Abitur 2015 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \ln(2x + 3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Wertemenge W. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D und W an.

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_g im Schnittpunkt von G_g mit der x-Achse.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Die Funktion g hat die maximale Definitionsmenge $]-\infty; 5]$.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die Funktion k hat in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = -3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Der Graph von k hat die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote.

Teilaufgabe Teil A 4 (4 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x\,e^{a\,x}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 besitzt.

Der Graph G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto a\,x^4 + b\,x^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

$W(1|-1)$ ist ein weiterer Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

(Ergebnis: $a = 1$, $b = -2$)

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Die Gerade g schneidet G_f in den Punkten W und $(2|0)$.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f sowie die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

Teilaufgabe Teil B 1d (6 BE)

G_f und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein, das durch die Gerade g in zwei Teilflächen zerlegt wird. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0 : x \mapsto x^4 - 2$.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Die unteren Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordnen Sie jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründen Sie drei Ihrer Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.

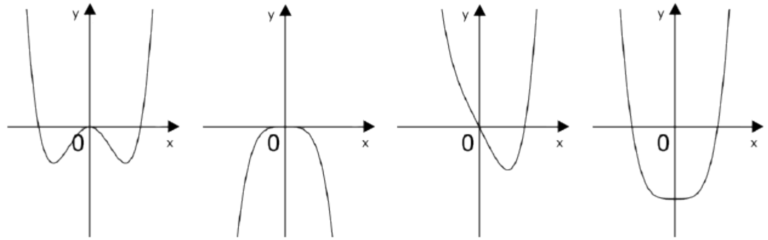
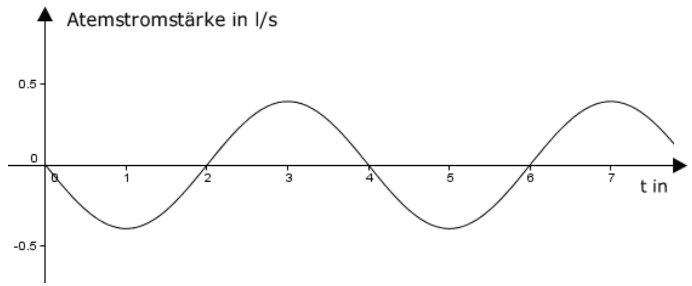


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3 Abb. 4

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Geben Sie in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $g : t \mapsto -\frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Das untere Bild zeigt den durch die Funktion g beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.



Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Berechnen Sie $g(1,5)$ und interpretieren Sie das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Geben Sie auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und machen Sie Ihre Antwort mithilfe der Abbildung in Teilaufgabe 3a plausibel.

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Berechnen Sie $\int\limits_2^4 g(t)\ \mathrm{dt}$ und deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

(Teilergebnis: Wert des Integrals: $0,5$)

Teilaufgabe Teil B 3d (3 BE)

Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge der Testperson. Skizzieren Sie auf der Grundlage des Modells unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe 3c in einem Koordinatensystem für $0 \leq t \leq 8$ den Graphen einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge der Testperson beschreibt.

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 3e (4 BE)

Geben Sie zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20% höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $h : t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$ beschrieben werden. Ermitteln Sie den Wert von b.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \ln(2x + 3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Wertemenge W. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Geben Sie D und W an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = \ln(2x + 3)$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$g(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(h(x))$.

Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert. Somit gilt für die Argumentfunktion: $h(x) > 0$.

In diesem Fall: $2x + 3 > 0$

$2x + 3 > 0$

$2x > -3$

$x > -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad D = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

Wertebereich bestimmen

$W = \mathbb{R}$

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_g im Schnittpunkt von G_g mit der x-Achse.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der x-Achse:

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$\ln(2x+3) = 0 \qquad | \; e^x$

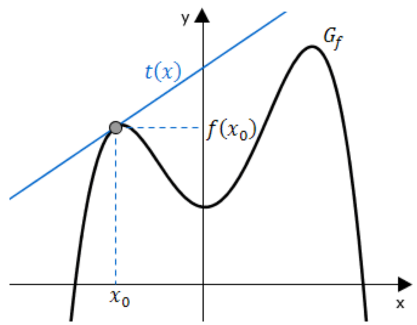
> Erläuterung: *Rechenweg*
>
> $e^{\ln(2x+3)} = e^0$
>
> $2x + 3 = 1$

$2x + 3 = 1$

$\Rightarrow \qquad x_0 = -1$

Tangentengleichung ermitteln

Tangentengleichung t im Punkt $(-1|0)$

> Erläuterung: *Gleichung der Tangente*
>
> Formel für die Tangentengleichung:
>
> $t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$
>
> 
>
>
> Hier ist $x_0 = -1$.

