Abitur 2014 Mathematik Stochastik IV

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

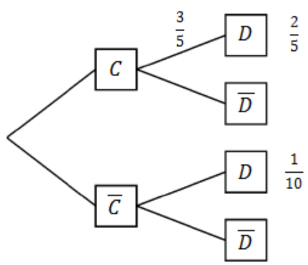
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

Das Baumdiagramm gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen C und D.



Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Berechnen Sie $P(\overline{D})$.

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Ereignisse C und D abhängig sind.

Teilaufgabe Teil A 2c (2 BE)

Von den im Baumdiagramm angegebenen Zahlenwerten soll nur der Wert $\frac{1}{10}$ so geändert werden, dass die Ereignisse C und D unabhängig sind. Bestimmen Sie den geänderten Wert.

In einem Supermarkt erhalten Kunden abhängig vom Wert ihres Einkaufs eine bestimmte Anzahl von Päckchen mit Tierbildern, die in ein Sammelalbum eingeklebt werden können. Jedes Päckchen enthält fünf Bilder. Im Sammelalbum sind Plätze für insgesamt 200 verschiedene Bilder vorgesehen. Die Bilder werden jeweils in großer Stückzahl mit der gleichen Häufigkeit produziert und auf die Päckchen zufällig verteilt, wobei sich die Bilder in einem Päckchen nicht unterscheiden müssen.

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Begründen Sie, dass der Term $\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf verschiedene Tierbilder befinden.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Einem Jungen fehlen in seinem Sammelalbum noch 15 Bilder. Er geht mit seiner Mutter zum Einkaufen und erhält anschließend zwei Päckchen mit Tierbildern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Päckchen nur Bilder enthalten, die der Junge bereits in seinem Sammelalbum hat.

Bei Kindern besonders beliebt sind die 3D-Bilder, auf denen die Tiere dreidimensional erscheinen. 20 der 200 für ein Sammelalbum vorgesehenen Bilder sind 3D-Bilder.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Päckchen ein Kind mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein 3D-Bild zu erhalten.

Um Geld für die Ausstattung des örtlichen Kindergartens einzunehmen, veranstaltet der Supermarkt ein Gewinnspiel. Die fünf Sektoren des dabei eingesetzten Glücksrads sind von 1 bis 5 durchnummeriert. Die Größe der Sektoren ist direkt proportional zum Zahlenwert der Nummern; beispielsweise ist der Sektor mit der Nummer 3 dreimal so groß wie der Sektor mit der Nummer 1. Nachdem der Spieler sechs Euro bezahlt hat, wird das Glücksrad einmal gedreht. Erzielt der Spieler eine der Nummern 1 bis 4, so wird ihm der zugehörige Zahlenwert als Betrag in Euro ausgezahlt, erzielt er die Nummer 5, so erhält er eine Eintrittskarte für einen Freizeitpark im Wert von fünfzehn Euro.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Öffnungswinkels des Sektors mit der Nummer 1 sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel eine Eintrittskarte gewinnt.

(*Teilergebnis: Größe des Öffnungswinkels:* $24°$)

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung pro Spiel, wenn der Gewinn einer Eintrittskarte mit einer Auszahlung von fünfzehn Euro gleichgesetzt wird. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Der Supermarkt muss für jede Eintrittskarte nur zehn Euro an den Freizeitpark bezahlen. Damit ist bei der Spielaktion ein finanzieller Überschuss zu erwarten, der an den örtlichen Kindergarten gespendet werden soll. Ermitteln Sie den zu erwartenden Überschuss, wenn man davon ausgeht, dass das Spiel insgesamt 6000-mal durchgeführt wird.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

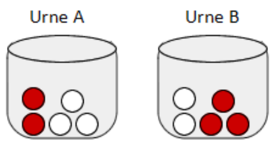
In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Kombinatorik



Erläuterung:

