Abitur 2015 Mathematik Geometrie VI

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

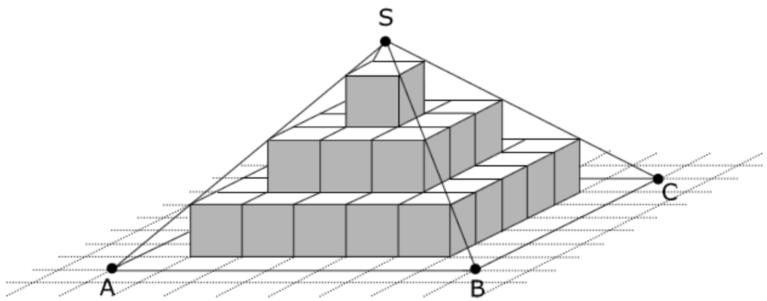
Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

Die Abbildung zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Geben Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide $ABCDS$ an.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Bestimmen Sie unter Verwendung eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems eine Gleichung für die Gerade, die durch die Punkte B und S verläuft.
Zeichnen Sie das gewählte Koordinatensystem in die Abbildung ein.

Abbildung 1 zeigt eine Sonnenuhr mit einer gegenüber der Horizontalen geneigten, rechteckigen Grundplatte, auf der sich ein kreisförmiges Zifferblatt befindet. Auf der Grundplatte ist der Polstab befestigt, dessen Schatten bei Sonneneinstrahlung die Uhrzeit auf dem Zifferblatt anzeigt.
Eine Sonnenuhr dieser Bauart wird in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt das Rechteck $ABCD$ mit $A(5|-4|0)$ und $B(5|4|0)$ die Grundplatte der Sonnenuhr. Der Befestigungspunkt des Polstabs auf der Grundplatte wird im Modell durch den Diagonalenschnittpunkt $M(2,5|0|2)$ des Rechtecks $ABCD$ dargestellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm in der Realität. Die Horizontale wird im Modell durch die x_1x_2-Ebene beschrieben.

Abb. 1

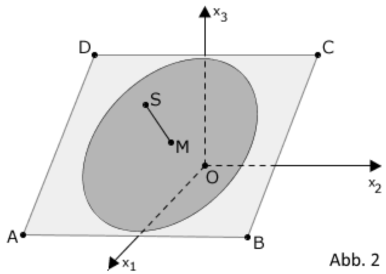


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B a (5 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Rechteck $ABCD$ liegt, in Normalenform.

(mögliches Teilergebnis: $E: 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$)

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Die Grundplatte ist gegenüber der Horizontalen um den Winkel α geneigt. Damit man mit der Sonnenuhr die Uhrzeit korrekt bestimmen kann, muss für den Breitengrad φ des Aufstellungsorts der Sonnenuhr $\alpha + \varphi = 90°$ gelten. Bestimmen Sie, für welchen Breitengrad φ die Sonnenuhr gebaut wurde.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Polstab wird im Modell durch die Strecke $[MS]$ mit $S(4,5|0|4,5)$ dargestellt. Zeigen Sie, dass der Polstab senkrecht auf der Grundplatte steht, und berechnen Sie die Länge des Polstabs auf Zentimeter genau.

Sonnenlicht, das an einem Sommertag zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 auf die Sonnenuhr einfällt, wird im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Teilaufgabe Teil B d (6 BE)

Weisen Sie nach, dass der Schatten der im Modell durch den Punkt S dargestellten Spitze des Polstabs außerhalb der rechteckigen Grundplatte liegt.

