Abitur 2015 Mathematik Geometrie V

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

Betrachtet wird die Pyramide $ABCDS$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$ und $S(1|1|-4)$. Die Grundfläche $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist.

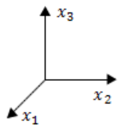
Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Kante $[AS]$ steht senkrecht auf der Grundfläche $ABCD$. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24\sqrt{2}$.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: x_1 + x_3 = 2$, der Punkt $A\left(0|\sqrt{2}|2\right)$ und die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Teilaufgabe Teil B a (6 BE)

Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit der x_1-Achse und mit der x_3 -Achse an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie den Verlauf der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung).



Die $x_1 x_2$-Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g. Der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt.

An den betrachteten geraden Abschnitt der Achterbahn schließt sich – in Fahrtrichtung gesehen – eine Rechtskurve an, die im Modell durch einen Viertelkreis beschrieben wird, der in der Ebene E verläuft und den Mittelpunkt $M\left(0|3\sqrt{2}|2\right)$ hat.

Teilaufgabe Teil B c (5 BE)

Das Lot von M auf g schneidet g im Punkt B. Im Modell stellt B den Punkt der Achterbahn dar, in dem der gerade Abschnitt endet und die Kurve beginnt. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und berechnen Sie den Kurvenradius im Modell.

(Teilergebnis: $B\left(-1|2\sqrt{2}|3\right)$).

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Das Ende der Rechtskurve wird im Koordinatensystem durch den Punkt C beschrieben. Begründen Sie, dass für den Ortsvektor des Punkts C gilt: $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{M} + \overrightarrow{v}$.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Ein Wagen der Achterbahn durchfährt den Abschnitt, der im Modell durch die Strecke $[A\,B]$ und den Viertelkreis von B nach C dargestellt wird, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $15\frac{m}{s}$. Berechnen Sie die Zeit, die der Wagen dafür benötigt, auf Zehntelsekunden genau, wenn eine Längeneinheit im Koordinatensystem 10 m in der Realität entspricht.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Länge eines Vektors

$A(0|1|2)$, $B(2|5|6)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

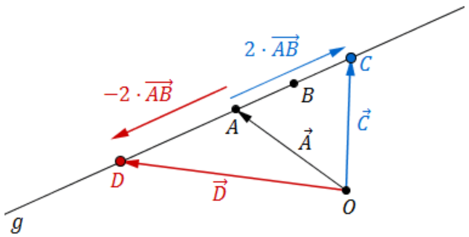
Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Lage eines Punktes



$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(4|9|10)$$

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(-4|-7|-6)$$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

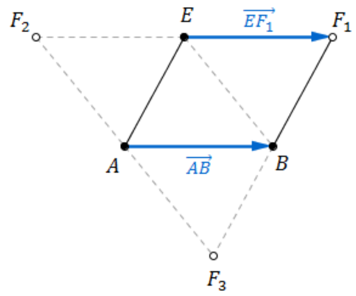
Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Lage eines Punktes

$$E(1|2|5)\ , \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit:

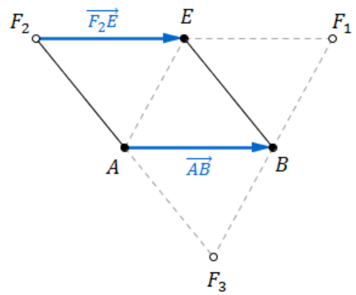


$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF_1}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_1(3|6|9)$$

2. Möglichkeit:



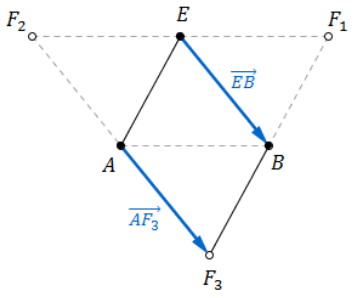
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_2E}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{F_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad F_2(-1|-2|1)$$