1. Fall: „Eine rote Kugel kommt raus und eine weiße rein“
   $\Rightarrow \quad 1 \times r \quad 4 \times w$

2. Fall: „Eine rote Kugel kommt raus und wieder rein“
   $\Rightarrow \quad 2 \times r \quad 3 \times w$

3. Fall: „Eine weiße Kugel kommt raus und wieder rein“
   $\Rightarrow \quad 2 \times r \quad 3 \times w$

4. Fall: „Eine weiße Kugel kommt raus und eine rote rein“
   $\Rightarrow \quad 3 \times r \quad 2 \times w$

Möglichkeiten:

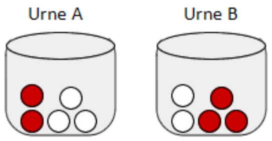
$1 \times r \quad 4 \times w$
$2 \times r \quad 3 \times w$
$3 \times r \quad 2 \times w$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Wahrscheinlichkeit



Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis E tritt ein, wenn entweder

1 rote Kugel aus A entnommen und auch wieder zurückgelegt wird (1. Fall)

oder

1 weiße Kugel aus A entnommen und auch wieder zurückgelegt wird (2. Fall).

1. Fall:
Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel aus A zu ziehen ist gleich $\frac{2}{5}$. Liegen dann in B 4 rote Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel aus B zu ziehen gleich $\frac{4}{6}$.

2. Fall:
Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel aus A zu Ziehen ist gleich $\frac{3}{5}$. Liegen dann in B 3 rote Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel aus B zu Ziehen gleich $\frac{3}{6}$.

$$P(E) = \overbrace{\frac{2}{5}}^{r \text{ aus } A} \cdot \overbrace{\frac{4}{6}}^{r \text{ aus } B} + \overbrace{\frac{3}{5}}^{w \text{ aus } A} \cdot \overbrace{\frac{3}{6}}^{w \text{ aus } B} = \frac{17}{30}$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

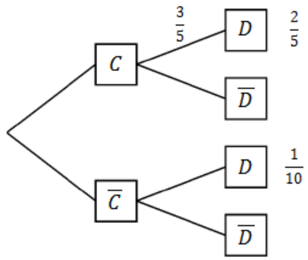
Für die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses $\overline{E}$ gilt: $\quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

$$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = \frac{13}{30}$$

$$\Rightarrow \quad P(E) > P\left(\overline{E}\right)$$

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

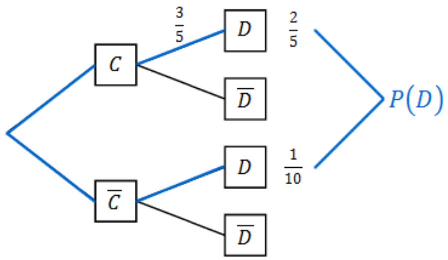
Das Baumdiagramm gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen C und D.



Berechnen Sie $P(\overline{D})$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wahrscheinlichkeit



Erläuterung: *2. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(D) = \underbrace{P(C \cap D)}_{\frac{2}{5}} + \underbrace{P(\overline{C} \cap D)}_{\frac{1}{10}}$

$$P(D) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = \frac{1}{2}$$

Zeichnen eines Baumdiagramms

Alternative Lösung: Baumdiagramm vervollständigen

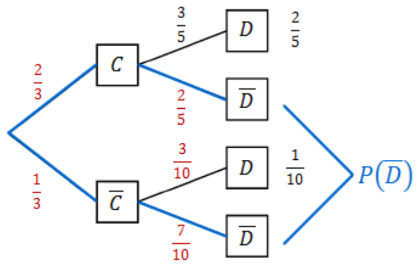
Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P_C(D) \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{P(C \cap D)}{P_C(D)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\overline{C} \cap D) = P(\overline{C}) \cdot P_{\overline{C}}(D) \quad \Rightarrow \quad P_{\overline{C}}(D) = \frac{P(\overline{C} \cap D)}{P(\overline{C})} = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{10}$$



Erläuterung: *2. Pfadregel, 1. Pfadregel*

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(\overline{D}) = P(C \cap \overline{D}) + P(\overline{C} \cap \overline{D})$

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$P(C \cap \overline{D}) = P(C) \cdot P_C(\overline{D}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$