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Um 6 Uhr verläuft der Schatten des Polstabs im Modell durch den Mittelpunkt der Kante $[BC]$, um 12 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[AB]$ und um 18 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[AD]$. Begründen Sie, dass der betrachtete Zeitpunkt t_0 vor 12 Uhr liegt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Länge eines Vektors

$A(0|1|2)$, $B(2|5|6)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

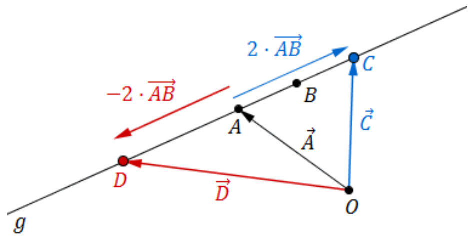
Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Lage eines Punktes



$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(4|9|10)$$

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(-4|-7|-6)$$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

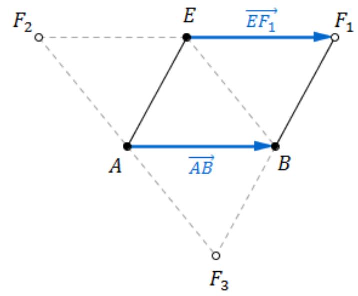
Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Lage eines Punktes

$$E(1|2|5)\ ,\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit:

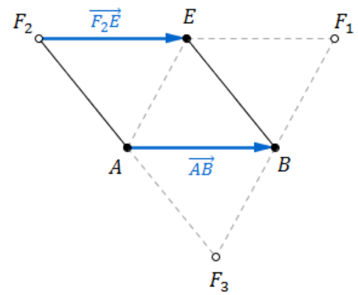


$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF_1}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_1(3|6|9)$$

2. Möglichkeit:



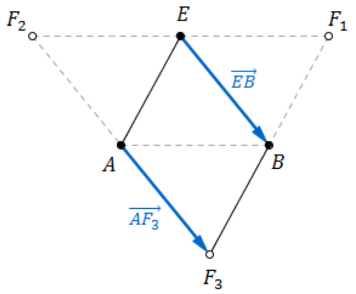
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_2E}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{F_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_2(-1|-2|1)$$

Alternative Lösung

3. Möglichkeit:



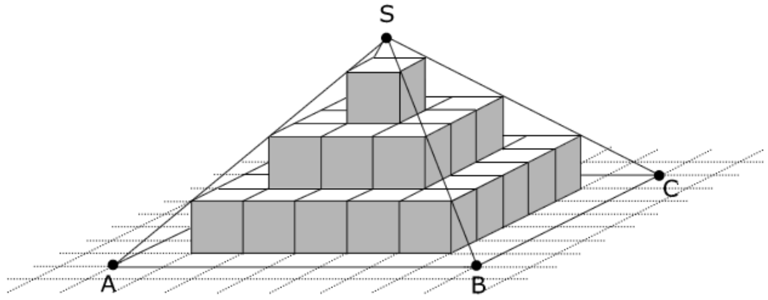
$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AF_3}$$

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{E} = \overrightarrow{F_3} - \overrightarrow{A} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{E} + \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_3(1|4|3)$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Die Abbildung zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.



Geben Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide $ABCDS$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Volumen einer Pyramide

Anzahl Würfel: $25 + 9 + 1 = 35$

Volumen Stufenpyramide: $V = 35$ VE (Volumeneinheiten)

Höhe Pyramide $ABCDS$: $h = 3{,}5$ LE (Längeneinheiten)

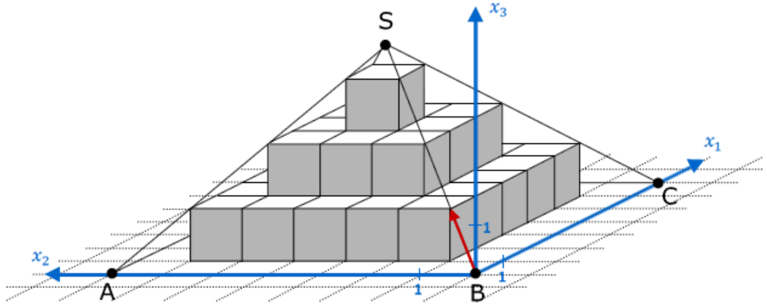
Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Bestimmen Sie unter Verwendung eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems eine Gleichung für die Gerade, die durch die Punkte B und S verläuft.
Zeichnen Sie das gewählte Koordinatensystem in die Abbildung ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Geradengleichung aufstellen

