-2 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.5 (7 BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des im 4. Quadranten liegenden endlichen Flächenstücks, das nur von den Graphen G_f und $G_{f'}$ begrenzt wird und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right) & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Markieren Sie den Graphen der Funktion h farbig im vorhandenen Koordinatensystem und machen Sie damit Aussagen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x = 0$ (kurze Begründung erforderlich).

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion h an.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Die Funktion $\tilde{h}$ entsteht aus h, wenn für $x \geq 0$ der Term $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ verwendet wird. Erläutern Sie, welche Aussagen man zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\tilde{h}$ an der Stelle $x = 0$ machen kann.

© Abiturloesung.de

Auf einem Campingplatz möchte der Pächter in einem Zelt ein Kino einrichten. Als Projektionsfläche dient eine Seitenwand, welche durch die Parabel G_p und der x-Achse begrenzt wird. Am Boden hat das Zelt eine Spannweite von 20 m. Bei den folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.

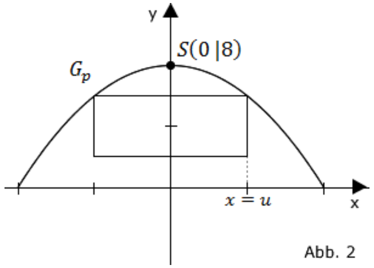


Abb. 2

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ der Parabel G_p.
[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -0,08x^2 + 8$]

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Es ist beabsichtigt, eine Leinwand von 7 m x 4 m anzubringen, wobei sich die Unterkante der Leinwand in einer Höhe von 3 m befindet. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob dies an der Seitenwand möglich ist.

Ein Filmverleih rät dem Pächter zu einer Leinwand bei einer Unterkante in 3 m Höhe (siehe Abbildung 2).

Teilaufgabe 3.3.1 (7 BE)

Stellen Sie die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts der Leinwand auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion $A : u \mapsto A(u)$.
[Mögliches Teilergebnis: $A(u) = -0,16u^3 + 10u$]

Teilaufgabe 3.3.2 (7 BE)

Ermitteln Sie u so, dass $A(u)$ den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall Höhe, Breite und Flächeninhalt der Leinwand. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Alle im Folgenden zu entnehmenden Werte sind ganzzahlig.

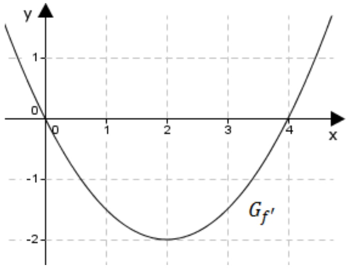
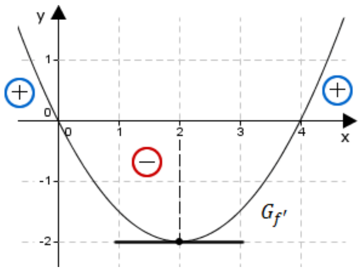


Abb. 1

Geben Sie nur mithilfe des Graphen $G_{f'}$ die maximalen Monotonieintervalle und die Wendestelle des Graphen der Funktion f an. Begründen Sie das Vorliegen der Wendestelle hinreichend.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Monotonieverhalten der Integralfunktion



Aus Abbildung 1 liest man ab:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Funktionswert*

Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die erste Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty; 0[\cup]4; \infty[$

$f'(x) < 0$ für $x \in]0; 4[$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton fallend für $x \in [0; 4]$

Wendepunkt ermitteln

G_f hat bei $x = 2$ eine Wendestelle, da $G_{f'}$ bei $x = 2$ einen Extrempunkt besitzt.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Bestimmen Sie ausgehend vom Graphen $G_{f'}$ den Funktionsterm $f'(x)$ und dann den Funktionsterm $f(x)$ für den Fall, dass G_f den Ursprung enthält.
[Mögliches Teilergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Funktionsgleichung ermitteln

Nullstellen von $f'(x)$: $x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Erläuterung: *Linearfaktorzerlegung*