$t : y = (x - x_0) \cdot g'\,(x_0) + g\,(x_0)$

$t : y = (x + 1) \cdot g'\,(-1) + g\,(-1)$

Nebenrechnungen:

$g(-1) = \ln 1 = 0$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = 2x + 3$.
Dann ist $v'(x) = 2$.

$g'(x) = \dfrac{2}{2x+3}$

$g'(-1) = 2$

$\Rightarrow \quad t : y = 2 \cdot (x + 1)$

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wendepunkt ermitteln

Erste und zweite Ableitung bilden:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f''(x) = 6x - 12$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = 2$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$f'''(x) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = 2$ ist Wendestelle

y-Koordinate des Wendepunkts ermitteln:

$y^W = f(2) = 0$

Koordinaten des Wendepunkts in die Geradengleichung einsetzen:

$0 = 2 - 2 \quad$ (wahre Aussage)

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Koordinaten des Wendepunkts erfüllen die Geradengleichung. Der Wendepunkt liegt somit auf der Geraden.

$\Rightarrow \quad W(2|0)$ liegt auf der Geraden $y = x - 2$

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Verschiebung von Funktionsgraphen

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Erläuterung:

Der Punkt $(2|0)$ wird zum Punkt $(3|2)$, falls die x-Koordinate um 1 und die y-Koordinate um 2 erhöht wird.

Verschiebung entlang der x-Achse um 1 Einheit nach rechts und entlang der y-Achse um 2 Einheiten nach oben:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Verschiebung entlang der x-Achse um a Einheiten:

nach rechts (positive x-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x-a)$

nach links (negative x-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x+a)$

In diesem Fall ist $a = 1$: $f(x) \rightarrow f(x-1)$

Verschiebung entlang der y-Achse um b Einheiten:

nach oben (positive y-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x) + b$

nach unten (negative y-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x) - b$

In diesem Fall ist $b = 2$: $f(x) \rightarrow f(x) + 2$

Beide Verschiebungen hintereinander: $f(x) \rightarrow f(x-1) \rightarrow f(x-1) + 2$

$h(x) = f(x-1) + 2$

$h(x) = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 11(x-1) - 6 + 2$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

Die Funktion g hat die maximale Definitionsmenge $]-\infty; 5]$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Funktionsgleichung ermitteln

Z.B.: $g(x) = \sqrt{-x+5}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

Bei einer Wurzelfunktion muss der Term unter der Wurzel, also der Radikand, größer oder gleich Null sein.

$-x + 5 \geq 0$

$-x \geq -5 \quad | \cdot(-1)$

$x \leq 5$

$\Rightarrow \quad D_g =]-\infty; 5]$

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die Funktion k hat in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = -3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Der Graph von k hat die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Funktionsgleichung ermitteln

Beispiel einer Vorgehensweise:

k hat in $x = 2$ eine Nullstelle: $\Rightarrow \quad k(x) = \dfrac{x-2}{\ldots}$

Erläuterung: *Polstelle*

Eine Funktion hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn der Nenner eine doppelte Nullstelle besitzt.

$x = -3$ ist hier doppelte Nullstelle des Nenners $(x+3)^2$.

k hat in $x = -3$ eine Polstellen ohne VZW: $\Rightarrow \quad k(x) = \dfrac{x-2}{(x+3)^2}$

Erläuterung: *Asymptoten*

Eine gebrochenrationale Funktion hat eine waagerechte Asymptote, wenn der Grad des Zählerpolynoms gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist (hier 2). Damit $y = 1$ die waagerechte Asymptote ist, müssen auch die jeweiligen Leitkoeffizienten gleich sein (hier also 1).