Zum Beispiel:



Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn in diesem Modell $B(0|0|0)$ als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) und $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor der Geraden BS.

$$BS: \overrightarrow{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B a (5 BE)

Abbildung 1 zeigt eine Sonnenuhr mit einer gegenüber der Horizontalen geneigten, rechteckigen Grundplatte, auf der sich ein kreisförmiges Zifferblatt befindet. Auf der Grundplatte ist der Polstab befestigt, dessen Schatten bei Sonneneinstrahlung die Uhrzeit auf dem Zifferblatt anzeigt.
Eine Sonnenuhr dieser Bauart wird in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt das Rechteck $ABCD$ mit $A(5|-4|0)$ und $B(5|4|0)$ die Grundplatte der Sonnenuhr. Der Befestigungspunkt des Polstabs auf der

Grundplatte wird im Modell durch den Diagonalenschnittpunkt $M(2,5|0|2)$ des Rechtecks $ABCD$ dargestellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm in der Realität. Die Horizontale wird im Modell durch die x_1x_2-Ebene beschrieben.

Abb. 1

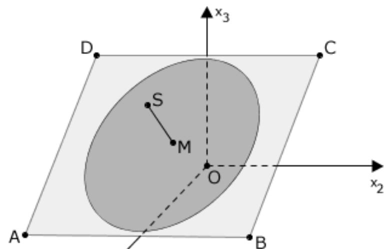


Abb. 2

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Rechteck $ABCD$ liegt, in Normalenform.

(mögliches Teilergebnis: $E: 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lage eines Punktes

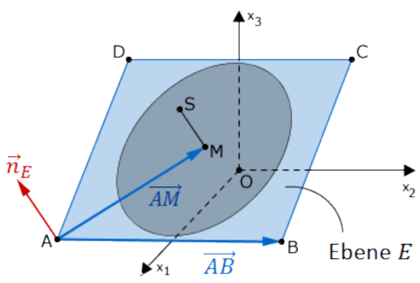
$A(5|-4|0),\ B(5|4|0),\ M(2,5|0|2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(0|4|4)$$

Ebene aus drei Punkte



Richtungsvektoren der Ebene E: $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A(5|-4|0)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-2,5) - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 4 - 8 \cdot (-2,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 4 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$E: 4x_1 + 5x_3 = 20 + 0 + 0$

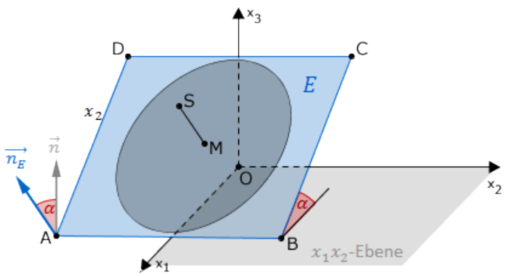
$E: 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Die Grundplatte ist gegenüber der Horizontalen um den Winkel α geneigt. Damit man mit der Sonnenuhr die Uhrzeit korrekt bestimmen kann, muss für den Breitengrad φ des Aufstellungsorts der Sonnenuhr $\alpha + \varphi = 90^\circ$ gelten. Bestimmen Sie, für welchen Breitengrad φ die Sonnenuhr gebaut wurde.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

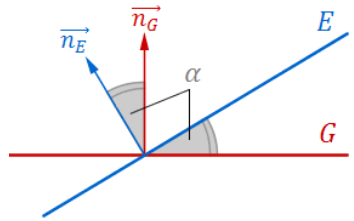
Winkel zwischen zwei Ebenen



Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E: $\quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene (Horizontale): $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel α zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der $x_1 x_2$-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der x_1x_2-Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{0+0+5}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right) \approx 38{,}66°$

$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - \alpha \approx 51{,}34°$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Polstab wird im Modell durch die Strecke $[MS]$ mit $S(4{,}5|0|4{,}5)$ dargestellt. Zeigen Sie, dass der Polstab senkrecht auf der Grundplatte steht, und berechnen Sie die Länge des Polstabs auf Zentimeter genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Länge eines Vektors

