

Fachabitur 2014 Mathematik NT Stochastik S II

Ein Onlineshop ist spezialisiert auf den Vertrieb von Gartengrills (mit Zubehör) an Endkunden. Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bei einer „Frühlingsaktion“ erhält jeder, der bei diesem Shop einen Grill bestellt, gratis einen von drei Zubehörartikeln. Der Kunde kann so zwischen einer Grillschürze (S), einer Reinigungsbürste (B) oder einer Grillzange (Z) auswählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 50% der Kunden für die Schürze, die übrigen wählen die Bürste bzw. die Zange. Im Folgenden wird die Wahl der Zubehörartikel für die nächsten beiden eingehenden Bestellungen zu dieser Frühlingsaktion als Zufallsexperiment betrachtet. Dabei ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit für zweimal Reinigungsbürste 4% beträgt.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.

[Teilergebnis: 30% wählen die Grillzange]

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1 : „Genau eine Schürze wird bestellt.“

E_2 : „Es wird keine Zange bestellt.“

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und überprüfen Sie beide Ereignisse auf Unvereinbarkeit.

Teilaufgabe 2. (5 BE)

In diesem Shop werden ausschließlich Holzkohle- und Gasgrills angeboten. Von 300 im letzten Monat verkauften Grills sind 80 Gasgrills. An Singlehaushalte gingen 30 Gasgrills. Größere Haushalte (zwei und mehr Personen) haben in diesem Zeitraum 180 Holzkohlegrills gekauft.

Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob der Kauf eines Gasgrills unabhängig von der Haushaltsgröße ist.

Teilaufgabe 3. (7 BE)

Von 1500 Kunden, die bei diesem Shop bisher einen Holzkohlegrill bestellten, wählten 600 einen Kugelgrill (geschlossen nutzbar), die anderen entschieden sich für ein Modell ohne Deckel. Es werden zwölf Bestellungen eines Holzkohlegrills zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_3 : „Genau fünf Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.“

E_4 : „Nur der erste und der zweite Kunde wählten ein Modell ohne Deckel.“

E_5 : „Mindestens zwei Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.“

Teilaufgabe 4. (3 BE)

In dieser Saison ist der Gasgrill „Gourmet“ neu im Sortiment. Von allen verkauften Gartengrills sind 5% von diesem Typ. In der Versandabteilung müssen an einem späten Nachmittag noch zehn Gartengrills versandfertig verpackt werden. Ermitteln Sie, wie viele „Gourmet-Grills“ mindestens noch auf Lager sein müssten, damit deren Anzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% für diesen Nachmittag noch ausreicht.

Teilaufgabe 5. (6 BE)

Der Hersteller der „Gourmet-Grills“ verspricht, dass im Schnitt 97 von 100 produzierten Grills einwandfrei sind. Der Geschäftsführer des Onlineshops hat aufgrund der bisherigen Reklamationen den Eindruck, dass die Qualität der Grills deutlich geringer ist (Gegenhypothese).

Der Geschäftsführer schlägt daher vor, die nächsten 200 auszuliefernden Grills zu testen. Sind darunter mindestens 192 Grills einwandfrei, so wird er seine Zweifel an der Qualität verwerfen.

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Erläutern Sie kurz den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit.

Zu Werbezwecken legt der Onlineshop jeder Bestellung eines Holzkohlegrills einzeln verpackte Grillanzünder-Würfel bei. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl dieser Würfel an, die Kunden gemäß einer Online-Befragung pro „Start“ ihres Grills verbrauchen. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den noch zu bestimmenden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$a - 0,85$	0,10	$a \cdot b$	$2b$	0,15

Teilaufgabe 6.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die Parameter a und b , wenn bekannt ist, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 45% maximal zwei Würfel verwendet werden.

[Teilergebnis: $b = 0,20$]

Teilaufgabe 6.2 (6 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der verbrauchten Würfel innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ein Onlineshop ist spezialisiert auf den Vertrieb von Gartengrills (mit Zubehör) an Endkunden. Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bei einer „Frühlingsaktion“ erhält jeder, der bei diesem Shop einen Grill bestellt, gratis einen von drei Zubehörartikeln. Der Kunde kann so zwischen einer Grillschürze (S), einer Reinigungsbürste (B) oder einer Grillzange (Z) auswählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 50% der Kunden für die Schürze, die übrigen wählen die Bürste bzw. die Zange. Im Folgenden wird die Wahl der Zubehörartikel für die nächsten beiden eingehenden Bestellungen zu dieser Frühlingsaktion als Zufallsexperiment betrachtet. Dabei ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit für zweimal Reinigungsbürste 4% beträgt.

Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.

[Teilergebnis: 30% wählen die Grillzange]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

$$P(S) = 50\% = 0,5$$

$$P(\{BB\}) = 4\% = 0,04$$

Erläuterung: 1. Pfadregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$$P(\{BB\}) = P(B) \cdot P(B)$$

$$0,04 = P(B) \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \sqrt{0,04} = 0,2$$

$$P(Z) = 1 - (P(S) + P(B)) = 1 - (0,5 + 0,2) = 0,3$$

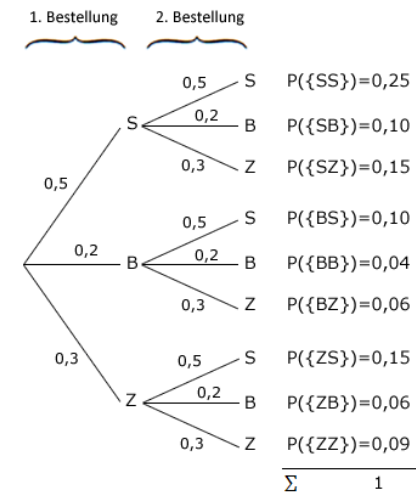
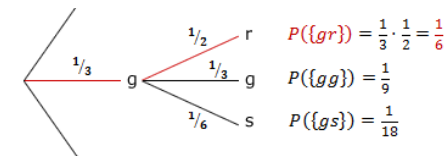
Baumdiagramm zeichnen und Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bestimmen:

Erläuterung: 1. Pfadregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel:

$$P(\{gr\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

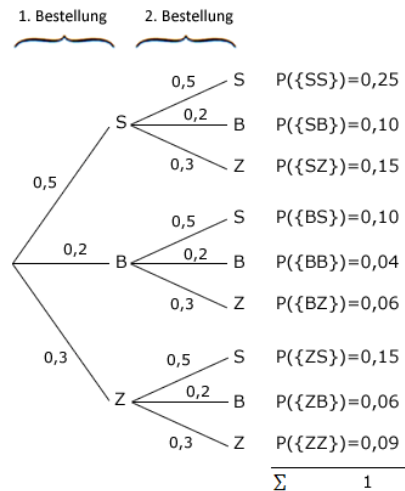
E_1 : „Genau eine Schürze wird bestellt.“

E_2 : „Es wird keine Zange bestellt.“

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und überprüfen Sie beide Ereignisse auf Unvereinbarkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2**Ereignis in Mengenschreibweise**

Baumdiagramm aus Teilaufgabe 1.1



$$E_1 = \{SB; SZ; BS; ZS\}$$

$$E_2 = \{SS; SB; BS; BB\}$$

Unvereinbarkeit zweier Ereignisse

Prüfen auf Unvereinbarkeit:

Erläuterung: *Unvereinbarkeit*

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen unvereinbar, wenn gilt:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \quad (\emptyset = \text{leere Menge})$$

Wenn zwei Ereignisse unvereinbar sind, dann können sie nicht gleichzeitig eintreten.

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$E_1 \cap E_2 = \{SB; BS\} \neq \{\} \Rightarrow E_1 \text{ und } E_2 \text{ sind vereinbar}$$

Teilaufgabe 2. (5 BE)

In diesem Shop werden ausschließlich Holzkohle- und Gasgrills angeboten. Von 300 im letzten Monat verkauften Grills sind 80 Gasgrills. An Singlehaushalte gingen 30 Gasgrills. Größere Haushalte (zwei und mehr Personen) haben in diesem Zeitraum 180 Holzkohlegrills gekauft.

Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob der Kauf eines Gasgrills unabhängig von der Haushaltsgröße ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2.**Vierfeldertafel für zwei Ereignisse**

Ereignisse:

G : „Gasgrill wird gekauft“

S : „Singlehaushalt“

Gegebene Wahrscheinlichkeiten:

$$P(G) = \frac{80}{300}; \quad P(S \cap G) = \frac{30}{300}; \quad P(\bar{S} \cap \bar{G}) = \frac{180}{300}$$

	s	\bar{s}	Σ
G	$\frac{30}{300}$		$\frac{80}{300}$
\bar{G}		$\frac{180}{300}$	
Σ			1