Zählerpolynom: $x^2 - 4x + 4$ (Grad 2, Leitkoeffizient 1)
Nennerpoylnom: $x^2 + 6x + 9$ (Grad 2, Leitkoeffizient 1)

Beweis über Grenzwertbildung:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{(x-2)^2}^{\to\infty}}{\underbrace{(x+3)^2}_{\to\infty}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{1 - \overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}^{\to 1}}{\underbrace{1 + \underbrace{\frac{6}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}_{\to 1}} = 1$$

$y = 1$ ist waagerechte Asymptote: $\Rightarrow \quad k(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+3)^2}$

Teilaufgabe Teil A 4 (4 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x\,e^{a\,x}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4

Parameterwerte ermitteln

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = e^{a\,x}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$v(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = a\,x$.

$f_a'(x) = 1 \cdot e^{a\,x} + x \cdot e^{a\,x} \cdot a$

$f_a'(x) = e^{a\,x} \cdot (1 + a\,x)$

Es muss gelten: $f_a'(2) = 0$

Parameter a bestimmen:

$f_a'(2) = e^{2a} \cdot (1 + 2a)$

$0 = e^{2a} \cdot (1 + 2a)$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Da $e^{a\,x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $1 + 2a$ untersucht werden.

$1 + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\dfrac{1}{2}$

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Der Graph G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto a\,x^4 + b\,x^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

$W(1|-1)$ ist ein weiterer Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

(Ergebnis: $a = 1$, $b = -2$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Steckbriefaufgaben

$f(x) = a\,x^4 + b\,x^3$

Ableitungen bilden:

$f'(x) = 4a\,x^3 + 3b\,x^2$

$f''(x) = 12a\,x^2 + 6b\,x$

$W(1|-1)$ ist Wendepunkt von G_f, also gilt:

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Graph G_f verläuft durch den Punkt W. Sein Koordinaten müssen die Funktionsgleichung erfüllen.

1. $\quad f(1) = -1$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

2. $\quad f''(1) = 0$

Einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{llcl} 1. & a + b & = & -1 \\ 2. & 12a + 6b & = & 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2a \end{array}$$

$b = -2a$ in 1. einsetzen: $\quad a - 2a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$a = 1$ in $b = -2a$ einsetzen: $\quad b = -2$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = x^4 - 2x^3$

Erste Ableitung bilden: $\quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $\quad f'(x) = 0$

$0 = 4x^3 - 6x^2$

$0 = x^2 \cdot (4x - 6)$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

1. $x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^E = 0$

2. $4x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^E = 1,5$

Lage der möglichen Extrempunkte:

$y_1^E = f\left(x_1^E\right) = f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1\ (0|0)$

$y_2^E = f\left(x_2^E\right) = f\ (1,5) = -1,6875 \quad \Rightarrow \quad E_2\ (1,5|-1,6875)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden: $\quad f''(x) = 12x^2 - 12x$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den möglichen Extremstellen untersuchen:

$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1$ ist kein Extrempunkt
(sonder laut Teilaufgabe Teil B 1a ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$f''(1,5) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad E_2\ (1,5|-1,6875)$ Tiefpunkt

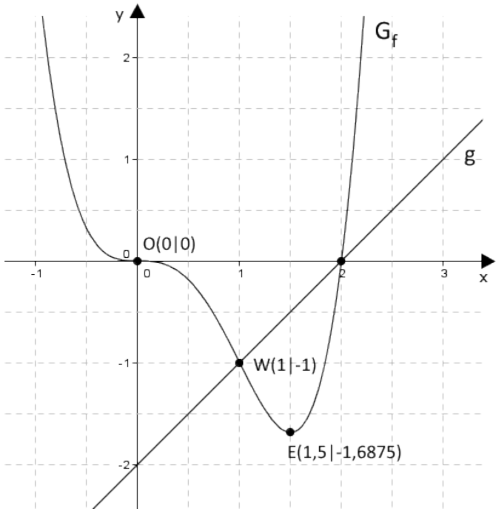
Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Die Gerade g schneidet G_f in den Punkten W und $(2|0)$.

Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f sowie die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Skizze



Geradengleichung aufstellen

Gerade g durch $W(1|-1)$ und $(2|0)$:

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $y = m \cdot x + t$
> m gibt die Steigung der Geraden an.

