

Abitur 2014 Mathematik Stochastik III

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Betrachtet wird das Ereignis E : „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

Teilaufgabe Teil A 2 (2 BE)

Betrachtet wird eine Bernoullikette mit der Trefferwahrscheinlichkeit 0,9 und der Länge 20. Beschreiben Sie zu dieser Bernoullikette ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0,9^{20} + 20 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19}$ angegeben wird.

Teilaufgabe Teil A 3 (3 BE)

Die Zufallsgröße X kann die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X mit $p_1, p_2 \in [0; 1]$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	p_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	p_2

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X nicht größer als 2,2 sein kann.

Im Rahmen der sogenannten JIM-Studie wurde in Deutschland im Jahr 2012 der Umgang von Jugendlichen im Alter von 12 bis 19 Jahren mit Information und Medien untersucht. In der folgenden Tabelle werden ausgewählte Ergebnisse dieser Studie anhand einer repräsentativen Auswahl von 200 Jugendlichen wiedergegeben, von denen 102 Jungen sind. Dabei werden für vier Geräteklassen jeweils die Anzahl der Mädchen und die Anzahl der Jungen unter den 200 ausgewählten Jugendlichen angegeben, die ein entsprechendes Gerät besitzen.

	Mädchen	Jungen
Smartphone	42	52
Computer	77	87
Fernsehgerät	54	65
feste Spielkonsole	37	62

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person weiblich ist und kein Fernsehgerät besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Aus den 200 Jugendlichen wird eine Person zufällig ausgewählt, die ein Fernsehgerät besitzt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weiblich ist.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Begründen Sie, dass die Ereignisse „Eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person besitzt ein Fernsehgerät.“ und „Eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person ist ein Mädchen.“ abhängig sind.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Der Studie zufolge besitzen 55% der Mädchen im Alter von 12 bis 19 Jahren ein Fernsehgerät.

Geben Sie den Wert der Summe $\sum_{i=0}^{12} B(25; 0,55; i)$ in Prozent an. Begründen Sie, dass dieser Wert im Allgemeinen nicht die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass von den 25 Schülerinnen einer Klasse der Jahrgangsstufe 9 weniger als die Hälfte ein Fernsehgerät besitzt.

Der JIM-Studie zufolge besitzen deutlich weniger als 90% der Jugendlichen einen Computer. Daher wird an den Stadtrat einer Kleinstadt der Wunsch herangetragen, im örtlichen Jugendzentrum einen Arbeitsraum mit Computern einzurichten. Der Stadtrat möchte die dafür erforderlichen finanziellen Mittel nur dann bewilligen, wenn weniger als 90% der Jugendlichen der Kleinstadt einen Computer besitzen.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Die Entscheidung über die Bewilligung der finanziellen Mittel soll mithilfe einer Befragung von 100 zufällig ausgewählten 12- bis 19-jährigen Jugendlichen der Kleinstadt getroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich bewilligt werden, soll höchstens 5% betragen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich nicht bewilligt werden, möglichst klein ist.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 befragten Jugendlichen genau 85 einen Computer besitzen, wenn der Anteil derjenigen Jugendlichen, die einen Computer besitzen, unter den Jugendlichen der Kleinstadt ebenso groß ist wie unter den in der Tabelle erfassten Jugendlichen.

Teilaufgabe Teil B 3 (4 BE)

Es ist zu vermuten, dass unter den Jugendlichen, die ein Smartphone besitzen, der Anteil derjenigen, die eine feste Spielkonsole besitzen, größer ist als unter den Jugendlichen, die kein Smartphone besitzen. Bestimmen Sie für die in der Tabelle erfassten 200 Jugendlichen, wie groß die Anzahl derjenigen Personen, die sowohl ein Smartphone als auch eine feste Spielkonsole besitzen, mindestens sein muss, damit die Vermutung für die in der Tabelle erfassten Jugendlichen zutrifft.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

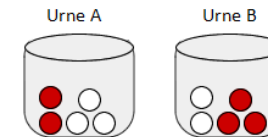
In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Kombinatorik



Erläuterung:

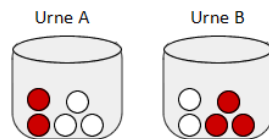
1. Fall: „Eine rote Kugel kommt raus und eine weiße rein“
 $\Rightarrow 1 \times r \quad 4 \times w$
2. Fall: „Eine rote Kugel kommt raus und wieder rein“
 $\Rightarrow 2 \times r \quad 3 \times w$
3. Fall: „Eine weiße Kugel kommt raus und wieder rein“
 $\Rightarrow 2 \times r \quad 3 \times w$
4. Fall: „Eine weiße Kugel kommt raus und eine rote rein“
 $\Rightarrow 3 \times r \quad 2 \times w$

Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 1 \times r & 4 \times w \\ 2 \times r & 3 \times w \\ 3 \times r & 2 \times w \end{aligned}$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Betrachtet wird das Ereignis E : „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b**Wahrscheinlichkeit**

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis E tritt ein, wenn entweder

1 rote Kugel aus A entnommen und auch wieder zurückgelegt wird (1. Fall)

oder

1 weiße Kugel aus A entnommen und auch wieder zurückgelegt wird (2. Fall).

1. Fall:

Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel aus A zu ziehen ist gleich $\frac{2}{5}$. Liegen dann in B 4 rote Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel aus B zu ziehen gleich $\frac{4}{6}$.

2. Fall:

Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel aus A zu Ziehen ist gleich $\frac{3}{5}$. Liegen dann in B 3 rote Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel aus B zu Ziehen gleich $\frac{3}{6}$.

$$P(E) = \overbrace{\frac{2}{5}}^{r \text{ aus A}} \cdot \overbrace{\frac{4}{6}}^{r \text{ aus B}} + \overbrace{\frac{3}{5}}^{w \text{ aus A}} \cdot \overbrace{\frac{3}{6}}^{w \text{ aus B}} = \frac{17}{30}$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Für die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses \bar{E} gilt: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = \frac{13}{30}$$

$$\Rightarrow P(E) > P(\bar{E})$$

Teilaufgabe Teil A 2 (2 BE)

Betrachtet wird eine Bernoullikette mit der Trefferwahrscheinlichkeit 0,9 und der Länge 20. Beschreiben Sie zu dieser Bernoullikette ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0,9^{20} + 20 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19}$ angegeben wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2**Binomialverteilung**

$$p = 0,9 \quad \Rightarrow \quad q = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$n = 20$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1-p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P_{0,9}^{20}(Z = 20) = \underbrace{\binom{20}{20}}_1 \cdot 0,9^{20} \cdot \underbrace{0,1^0}_1 = 0,9^{20}$$

$$P_{0,9}^{20}(Z = 19) = \underbrace{\binom{20}{19}}_{20} \cdot 0,9^{19} \cdot 0,1^1 = 20 \cdot 0,9^{19} \cdot 0,1^1$$

$$\underbrace{0,9^{20}}_{P(Z=20)} + \underbrace{20 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19}}_{P(Z=19)} = P(Z \geq 19)$$

Ereignis: „Mindestens 19 Treffer werden erzielt.“

Teilaufgabe Teil A 3 (3 BE)

Die Zufallsgröße X kann die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X mit $p_1, p_2 \in [0; 1]$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	p_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	p_2

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X nicht größer als 2,2 sein kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3**Erwartungswert einer Zufallsgröße**

Erwartungswert $E(X)$ bestimmen:

Erläuterung:

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier 4), ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

In diesem Fall:

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 k_i \cdot P(X = k_i)$$

$$E(X) = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot p_2$$

$$E(X) = \frac{7}{10} + 3p_2$$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeitsverteilung*

In einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1.

$$\text{Es gilt: } p_1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + p_2 = 1$$

$$\text{Daraus folgt: } p_1 + p_2 = \frac{1}{2}$$

p_2 kann somit maximal den Wert $\frac{1}{2}$ haben (wenn $p_1 = 0$): $p_2 \leq \frac{1}{2}$

Einsetzen in $E(X)$: $E(X) \leq \frac{7}{10} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{22}{10} = 2,2$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Im Rahmen der sogenannten JIM-Studie wurde in Deutschland im Jahr 2012 der Umgang von Jugendlichen im Alter von 12 bis 19 Jahren mit Information und Medien untersucht. In der folgenden Tabelle werden ausgewählte Ergebnisse dieser Studie anhand einer repräsentativen Auswahl von 200 Jugendlichen wiedergegeben, von denen 102 Jungen sind. Dabei werden für vier Geräteklassen jeweils die Anzahl der Mädchen und die Anzahl der Jungen unter den 200 ausgewählten Jugendlichen angegeben, die ein entsprechendes Gerät besitzen.