Die Linearfaktorzerlegung einer quadratischen Funktion f' mit den Nullstellen x_1 und x_2 lautet:

$$f'(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = a \cdot x \cdot (x - 4) = a\,x^2 - 4a\,x$$

$G_{f'}$ verläuft durch den Punkt $(2|-2)$:

$$f'(2) = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 = -4a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

f' aufleiten:

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{2}x^2 - 2x$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^3}{6} - x^2 + C$$

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + C$$

G_f verläuft durch den Ursprung $(0|0)$: $\quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 = \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right)$$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit und ermitteln Sie unter Verwendung vorliegender Ergebnisse Art und Koordinaten der Extrempunkte und den Wendepunkt des Graphen G_f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

Ansatz: $f(x) = 0$

$\frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right) = 0$

$\frac{1}{6}x^2\,(x-6) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

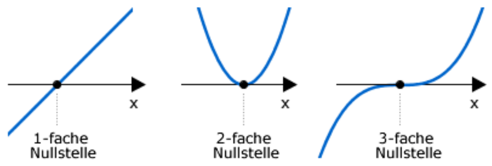
Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ (2-fache Nullstelle)

2. $x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 6$ (1-fache Nullstelle)

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt/Terrassenpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5) \quad \Rightarrow \quad x = -5$ ist dreifache Nullstelle

Art von Extrempunkten ermitteln

Aus dem Monotonieverhalten (s. Teilaufgabe 1.1):

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

Vorzeichenwechsel in f' von $(+)$ nach $(-)$ bei $x = 0 \quad \Rightarrow \quad HOP(0|0)$

Vorzeichenwechsel in f' von $(-)$ nach $(+)$ bei $x = 4 \quad \Rightarrow \quad TIP\left(4 \middle| -\frac{16}{3}\right)$

© Abiturloesung.de

Wendepunkt ermitteln

Wendestelle bei $x = 2$ (aus Teilaufgabe 1.1)

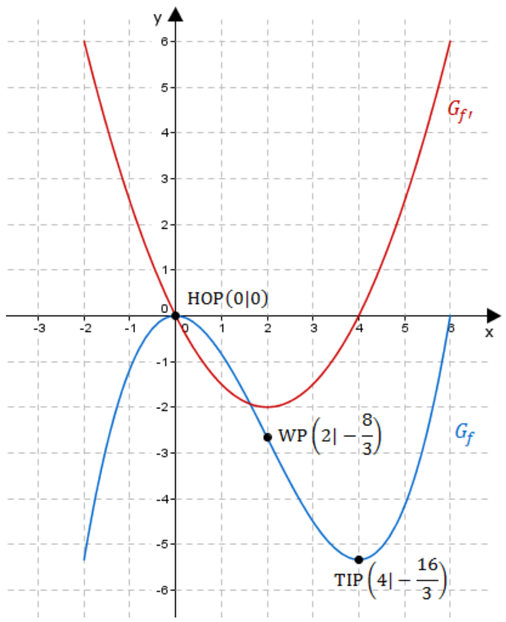
$$f(2) = -\frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}\left(2|-\frac{8}{3}\right)$$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und f' im Bereich $-2 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze



Teilaufgabe 1.5 (7 BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des im 4. Quadranten liegenden endlichen Flächenstücks, das nur von den Graphen G_f und $G_{f'}$ begrenzt wird und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Schnittpunkt zweier Funktionen

Schnittpunkte bestimmen:

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.
>
> Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$$f(x) = f'(x)$$

$$\frac{1}{6}x^3 - x^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x = 0$$

$$\frac{1}{6}x \cdot \left(x^2 - 9x + 12\right) = 0$$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$
>
> Alle Terme werden einzeln untersucht.