$g: y = m \cdot x + t$

> Erläuterung: *Steigung einer Geraden*
>
> Die Steigung m einer Geraden, die durch die Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ verläuft, ist gegeben durch:
>
> $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \dfrac{0-(-1)}{2-1} = 1$

$g(x) = x + t$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> Die Gerade verläuft durch den Punkt $(0|2)$, also erfüllen die Punktkoordinaten die Geradengleichung.

$g(2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = -2$

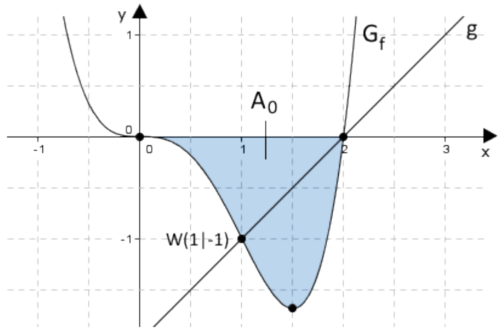
$g(x) = x - 2$

Teilaufgabe Teil B 1d (6 BE)

G_f und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein, das durch die Gerade g in zwei Teilflächen zerlegt wird. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die der Graph G_f und die x-Achse im IV.Quadranten einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \left| \int_0^2 f_(x)\ \mathrm{dx} \right|$$

(Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, hat das bestimmte Integral einen negativen Wert und wird deswegen bei der Flächenberechnung im Betrag genommen.)

$$A_0 = \left| \int_0^2 f(x)\ \mathrm{dx} \right|$$

$$A_0 = \left| \int_0^2 \left(x^4 - 2x^3\right)\ \mathrm{dx} \right|$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $x^4 - 2x^3$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \qquad \int \left(x^4 - 2x^3\right)\ \mathrm{dx} = \frac{x^{4+1}}{4+1} - 2\frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}$$

$$A_0 = \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 \right|$$

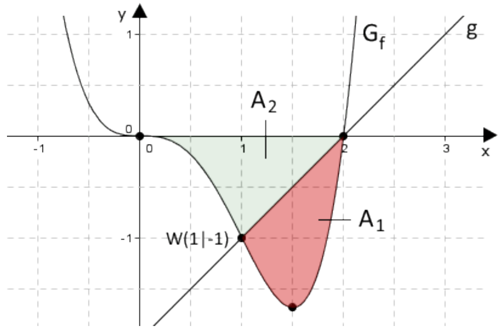
Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A_0 = \left| \left(\frac{32}{5} - 8 - 0 \right) \right| = \frac{8}{5} = 1,6$$

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Der Inhalt eines Flächenstücks zwischen zwei Funktionsgraphen G_f und G_g ist gegeben durch:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

Da nur zwei Schnittpunkte vorhanden sind, kann der <u>innere</u> Betrag weggelassen werden.

Vorsicht: kommt insgesamt beim Integral ein negativer Wert heraus, muss <u>nur</u> das Integral in Betrag gesetzt werden.

$$A_1 = \left| \int_1^2 \left(f(x) - g(x)\right)\ \mathrm{dx} \right|$$

$$A_1 = \left| \int_1^2 \left(x^4 - 2x^3 - (x-2)\right)\ \mathrm{dx} \right| = \left| \int_1^2 \left(x^4 - 2x^3 - x + 2\right)\ \mathrm{dx} \right|$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $x^4 - 2x^3 - x + 2$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(x^4 - 2x^3 - x + 2\right)\,\mathrm{dx} = \frac{x^{4+1}}{4+1} - 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1}$$

$$\int \left(x^4 - 2x^3 - x + 2\right)\,\mathrm{dx} = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$A_1 = \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 \right|$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A_1 = \left| \left(\frac{32}{5} - 8 - 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right) \right| = \frac{4}{5} = 0,8$$

$A_2 = A_0 - A_1 = 0,8$

Verhältnis: $\quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{0,8}{0,8} = 1$

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0 : x \mapsto x^4 - 2$.

Die unteren Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordnen Sie jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründen Sie drei Ihrer Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.