	Mädchen	Jungen
Smartphone	42	52
Computer	77	87
Fernsehgerät	54	65
feste Spielkonsole	37	62

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person weiblich ist und kein Fernsehgerät besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Wahrscheinlichkeit

Daten aus der Angabe und Tabelle analysieren:

- 200 Jugendliche insgesamt
- 102 sind Jungen, also sind 98 Mädchen
- 54 Mädchen haben ein Fernsehgerät, also haben $98 - 54 = 44$ Mädchen keins.

$P(\text{„Mädchen ohne Fernsehgerät“}) = \frac{44}{200} = 22\%$

Andere Schreibweise:

$P(W \cap \bar{F}) = \frac{44}{200} = 22\%$

W : „Person ist weiblich“

F : „Person besitzt ein Fernsehgerät“

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Aus den 200 Jugendlichen wird eine Person zufällig ausgewählt, die ein Fernsehgerät besitzt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weiblich ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Anzahl Jugendliche, die ein Fernsehgerät besitzen: $54 + 65 = 119$

Anzahl Mädchen, die ein Fernsehgerät besitzen: 54

$P(\text{„Jugendlicher mit Fernsehgerät ist weiblich“}) = \frac{54}{119} \approx 45,4\%$

Andere Schreibweise:

$P_F(W) = \frac{54}{119} \approx 45,4\%$

W : „Person ist weiblich“

F : „Person besitzt ein Fernsehgerät“

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Begründen Sie, dass die Ereignisse „Eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person besitzt ein Fernsehgerät.“ und „Eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person ist ein Mädchen.“ abhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Stochastische Unabhängigkeit

W : „Person ist weiblich“

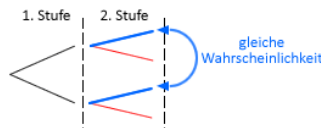
F : „Person besitzt ein Fernsehgerät“

$$P_F(W) \approx 45,4\% \quad (\text{Teilaufgabe 1b})$$

$$P(W) = \frac{98}{200} = 49\%$$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis immer dieselbe, unabhängig von einer Bedingung. Somit sind im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der Äste der zweiten Stufe, die in die gleiche Richtung (oben bzw. unten) zeigen, gleich.



Wenn F und W stochastisch unabhängig sein sollen, dann muss gelten:

$$P_F(W) = P_{\bar{F}}(W) = P(W)$$

Die Ereignisse F und W sind stochastisch abhängig, da $P_F(W) \neq P(W)$

Alternative Lösung

$$P_F(W) \approx 45,4\%$$

$$P_{\bar{F}}(W) = \frac{44}{81} \approx 54,3\%$$

Die Ereignisse F und W sind stochastisch abhängig, da $P_F(W) \neq P_{\bar{F}}(W)$

oder auch

$$P(F) \cdot P(W) = \frac{119}{200} \cdot \frac{98}{200} \approx 0,29 \neq \underbrace{\frac{54}{200}}_{=0,27} = P(F \cap W)$$

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Der Studie zufolge besitzen 55% der Mädchen im Alter von 12 bis 19 Jahren ein Fernsehgerät.

Geben Sie den Wert der Summe $\sum_{i=0}^{12} B(25; 0,55; i)$ in Prozent an. Begründen Sie, dass dieser Wert im Allgemeinen nicht die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass von den 25 Schülerinnen einer Klasse der Jahrgangsstufe 9 weniger als die Hälfte ein Fernsehgerät besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Binomialverteilung

$$\sum_{i=0}^{12} B(25; 0,55; i) = P_{0,55}^{25}(Z \leq 12) \approx 0,30632 \approx 30,6\% \quad (\text{Tafelwerk})$$

Begründung:

Die 25 Schülerinnen bilden keine repräsentative Auswahl aus den Mädchen im Alter von 12 bis 19 Jahren.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Der JIM-Studie zufolge besitzen deutlich weniger als 90% der Jugendlichen einen Computer. Daher wird an den Stadtrat einer Kleinstadt der Wunsch herangetragen, im örtlichen Jugendzentrum einen Arbeitsraum mit Computern einzurichten. Der Stadtrat möchte die dafür erforderlichen finanziellen Mittel nur dann bewilligen, wenn weniger als 90% der Jugendlichen der Kleinstadt einen Computer besitzen.