Alternative Lösung

3. Möglichkeit:



$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AF_3}$$

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{E} = \overrightarrow{F_3} - \overrightarrow{A} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{E} + \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad F_3(1|4|3)$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Betrachtet wird die Pyramide $ABCDS$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$ und $S(1|1|-4)$. Die Grundfläche $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Lagebeziehung von Vektoren

$A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 - 16 + 0 = 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Rechteck

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Kante $[AS]$ steht senkrecht auf der Grundfläche $ABCD$. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24\sqrt{2}$.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Volumen einer Pyramide

$A(0|0|0)$, $S(1|1|-4)$

$G = 24\sqrt{2}$ LE $\qquad$ (LE = Längeneinheiten)

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

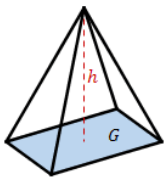
Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$h = \overline{AS} = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

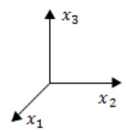
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 48 \text{ VE} \qquad (\text{VE} = \text{Volumeneinheiten})$$

Teilaufgabe Teil B a (6 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E : x_1 + x_3 = 2$, der Punkt $A\left(0|\sqrt{2}|2\right)$ und die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen

Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit der x_1-Achse und mit der x_3 -Achse an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie den Verlauf der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung).



Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Besondere Lage im Koordinatensystem

$$E : x_1 + x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ebene E ist parallel zur x_2-Achse, da die x_2-Koordinate des Normalenvektors Null ist und der Ursprung $(0|0|0)$ nicht in der Ebene enthalten ist.

Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebene E und Gerade g schneiden: $\quad E \cap g$

Erläuterung: *Einsetzen*

g wird in E eingesetzt und die Gleichung wird nach λ aufgelöst.

$$\begin{aligned} E \cap g : \quad (0 - \lambda) + (2 + \lambda) &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Lagebeziehung von Ebene und Gerade*

Mögliche Lagen einer Gerade zu einer Ebene:
enthalten, parallel, Schnitt (Schnittpunkt)

Überprüfung: Ebene und Gerade scheiden.

Möglichkeiten:

Parameter bleibt stehen (z.B. $\lambda = 1$) $\Rightarrow$ **Schnittpunkt**

Parameter fällt weg und die Aussage ist wahr (z.B. $0 = 0$)
$\Rightarrow$ Gerade ist in der Ebene **enthalten**

Parameter fällt weg und die Aussage ist falsch (z.B. $2 = 1$)
$\Rightarrow$ Gerade liegt **parallel** zur Ebene

$\Rightarrow \quad g$ ist in E enthalten ($g \subset E$)

Spurpunkte einer Ebene

x_1-Koordinatenachse: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_3-Koordinatenachse: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Spurpunkte einer Ebene*

Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Spurpunkte.
Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Koordinatenachse in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebene ein, löst nach dem Parameter λ auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

Spurpunkt S_1 mit der x_1-Koordinatenachse:

$\lambda + 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad S_1(2|0|0)$

Spurpunkt S_3 mit der x_3-Koordinatenachse:

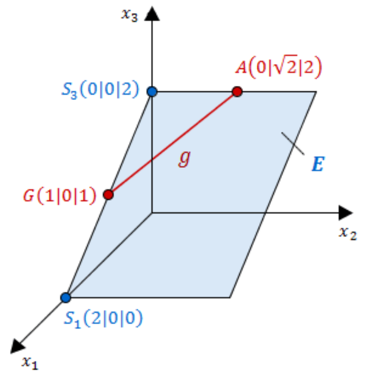
$0 + \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad S_3(0|0|2)$

Skizze

Hilfspunkt G bestimmen:

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1: \quad \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(1|0|1)$$



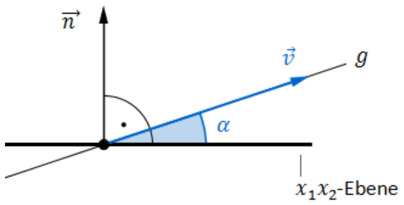
Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Die $x_1 x_2$-Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g. Der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Winkel zwischen Gerade und Ebene



$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

$$x_1\,x_2\text{-Ebene:} \qquad \overrightarrow{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_3 = 0$$

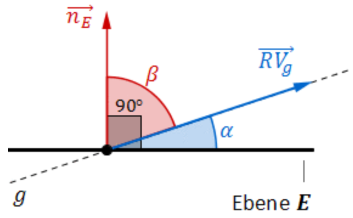
$\overrightarrow{n}$ ist der Normalenvektor der $x_1\,x_2$-Ebene.