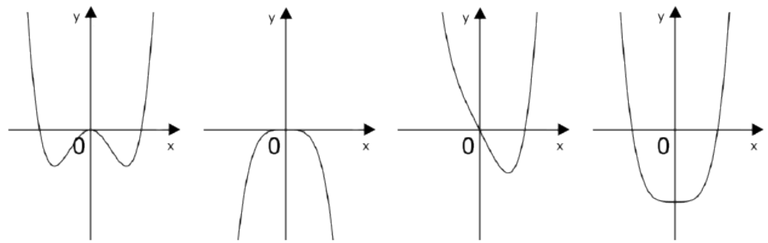


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3 Abb. 4

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionsgraphen einer Funktionsschar zuordnen

Zuordnungen:

1. $f_0(x) = x^4 - 2$

y-Achsenabschnitt: $\quad f_0(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad$ Abbildung 4

2. $f_4(x) = x^4 - 2x^4 = -x^4$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} -x^4 = -\infty \quad \Rightarrow \quad$ Abbildung 2

3. $f_2(x) = x^4 - 2x^2$

$x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ (3 Nullstellen) $\quad \Rightarrow$ Abbildung 1

4. $f_1(x) = x^4 - 2x$

$x^4 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x\left(x^3 - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = \sqrt[3]{2}$ (2 Nullstellen) $\Rightarrow$ Abbildung 3

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Geben Sie in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$f_n(x) = x^4 - 2x^n \qquad n > 4$

Grenzwert für $x \to \infty$:

Erläuterung: *Grenzwert*

Bei ganzrationalen Funktionen ist nur der Term mit dem höchsten Exponenten entscheidend für den Verlauf der Funktion im Unendlichen. In diesem Fall $-2x^n$.

Für $x \to +\infty$ geht x^n nach $+\infty$, unabhängig ob n gerade oder ungerade.

Wegen dem Minuszeichen geht $-2x^n$ somit nach $-\infty$ für $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 - \underbrace{2\underbrace{x^n}_{\to +\infty}}_{\to -\infty} = -\infty$$

Grenzwert für $x \to -\infty$:

Erläuterung: *Grenzwert*

Bei ganzrationalen Funktionen ist nur der Term mit dem höchsten Exponenten entscheidend für den Verlauf der Funktion im Unendlichen. In diesem Fall $-2x^n$.

Für $x \to -\infty$ geht x^n nach $+\infty$, falls n gerade ist.

Wegen dem Minuszeichen geht $-2x^n$ somit nach $-\infty$ für $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 - \underbrace{2\underbrace{x^n}_{\to +\infty}}_{\to -\infty} = -\infty \qquad \text{, falls } n \text{ gerade}$$

Erläuterung: *Grenzwert*

Bei ganzrationalen Funktionen ist nur der Term mit dem höchsten Exponenten entscheidend für den Verlauf der Funktion im Unendlichen. In diesem Fall $-2x^n$.

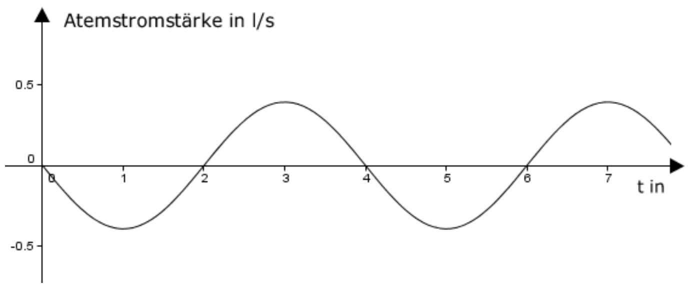
Für $x \to -\infty$ geht x^n nach $-\infty$, falls n ungerade ist.

Wegen dem Minuszeichen geht $-2x^n$ somit nach $+\infty$ für $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 - \underbrace{2\underbrace{x^n}_{\to -\infty}}_{\to +\infty} = +\infty \qquad \text{, falls } n \text{ ungerade}$$

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle.
Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $g: t \mapsto -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Das untere Bild zeigt den durch die Funktion g beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.



Berechnen Sie $g(1,5)$ und interpretieren Sie das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a]

Funktionswert berechnen

$$g(t) = -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$g(1,5) = -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1,5\right)$$

$$g(1,5) = -\frac{\pi}{8}\underbrace{\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{16}\pi \approx -0,278$$

Zum Zeitpunkt $t = 1,5$ atmetet die Testperson aus.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Geben Sie auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und machen Sie Ihre Antwort mithilfe der Abbildung in Teilaufgabe 3a plausibel.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b]

Anwendungszusammenhang

Zum Beispiel: $t = 2$

Begründung: für $0 < t < 2$ atmet die Testperson aus, für $2 < t < 4$ ein.