Tafel vervollständigen:

	s	\bar{s}	Σ
G	$\frac{30}{300}$	$\frac{50}{300}$	$\frac{80}{300}$
\bar{G}	$\frac{40}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{220}{300}$
Σ	$\frac{70}{300}$	$\frac{230}{300}$	1

Stochastische Unabhängigkeit

$$P(G) \cdot P(S) = \frac{80}{300} \cdot \frac{70}{300} = \frac{14}{225} \neq \frac{30}{300} = P(S \cap G)$$

Erläuterung: Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

\Rightarrow G und S sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 3. (7 BE)

Von 1500 Kunden, die bei diesem Shop bisher einen Holzkohlegrill bestellten, wählten 600 einen Kugelgrill (geschlossen nutzbar), die anderen entschieden sich für ein Modell ohne Deckel. Es werden zwölf Bestellungen eines Holzkohlegrills zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_3 : „Genau fünf Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.“

E_4 : „Nur der erste und der zweite Kunde wählten ein Modell ohne Deckel.“

E_5 : „Mindestens zwei Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.“

Lösung zu Teilaufgabe 3.

Binomialverteilung

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 12$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(\text{„Kugelgrill“}) = \frac{600}{1500} = 0,4$ angesehen werden.

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1-p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$P(E_3) = P_{0,4}^{12}(X = 5) = \binom{12}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^7 \approx 0,22703$$

Erläuterung:

$$q = P(\text{„ohne Deckel“}) = 1 - p = 0,6$$

ohne Deckel	mit Deckel
1. D	2. D
3. D	4. D
5. D	6. D
7. D	8. D
9. D	10. D
11. D	12. D

$0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4$

$$P(E_4) = 0,6^2 \cdot 0,4^{10} \approx 0,00004$$

Erläuterung:

$$\text{„ Mindestens zwei Kunden“} \iff X \geq 2$$

$$P(E_5) = P_{0,4}^{12}(X \geq 2)$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$$P(\text{„mindestens } k \text{ Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens } k-1 \text{ Treffer“})$$

In mathematischen Zeichen:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

$$P(E_5) = 1 - P_{0,4}^{12}(X \leq 1)$$

Erläuterung:

$$X \leq 1 = \text{„höchstens 1 Treffer“} = \text{„entweder 0 Treffer oder 1 Treffer“}$$

$$P(E_5) = 1 - [P_{0,4}^{12}(X = 0) + P_{0,4}^{12}(X = 1)]$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1-p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$P(E_5) = 1 - \left[\binom{12}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^{11} \right] \approx 0,98041$$

Teilaufgabe 4. (3 BE)

In dieser Saison ist der Gasgrill „Gourmet“ neu im Sortiment. Von allen verkauften Gar-

tengrills sind 5% von diesem Typ. In der Versandabteilung müssen an einem späten Nachmittag noch zehn Gartengrills versandfertig verpackt werden. Ermitteln Sie, wie viele „Gourmet-Grills“ mindestens noch auf Lager sein müssten, damit deren Anzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% für diesen Nachmittag noch ausreicht.

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Binomialverteilung

X : Anzahl der benötigten Gourmet-Grills

k : Anzahl der vorhandenen Gourmet-Grills

$$n = 10$$

$$p = 5\% = 0,05$$

$$\text{Es soll gelten: } P_{0,05}^{10}(X \leq k) > 0,99$$

$$\text{Tafelwerk: } P_{0,05}^{10}(X \leq 3) = 0,99897 > 0,99$$

$$\text{Tafelwerk: } k \geq 3$$

Mindestens 3 Gourmet-Grills müssen auf Lager sein.

Teilaufgabe 5. (6 BE)

Der Hersteller der „Gourmet-Grills“ verspricht, dass im Schnitt 97 von 100 produzierten Grills einwandfrei sind. Der Geschäftsführer des Onlineshops hat aufgrund der bisherigen Reklamationen den Eindruck, dass die Qualität der Grills deutlich geringer ist (Gegenhypothese).

Der Geschäftsführer schlägt daher vor, die nächsten 200 auszuliefernden Grills zu testen. Sind darunter mindestens 192 Grills einwandfrei, so wird er seine Zweifel an der Qualität verwerfen.

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Erläutern Sie kurz den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 5.