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 9x + 12 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

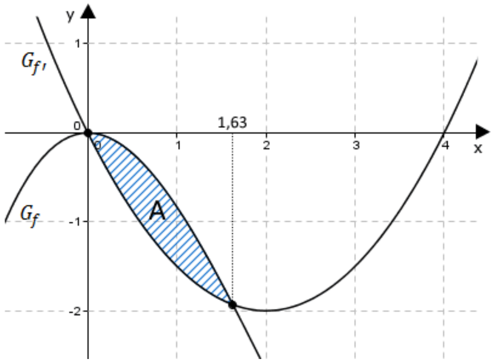
Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{33}}{2} \approx 1{,}63$$

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\, \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$A = \int\limits_0^{\frac{9-\sqrt{33}}{2}} \left(f(x) - f'(x)\right)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int\limits_0^{\frac{9-\sqrt{33}}{2}} \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{6}\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{3}{2}\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{2} + x^2$$

$$A = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2\right]_0^{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{9-\sqrt{33}}{2}\right)^4 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9-\sqrt{33}}{2}\right)^3 + \left(\frac{9-\sqrt{33}}{2}\right)^2 - 0 \approx 0{,}79$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

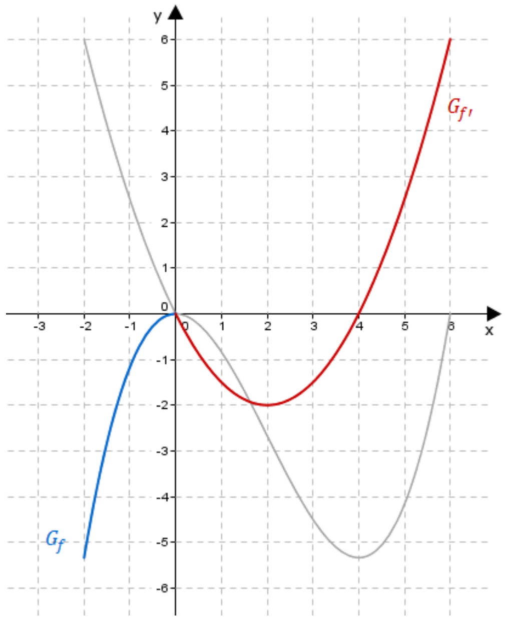
Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right) & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Markieren Sie den Graphen der Funktion h farbig im vorhandenen Koordinatensystem und machen Sie damit Aussagen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x = 0$ (kurze Begründung erforderlich).

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Skizze



Stetigkeit einer Funktion

Der Graph der Funktion h hat an der Stelle $x = 0$ keinen Sprung $\Rightarrow$ h ist bei $x = 0$ stetig

Differenzierbarkeit einer Funktion

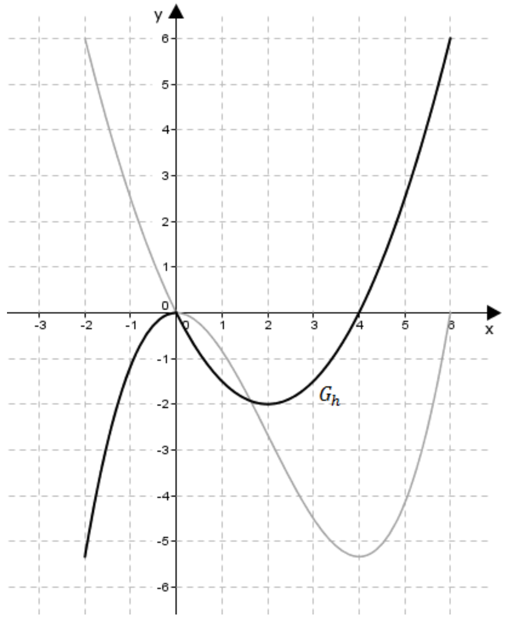
Der Graph der Funktion h hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick $\Rightarrow$ h ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion h an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Monotonieverhalten einer Funktion



G_h ist für $x \in]-\infty; 0] \cup [2; \infty[$ streng monoton steigend.

G_h ist für $x \in [0; 2]$ streng monoton fallend.

$(0|0)$ ist Hochpunkt, $(2|-2)$ ist Tiefpunkt von h.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Die Funktion $\tilde{h}$ entsteht aus h, wenn für $x \geq 0$ der Term $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ verwendet wird. Erläutern Sie, welche Aussagen man zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\tilde{h}$ an der Stelle $x = 0$ machen kann.