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Berechnen Sie $\int\limits_2^4 g(t)\ \mathrm{d}t$ und deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

(Teilergebnis: Wert des Integrals: $0,5$)

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c]

Bestimmtes Integral

$$\int\limits_2^4 g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_2^4 -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ \mathrm{d}t$$

Erläuterung: *Ausklammern, Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gilt folgende Rechenregel für Integrale:

$$\int\limits_a^b c\cdot f(x)\ \mathrm{d}x \quad = \quad c\cdot\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Hier wird der Faktor $-\frac{\pi}{8}$ ausgeklammert.

$$\int\limits_2^4 g(t)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{8}\int\limits_2^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ \mathrm{d}t$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int f(a\,x+b)\mathrm{dx} \quad = \quad \frac{1}{a}F(a\,x+b)+C \qquad (F \text{ Stammfunktion von } f)$$

Eine Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$.

$$\Rightarrow \quad \int \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\pi/2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$\int_2^4 g(t)\mathrm{dt} \; = -\frac{\pi}{8}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_2^4$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Faktor $-\frac{2}{\pi}$ wird zur Vereinfachung hier ausgeklammert.

$$\int_2^4 g(t)\mathrm{dt} \; = \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_2^4$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^4 g(t)\mathrm{dt} \; = \frac{1}{4}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\right) = 0,5$$

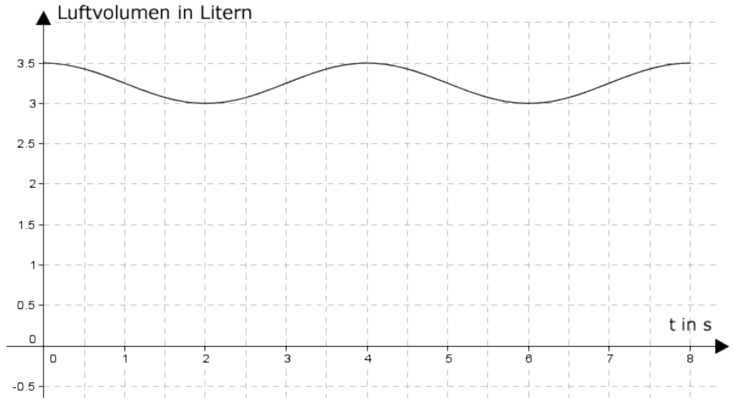
Die Testperson atmet bei einem Einatmenvorgang insgesamt 0,5 Liter Luft ein.

Teilaufgabe Teil B 3d (3 BE)

Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich $3,5$ Liter Luft in der Lunge der Testperson. Skizzieren Sie auf der Grundlage des Modells unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe 3c in einem Koordinatensystem für $0 \leq t \leq 8$ den Graphen einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge der Testperson beschreibt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3d

Skizze



Erläuterung:

Zu Berücksichtigen sind folgende Aspekte:

- Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge der Testperson

- Die Testperson atmet bei einem Einatmenvorgang insgesamt 0,5 Liter Luft ein.

- Die Testperson atmet für $0 < t < 2$ und $4 < t < 6$ aus.

- Die Testperson atmet für $2 < t < 4$ und $6 < t < 8$ ein.

Teilaufgabe Teil B 3e (4 BE)

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

Geben Sie zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20% höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $h : t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$ beschrieben werden. Ermitteln Sie den Wert von b.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3e

Funktionsgleichung ermitteln

$$\text{Atemfrequenz Testperson} = \frac{60}{4} = 15 \text{ Atemzyklen/Minute}$$

$$\text{Atemfrequenz jüngerer Mensch} = 15 + 15 \cdot 20\% = 15 \cdot 1,2 = 18 \text{ Atemzyklen/Minute}$$

$$\text{Atemzyklus jüngerer Mensch} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$$

Erläuterung:

Der Atemzyklus entspricht der Periode der Sinusfunktion.

$$\text{Periode } T_h = \frac{10}{3}$$

Erläuterung: *Periode der Sinusfunktion*

Die Funktionsgleichung der allgemeinen Sinusfunktion lautet: $f(x) = a \cdot \sin(b\,x + c)$

Die Periode T ist gegeben durch: $T = \frac{2\pi}{b}$

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad b = 0,6\pi$$