$P(\overline{C} \cap \overline{D}) = P(\overline{C}) \cdot P_{\overline{C}}(\overline{D}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}$

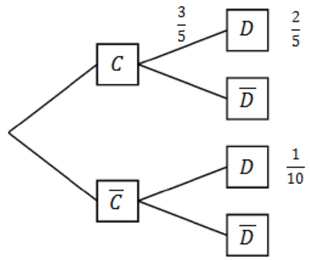
$$P\left(\overline{D}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$$

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Ereignisse C und D abhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Stochastische Unabhängigkeit



$P(D) = \frac{1}{2}$ (s. Teilaufgabe 2a)

$P(C \cap D) = \frac{2}{5}$

Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$P(C \cap D) = P(C) \cdot P_C(D) \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{P(C \cap D)}{P_C(D)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$

$$P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

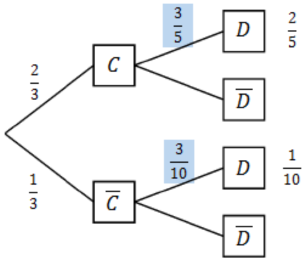
gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Zu zeigen: $P(C) \cdot P(D) \neq P(C \cap D)$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad C \text{ und } D \text{ sind stochastisch abhängig}$$

Alternative Lösung

Baumdiagramm so vervollständigen, dass $P_C(D)$ und $P_{\overline{C}}(D)$ abgelesen werden können (wenn nicht bereits in Teilaufgabe 2a geschehen).



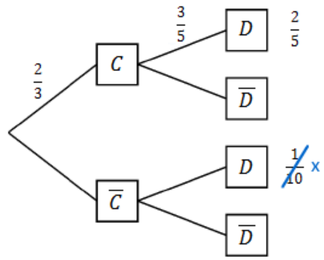
$\underbrace{P_C(D)}_{\frac{3}{5}} \neq \underbrace{P_{\overline{C}}(D)}_{\frac{3}{10}} \quad \Rightarrow \quad C$ und D sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe Teil A 2c (2 BE)

Von den im Baumdiagramm angegebenen Zahlenwerten soll nur der Wert $\frac{1}{10}$ so geändert werden, dass die Ereignisse C und D unabhängig sind. Bestimmen Sie den geänderten Wert.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2c

Stochastische Unabhängigkeit



Erläuterung: *2. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(D) = \underbrace{P(C \cap D)}_{\frac{2}{5}} + \underbrace{P(\overline{C} \cap D)}_{x}$

$P(D) = \frac{2}{5} + x$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Es soll gelten: $P(C) \cdot P(D) = P(C \cap D)$

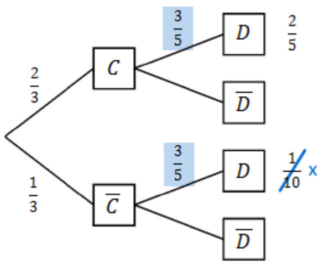
$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + x\right) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{15} + \frac{2}{3}x = \frac{2}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3}x = \frac{2}{15} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}$$

Alternative Lösung

Es soll gelten: $\underbrace{P_C(D)}_{\frac{3}{5}} = P_{\overline{C}}(D)$

$\Rightarrow \quad P_{\overline{C}}(D) = \dfrac{3}{5}$



$$\underbrace{P(\overline{C} \cap D)}_{x} = \underbrace{P(\overline{C})}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P_{\overline{C}}(D)}_{\frac{3}{5}} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{5}$$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

In einem Supermarkt erhalten Kunden abhängig vom Wert ihres Einkaufs eine bestimmte Anzahl von Päckchen mit Tierbildern, die in ein Sammelalbum eingeklebt werden können. Jedes Päckchen enthält fünf Bilder. Im Sammelalbum sind Plätze für insgesamt 200 verschiedene Bilder vorgesehen. Die Bilder werden jeweils in großer Stückzahl mit der gleichen Häufigkeit produziert und auf die Päckchen zufällig verteilt, wobei sich die Bilder in einem Päckchen nicht unterscheiden müssen.