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{v}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+2+1} = 2$$

$$|\overrightarrow{n}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+0+1} = 1$$

Winkel α bestimmen:

> Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*
>
> 
>
>
> Der **Sinus** des Winkels α zwischen einer Geraden g und einer Ebenen E ist gegeben durch:
>
> $$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}\right|}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$
>
> wobei $\overrightarrow{RV_g}$ der Richtungsvektor der Geraden und $\overrightarrow{n_E}$ der Normalenvektor der Ebene ist.
>
> (Anmerkung: Man verwendet die Formel gerne ohne Betragsstriche im Zähler; also $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$.
> Aber mit Betragsstrichen wird <u>immer</u> der spitze Winkel bestimmt.)

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|0+0+1|}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

Teilaufgabe Teil B c (5 BE)

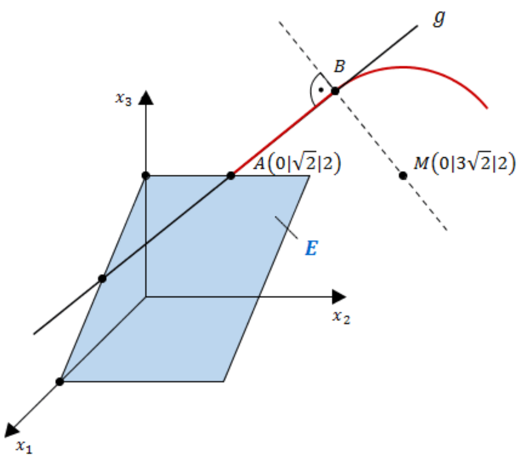
An den betrachteten geraden Abschnitt der Achterbahn schließt sich – in Fahrtrichtung gesehen – eine Rechtskurve an, die im Modell durch einen Viertelkreis beschrieben wird, der in der Ebene E verläuft und den Mittelpunkt $M\left(0|3\sqrt{2}|2\right)$ hat.

Das Lot von M auf g schneidet g im Punkt B. Im Modell stellt B den Punkt der Achterbahn dar, in dem der gerade Abschnitt endet und die Kurve beginnt. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und berechnen Sie den Kurvenradius im Modell.

(Teilergebnis: $B\left(-1|2\sqrt{2}|3\right)$).

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Lotfußpunkt auf eine Gerade



$M\left(0|3\sqrt{2}|2\right)$

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

Erläuterung: *Hilfsebene*

Um den Punkt B des Lotes von M auf g zu bestimmen, bildet man zuerst eine Hilfsebene, die durch M geht und senkrecht zu g steht. Diese Ebene scheidet somit die Gerade g im Lotfußpunkt B.

Hilfsebene H durch M senkrecht zu g aufstellen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier ist der Normalenvektor gleich dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Gerade g, da die Ebene senkrecht zu ihr stehen soll. Als Aufpunkt wird M gewählt.

$$H: \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{M}}$$

$H: -x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 + 6 + 2$

$H: -x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 - 8 = 0$

Hilfsebene H mit der Geraden g schneiden: $H \cap g$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also g in H eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$\begin{array}{rrcl} H \cap g: & -(0-\lambda) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}\lambda) + (2+\lambda) - 8 & = & 0 \\ & \lambda + 2 + 2\lambda + 2 + \lambda - 8 & = & 0 \\ & 4\lambda - 4 & = & 0 \\ & \lambda & = & 1 \end{array}$$

$\lambda = 1$ in g einsetzen und Lotfußpunkt B bestimmen:

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$B\left(-1|2\sqrt{2}|3\right)$