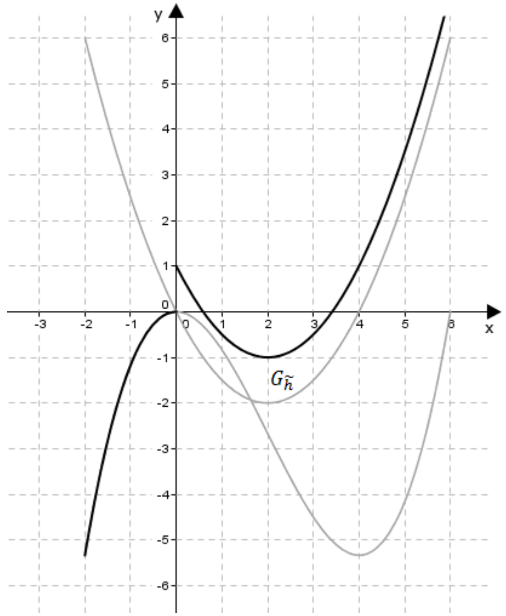
Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Stetigkeit einer Funktion

$$\tilde{h}: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2\right) & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Erläuterung:

Für $x \geq 0$ entspricht der Graph von $\tilde{h}$ dem um 1 Einheit entlang der y-Achse verschobene Graph von f'.



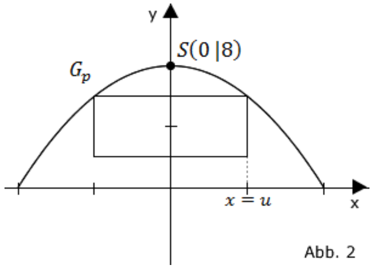
Der Graph der Funktion $\tilde{h}$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Sprung $\quad\Rightarrow\quad$ $\tilde{h}$ ist bei $x = 0$ nicht stetig.

Differenzierbarkeit einer Funktion

Da $\tilde{h}$ bei $x = 0$ nicht stetig ist, ist $\tilde{h}$ auch dort nicht differenzierbar.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Auf einem Campingplatz möchte der Pächter in einem Zelt ein Kino einrichten. Als Projektionsfläche dient eine Seitenwand, welche durch die Parabel G_p und der x-Achse begrenzt wird. Am Boden hat das Zelt eine Spannweite von 20 m. Bei den folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.



Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ der Parabel G_p.
[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -0,08x^2 + 8$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Funktionsgleichung ermitteln

Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Scheitelpunkt von p: $S(0|8)$

$p(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 8$

$p(x) = a\,x^2 + 8$

Erläuterung: *Einsetzen, Punktkoordinaten*

p schneidet die x-Achse bei $x = 10$ und $x = -10$.

Die Schnittpunkte $(10|0)$ und $-10|0$ erfüllen somit die Parabelgleichung.

$p(10) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 100a + 8 \quad \Rightarrow \quad a = -0,08$

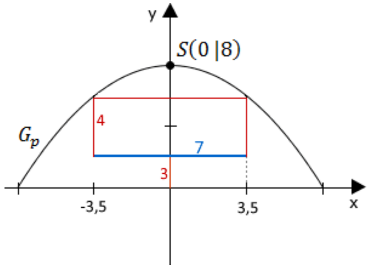
$p(x) = -0,08x^2 + 8$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Es ist beabsichtigt, eine Leinwand von 7 m x 4 m anzubringen, wobei sich die Unterkante der Leinwand in einer Höhe von 3 m befindet. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob dies an der Seitenwand möglich ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Anwendungsaufgabe



$p(x) = -0,08x^2 + 8$

$p(3,5) = -0,08 \cdot 3,5^2 + 8 = 7,02$

Abstand zum Zelt $= 7,02 - 3 = 4,02 > 4$ m

Die Leinwand ist in der gewünschten Größe möglich.