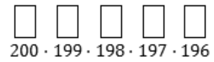
Begründen Sie, dass der Term $\dfrac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf verschiedene Tierbilder befinden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Kombinatorik

Mögliche Begründung:

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen*



Für die erste Karte gibt es 200 verschiedene Bilder zur Auswahl, für die zweite bleiben 199 übrig, da die erste Karte bereits vergeben ist. Für die dritte sind es dann 198, für die vierte 197 und für die fünfte 196.

Es handelt sich hierbei um das $k = 5$-fache Ziehen eines Bildes aus $n = 200$ verschiedenen Bildern ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Anzahl aller möglichen Ziehungen ist gegeben durch: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Also gilt:

$$\frac{200!}{(200-5)!} = \frac{200!}{195!} = \frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196 \cdot 195!}{195!} = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196$$

Der Term $200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, für ein Päckchen fünf verschiedene Bilder auszuwählen.

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge mit Zurücklegen*

$$\underset{200}{\square}\cdot\underset{200}{\square}\cdot\underset{200}{\square}\cdot\underset{200}{\square}\cdot\underset{200}{\square}$$

Anzahl mögliche Fälle

Für jede der 5 Karten gibt es 200 verschiedene Tierbilder zur Auswahl.

Es handelt sich hierbei um das $k = 5$-fache Ziehen eines Bildes aus $n = 200$ verschiedenen Bildern mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Anzahl aller möglichen Ziehungen ist gegeben durch: n^k

Also gilt: 200^5

Der Term 200^5 gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, für ein Päckchen fünf Bilder auszuwählen, die sich nicht unterscheiden müssen.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Einem Jungen fehlen in seinem Sammelalbum noch 15 Bilder. Er geht mit seiner Mutter zum Einkaufen und erhält anschließend zwei Päckchen mit Tierbildern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Päckchen nur Bilder enthalten, die der Junge bereits in seinem Sammelalbum hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Ziehen mit Reihenfolge mit Zurücklegen

$$P(B) = \left(\frac{185}{200}\right)^{10} \approx 45,9\%$$

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge mit Zurücklegen*

$$P(B) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

Anzahl günstige Fälle: Die 10 Karten aus den beiden Päckchen gehören zu den 185 Bildern, die der Junge bereits besitzt.

$\rightarrow$ 10 mal Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Die Anzahl aller möglichen Ziehungen ist gegeben durch: n^k

Also gilt: 185^{10}

Anzahl mögliche Fälle: Die 10 Karten aus den beiden Päckchen gehören zu den 200 Bildern.

$\rightarrow$ 10 mal Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Die Anzahl aller möglichen Ziehungen ist gegeben durch: n^k

Also gilt: 200^{10}

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{185^{10}}{200^{10}} = \left(\frac{185}{200}\right)^{10}$$

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Bei Kindern besonders beliebt sind die 3D-Bilder, auf denen die Tiere dreidimensional erscheinen. 20 der 200 für ein Sammelalbum vorgesehenen Bilder sind 3D-Bilder.

Ermitteln Sie, wie viele Päckchen ein Kind mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein 3D-Bild zu erhalten.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Binomialverteilung

Text analysieren:

“ ... mindestens ein 3D-Bild...“ $\Rightarrow$ $Z \geq 1$

“ ...mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% ...“ $\Rightarrow$ $P > 0,99$

„20 der 200 ... sind 3D-Bilder.“ $\Rightarrow$ $p = \frac{20}{200} = 0,1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,1$ angesehen werden.

$P_{0,1}^{n}(Z \geq 1) > 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_{0,1}^{n}(Z = 0) > 0,99$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0,9^n > 0,99$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0,9^n > 0,99 \quad | \quad \text{umstellen}$

$0,9^n < 1 - 0,99 \quad | \quad \text{logarithmieren}$

$\ln{(0,9)^n} < \ln(1 - 0,99)$

$n \cdot \ln{(0,9)} < \ln(1 - 0,99)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \frac{\ln(1-0,99)}{\ln{(0,9)}}$

$n > \frac{\ln(1-0,99)}{\ln{(0,9)}} \approx 43,7$

$\Rightarrow \quad n \geq 44$ (Bilder)

Erläuterung:

Eine Packung enthält 5 Bilder. Um mindestens 44 Bilder zu besitzen, benötigt man somit mindestens 9 Packungen, da $9 \cdot 5 = 45$.