$M(2{,}5|0|2)\ ,\ \ S(4{,}5|0|4{,}5)$

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overline{MS} = \left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+0+6{,}25} = \sqrt{10{,}25} \approx 3{,}2 \text{ LE}$$

Länge der Polstange $= 3{,}2 \cdot 10$ cm $= 32$ cm

Lagebeziehung von Vektoren

$$2\cdot\overrightarrow{MS} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_E}$$

Erläuterung: *Parallele Vektoren*

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E ist ein Vielfaches vom Vektor $\overrightarrow{MS}$. Sie sind somit parallel.

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} \parallel \overrightarrow{MS}$

Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht selbst senkrecht zur Ebene.

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MS} \perp E$

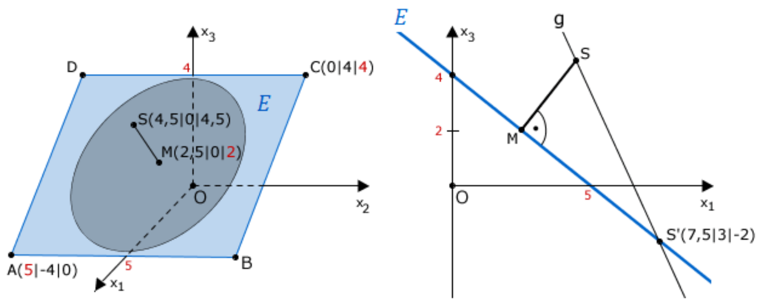
Teilaufgabe Teil B d (6 BE)

Sonnenlicht, das an einem Sommertag zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 auf die Sonnenuhr einfällt, wird im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Weisen Sie nach, dass der Schatten der im Modell durch den Punkt S dargestellten Spitze des Polstabs außerhalb der rechteckigen Grundplatte liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Geradengleichung aufstellen



Seitenansicht (x_1x_3-Ebene)

Gerade g durch S mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$:

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:
>
> $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}}$$

Schnitt Ebene und Gerade

$E: 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$

Ebene E und Gerade g schneiden: $E \cap g$

> Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*
>
> Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.
>
> Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.
>
> Hier wird also l in E eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$\begin{aligned} E \cap g: \quad 4 \cdot (4,5 + 6\lambda) + 5 \cdot (4,5 - 13\lambda) - 20 &= 0 \\ 18 + 24\lambda + 22,5 - 65\lambda - 20 &= 0 \\ -41\lambda + 20,5 &= 0 \\ \lambda &= \tfrac{20,5}{41} \\ \lambda &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wird der gefundene λ-Wert in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\overrightarrow{S'} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S'(7,5|3|-2)$$

S' liegt außerhalb des Rechtecks $A\,B\,C\,D$, da seine x_3-Koordinate negativ ist.

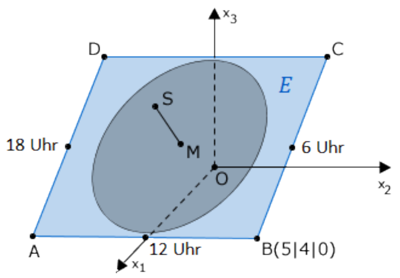
Somit liegt der Schatten der Polstabspitze S außerhalb der rechteckigen Grundplatte.

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Um 6 Uhr verläuft der Schatten des Polstabs im Modell durch den Mittelpunkt der Kante $[B\,C]$, um 12 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[A\,B]$ und um 18 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[A\,D]$. Begründen Sie, dass der betrachtete Zeitpunkt t_0 vor 12 Uhr liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Anwendungszusammenhang



Mittelpunkt der Strecke $[A\,B]$: $(5|0|0)$
Die x_2-Koordinate des Mittelpunkts ist 0.

Schatten verläuft zum Zeitpunkt t_0 durch $S'(7,5|3|-2)$.
Die x_2-Koordinate des Punktes S' ist postiv, also liegt t_0 vor 12 Uhr.