Länge eines Vektors

Kurvenradius $r = \overline{BM}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$r = \overline{BM} = \left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+2+1} = 2$$

Alternative Lösung

Der Lotfußpunkt B kann auch über die Lotfußpunktsformel bestimmt werden:

Erläuterung: *Lotfußpunktsformel*

Formel für die Bestimmung des Lotfußpunktes L eines Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g:

$$\left[\overrightarrow{g} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{v} = 0$$

„Gerade g minus Punkt P mal Richtungsvektor v der Geraden g ist gleich Null“

In diesem Fall ist M der Punkt P.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

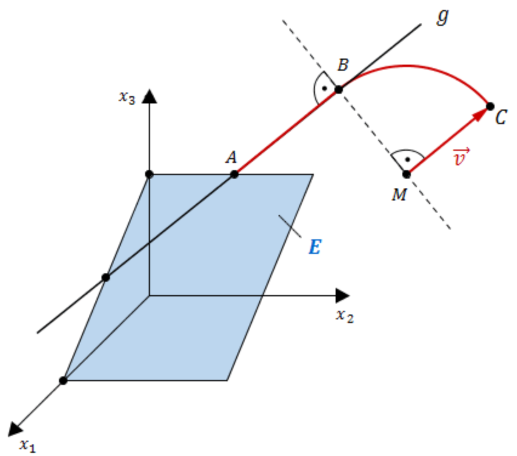
Nach der Skalarmultiplikation wird die Gleichung nach λ aufgelöst. Der gefundene Wert für λ wird in die Geradengleichung eingesetzt, um den Lotfußpunkt zu berechnen.

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Das Ende der Rechtskurve wird im Koordinatensystem durch den Punkt C beschrieben. Begründen Sie, dass für den Ortsvektor des Punkts C gilt: $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{M} + \overrightarrow{v}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Lage eines Punktes



Erläuterung:

Die Länge des Radius r wird in Teilaufgabe Teil B c und die des Richtungsvektors $\overrightarrow{v}$ in Teilaufgabe Teil B b berechnet.

1. $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{MC}$ sind gleich lang: $\quad |\overrightarrow{v}| = 2 = r = \left|\overrightarrow{MC}\right|$

Erläuterung:

$\overrightarrow{MB}$ steht senkrecht auf g, da B das Lot von M auf g ist. Wegen dem Viertelkreis steht $\overrightarrow{MC}$ senkrecht auf das Lot von M auf g. Also sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{MC}$ parallel.

2. $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{MC}$ sind parallel: $\quad \overrightarrow{MC} \parallel \overrightarrow{v}$

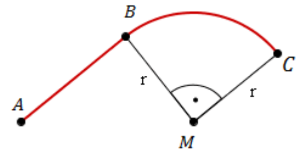
3. $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{MC}$ zeigen in die gleiche Richtung (Orientierung)

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Ein Wagen der Achterbahn durchfährt den Abschnitt, der im Modell durch die Strecke $[AB]$ und den Viertelkreis von B nach C dargestellt wird, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $15\frac{m}{s}$. Berechnen Sie die Zeit, die der Wagen dafür benötigt, auf Zehntelsekunden genau, wenn eine Längeneinheit im Koordinatensystem 10 m in der Realität entspricht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Länge eines Vektors



Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Aus Teilaufgabe Teil B c geht hervor, dass $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{v}$, also ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ und die Länge von $\overrightarrow{v}$ ist 2.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2$

Länge einer Strecke

Kreisumfang: $\quad U = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

Erläuterung: *Bogenlänge*

Da es sich hier um einen Viertelkreis handelt, ist die Länge des Bogens BC ein Viertel vom Kreisumfang groß.

Bogen BC: $\quad \frac{1}{4} \cdot U = \frac{1}{4} \cdot 4\pi = \pi$

Streckenlänge: $\quad s = (2 + \pi) \cdot 10 \approx 51,42$ m

Physikalische Anwendung

$$v = \frac{s}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{s}{v} = \frac{51{,}42\ \mathrm{m}}{15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 3{,}4\ \mathrm{s}$$