$\Rightarrow$ Es werden mindestens 9 Päckchen benötigt.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

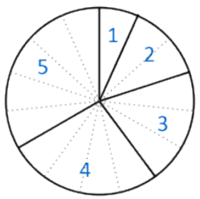
Um Geld für die Ausstattung des örtlichen Kindergartens einzunehmen, veranstaltet der Supermarkt ein Gewinnspiel. Die fünf Sektoren des dabei eingesetzten Glücksrads sind von 1 bis 5 durchnummeriert. Die Größe der Sektoren ist direkt proportional zum Zahlenwert der Nummern; beispielsweise ist der Sektor mit der Nummer 3 dreimal so groß wie der Sektor mit der Nummer 1. Nachdem der Spieler sechs Euro bezahlt hat, wird das Glücksrad einmal gedreht. Erzielt der Spieler eine der Nummern 1 bis 4, so wird ihm der zugehörige Zahlenwert als Betrag in Euro ausgezahlt, erzielt er die Nummer 5, so erhält er eine Eintrittskarte für einen Freizeitpark im Wert von fünfzehn Euro.

Bestimmen Sie die Größe des Öffnungswinkels des Sektors mit der Nummer 1 sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel eine Eintrittskarte gewinnt.

(*Teilergebnis: Größe des Öffnungswinkels:* $24°$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Wahrscheinlichkeit



$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Anzahl gleichgroßer „Sektoren“

$$\alpha = \frac{360°}{15} = 24°$$

Erläuterung:

Eine Eintrittskarte gewinnt man, wenn die Nummer 5 erzielt wird. Auf der Drehscheibe gibt es 15 gleichgroße Sektoren, 5 davon gehören zur Nummer 5.

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} = \frac{5}{15}$$

$$P(\text{„Eintrittskarte“}) = \frac{5}{15}$$

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

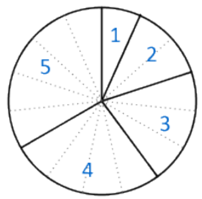
Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung pro Spiel, wenn der Gewinn einer Eintrittskarte mit einer Auszahlung von fünfzehn Euro gleichgesetzt wird. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Aus den Angaben der vorherigen Teilaufgabe:

Ziffer	1	2	3	4	5
Auszahlung A_i	1	2	3	4	15
$P(A = A_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$



Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 5) ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\,(X = x_i)$$

In dieser Aufgabe ist die Auszahlung A die Zufallsgröße.

$$E(A) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 15 \cdot \frac{5}{15}$$

$$E(A) = 7$$

Interpretation (Bsp.):

Der zu erwartende Gewinn eines Spielers (= Auszahlung - Einsatz) beträgt 1 €.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

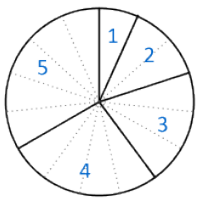
Der Supermarkt muss für jede Eintrittskarte nur zehn Euro an den Freizeitpark bezahlen. Damit ist bei der Spielaktion ein finanzieller Überschuss zu erwarten, der an den örtlichen Kindergarten gespendet werden soll. Ermitteln Sie den zu erwartenden Überschuss, wenn man davon ausgeht, dass das Spiel insgesamt 6000-mal durchgeführt wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Kosten für Eintrittskarte: 10 €

Ziffer	1	2	3	4	5
Kosten K_i	1	2	3	4	10
$P(K = K_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$



Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 5) ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\,(X = x_i)$$

In dieser Aufgabe sind die Kosten K die Zufallsgröße.

$$E(K) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 10 \cdot \frac{5}{15}$$

$$E(K) = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}$$

$$E(\text{Überschuss}) = 6000 \cdot \left(6 - \frac{16}{3}\right) = 4000$$

Der zu erwartende Überschüsse beträgt 4000 €.