Teilaufgabe 3.3.1 (7 BE)

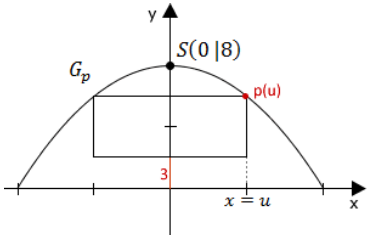
Ein Filmverleih rät dem Pächter zu einer Leinwand bei einer Unterkante in 3 m Höhe (siehe Abbildung 2).

Stellen Sie die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts der Leinwand auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion $A : u \mapsto A(u)$.
[Mögliches Teilergebnis: $A(u) = -0,16u^3 + 10u$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.3.1

Flächeninhalt eines Rechtecks

© Abiturloesung.de



$p(x) = -0,08x^2 + 8$

$A(u) = \text{Länge} \cdot \text{Höhe} = 2u \cdot (p(u) - 3)$

$A(u) = 2u \cdot (-0,08u^2 + 8 - 3)$

$A(u) = -0,16u^3 + 10u$

Definitionsmenge einer Funktion

Sinnvoll: $u > 0$ und Höhe > 0

Höhe $> 0 \iff p(u) - 3 > 0$

$-0,08u^2 + 5 > 0$

$-0,08u^2 > -5$

$u^2 < \frac{5}{0,08} = \frac{125}{2}$

$-\sqrt{\frac{125}{2}} < u < \sqrt{\frac{125}{2}}$

$\Rightarrow \quad D = \left]0; \sqrt{\frac{125}{2}}\right[$

Teilaufgabe 3.3.2 (7 BE)

Ermitteln Sie u so, dass $A(u)$ den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall Höhe, Breite und Flächeninhalt der Leinwand. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3.2

Extremwertaufgabe

$A(u) = -0,16u^3 + 10u \qquad D = \left]0; \sqrt{\frac{125}{2}}\right[$ (s. vorherige Teilaufgabe)

Erste und zweite Ableitung bilden:

$A'(u) = -0,48u^2 + 10$

$A''(u) = -0,96u$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0,$ daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $A'(u) = 0$

$-0,48u^2 + 10 = 0$

$u^2 = \frac{10}{0,48} = \frac{125}{6} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{125}{6}} \approx 4,56 \qquad \left(u = -\sqrt{\frac{125}{6}} \notin D\right)$

$A\left(\sqrt{\frac{125}{6}}\right) \approx 30,43 \quad \Rightarrow \quad (4,56|30,43)$ möglicher Extrempunkt

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$A''\left(\sqrt{\frac{125}{6}}\right) \approx -4,38 < 0 \quad \Rightarrow$ rel. Maximum $(4,56|30,43)$

© Abiturloesung.de

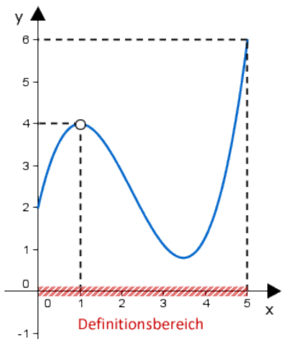
Randbetrachtung:

Erläuterung: *Randbetrachtung*

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

Beispiel:



Diese Funktion hat zwar ein relatives Maximum im Punkt $HOP(1|4)$, dies ist jedoch nicht der größte Wert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annehmen kann.
Bei $(5|6)$ gibt es am Rand des Definitionsbereichs damit noch einen größeren Wert. Dies wäre dann hier das globale Maximum.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{u\to 0^+} A(u) = \lim\limits_{u\to 0^+} -0,16u^3+10u = 0 \\ \lim\limits_{u\to \sqrt{\frac{125}{2}}^-} A(u) = \lim\limits_{u\to \sqrt{\frac{125}{2}}^-} -0,16u^3+10u = 0 \end{array}\right\} < 30,43$$

$\Rightarrow$ absolutes Maximum $(4,56|30,43)$

$\Rightarrow$ $A_{\max} = 30,43 \text{ m}^2$

$\Rightarrow$ Länge $= 2\cdot 4,56 = 9,12$ m

$\Rightarrow$ Höhe $= p(4,56) - 3 = 3,34$ m

© Abiturloesung.de