Die Entscheidung über die Bewilligung der finanziellen Mittel soll mithilfe einer Befragung von 100 zufällig ausgewählten 12- bis 19-jährigen Jugendlichen der Kleinstadt getroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich bewilligt

werden, soll höchstens 5% betragen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich nicht bewilligt werden, möglichst klein ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Erläuterung: *Signifikanzniveau, Hypothesentest*

Die Nullhypothese versteckt sich im Text in den Sätzen „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel **irrtümlich bewilligt** werden, soll höchstens 5% betragen“ und „... nur dann bewilligen, wenn **weniger** als 90%...“.

Die 5% stehen für das Signifikanzniveau, also die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird, obwohl sie eigentlich richtig ist (Fehler erster Art oder α -Fehler).

„Irrtümlich bewilligen“ ist gleich zu „fälschlicherweise ablehnen“.

Die Ablehnung ist somit die Nullhypothese. Diese findet statt, wenn mindestens (Gegenteil zu weniger) 90% der Jugendlichen einen Computer besitzen.

Nullhypothese: $H_0 : p \geq 0,9$

Stichprobenumfang: $n = 100$

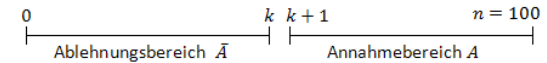
Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmehbereich von H_0 : $A = [k + 1, 100]$

Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = [0, k]$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Da hier die Nullhypothese „ $p \geq 0,9$ “ bzw. „**Mindestens** 90%“ lautet, liegt der Annahmehbereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1. Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).

\Rightarrow Fehler erster Art: $P_{0,9}^{100}(Z \leq k) \leq 0,05$

$$P_{0,9}^{100}(Z \leq k) \leq 0,05$$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k = 84$

Entscheidungsregel:



Die Bewilligung der finanziellen Mittel findet statt, wenn höchstens 84 Jugendliche einen PC besitzen.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 befragten Jugendlichen genau 85 einen Computer besitzen, wenn der Anteil derjenigen Jugendlichen, die einen Computer besitzen, unter den Jugendlichen der Kleinstadt ebenso groß ist wie unter den in der Tabelle erfassten Jugendlichen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Binomialverteilung

Aus der Tabelle:

Jugendliche mit Computer = $77 + 87 = 164$

$$P(\text{„Computer“}) = \frac{164}{200} = 0,82$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P_{0,82}^{100}(Z = 85) = \binom{100}{85} \cdot 0,82^{85} \cdot 0,18^{15} \approx 8,1\%$$

Teilaufgabe Teil B 3 (4 BE)

Es ist zu vermuten, dass unter den Jugendlichen, die ein Smartphone besitzen, der Anteil derjenigen, die eine feste Spielkonsole besitzen, größer ist als unter den Jugendlichen, die kein Smartphone besitzen. Bestimmen Sie für die in der Tabelle erfassten 200 Jugendlichen, wie groß die Anzahl derjenigen Personen, die sowohl ein Smartphone als auch eine feste Spielkonsole besitzen, mindestens sein muss, damit die Vermutung für die in der Tabelle erfassten Jugendlichen zutrifft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3**Bedingte Wahrscheinlichkeit**

Aus der Tabelle geht hervor:

Anzahl der Jugendlichen, die ein Smartphone besitzen: $42 + 52 = 94$

Anzahl der Jugendlichen, die eine Konsole besitzen: $37 + 62 = 99$

Daraus folgt:

Anteil an Jugendlichen, die eine Konsole besitzen: $\frac{99}{200} = 49,5\%$

Erläuterung:

49,5% der in der Tabelle erfassten Jugendlichen besitzt eine feste Spielkonsole.

Damit die Vermutung zutrifft, muss der Anteil derjenigen Personen, die eine feste Spielkonsole besitzen, unter denen, die im Besitz eines Smartphones sind, größer als 49,5% sein.

Folglich müssen von den 94 Personen, die im Besitz eines Smartphones sind, mindestens 49,5%, also $\frac{99}{200} \cdot 94 = 47$ Personen, auch eine feste Spielkonsole besitzen.

$94 \cdot \frac{99}{200} = 46,53 \Rightarrow$ Mindestens 47 Jugendliche müssen sowohl ein Smartphone als auch eine Spielkonsole besitzen.