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

T : Anzahl der einwandfreien Grills unter 200.

$$\text{Nullhypothese: } H_0 : p = \frac{97}{100} = 0,97$$

$$\text{Gegenhypothese: } H_1 : p_1 < 0,97$$

$$\text{Stichprobenumfang: } n = 200$$

Entscheidungsregel:

Erläuterung: *Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese „ $p_1 < 0,97$ “ bzw. „Qualität der Grills ist deutlich **geringer**“ lautet, liegt der Annahmehbereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



$$\text{Annahmehbereich von } H_0: A = [192, 200]$$

$$\text{Ablehnungsbereich von } H_0: \bar{A} = [0, 191]$$

Fehler 1. Art:

Erläuterung: *Fehler 1. Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($T \leq k$).

Bedeutet, dass H_0 abgelehnt wird, obwohl war, d.h. man nimmt an der Anteil an einwandfreien Grills ist weniger als 97%, obwohl er tatsächlich mindestens 97% beträgt.

Fehlerwahrscheinlichkeit bestimmen:

$$\alpha' = P_{0,97}^{200}(T \leq 191) = 0,14960 \quad (\text{Wert wird aus dem Tafelwerk abgelesen})$$

Teilaufgabe 6.1 (4 BE)

Zu Werbezwecken legt der Onlineshop jeder Bestellung eines Holzkohlegrills einzeln verpackte Grillanzünder-Würfel bei. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl dieser Würfel an, die Kunden gemäß einer Online-Befragung pro „Start“ ihres Grills verbrauchen. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den noch zu bestimmenden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$a - 0,85$	0,10	$a \cdot b$	$2b$	0,15

Bestimmen Sie die Parameter a und b , wenn bekannt ist, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 45% maximal zwei Würfel verwendet werden.

[Teilergebnis: $b = 0,20$]

Lösung zu Teilaufgabe 6.1**Wahrscheinlichkeitsverteilung**

Gegeben: $P(X \leq 2) = 0,45$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$$P(\text{„mindestens } k \text{ Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens } k \text{ Treffer“})$$

In mathematischen Zeichen:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,45 = 0,55$$

$$\underbrace{P(X \geq 3)}_{0,55} = \underbrace{P(X = 4)}_{2b} + \underbrace{P(X = 5)}_{0,15}$$

$$0,55 = 2b + 0,15 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0,4 \quad \Rightarrow \quad b = 0,2$$

$$\underbrace{P(X \leq 2)}_{0,45} = \underbrace{P(X = 0)}_{a-0,85} + \underbrace{P(X = 1)}_{0,1} + \underbrace{P(X = 2)}_{0,2a}$$

$$0,45 = a - 0,85 + 0,1 + 0,2a \quad \Rightarrow \quad 1,2 = 1,2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Teilaufgabe 6.2 (6 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der verbrauchten Würfel innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung zu Teilaufgabe 6.2**Erwartungswert einer Zufallsgröße**

x	0	1	2	3	4	Σ
$P(X = x)$	0,15	0,1	0,2	0,4	0,15	1

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte x_1, x_2, \dots, x_n jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$\mu = E(X) = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,15 = 2,3$$

Standardabweichung einer Zufallsgröße

Varianz bestimmen:

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte x_1, x_2, \dots, x_n jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an, so gilt für die Varianz dieser Zufallsgröße:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \quad (\mu = E(X) = \text{Erwartungswert von } X)$$

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= (0 - 2,3)^2 \cdot 0,15 + (1 - 2,3)^2 \cdot 0,1 \\ &\quad + \\ &\quad (2 - 2,3)^2 \cdot 0,2 + (3 - 2,3)^2 \cdot 0,4 \\ &\quad + \\ &\quad (4 - 2,3)^2 \cdot 0,15 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = 1,61$$

Alternative Berechnung der Varianz über die Verschiebungsregel:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,15 + 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,15 = 6,9$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 6,9 - 2,3^2 = 1,61$$

Standardabweichung bestimmen: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1,61} \approx 1,27$

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung:

„innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert“ = $|X - \mu| < \sigma$

Die Ungleichung $|X - \mu| < \sigma$ ist gleichbedeutend zu $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$.

$$P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

$$P(|X - 2,3| < 1,27) = P(1,03 < X < 3,57)$$

Erläuterung:

Die Zufallsgröße X gibt in diesem Fall die Anzahl der verbrauchten Würfel an. Da ein Würfel nur ganze Male verwendet werden kann, muss hier auf ganze Zahlen gerundet werden.

$$P(|X - 2,3| < 1,27) = P(2 \leq X \leq 3)$$

Erläuterung:

Wenn X zwischen 2 und 3 liegen soll, dann kann X entweder gleich 2 oder 3 sein.

$$P(|X - 2,3| < 1,27) = \underbrace{P(X = 2)}_{0,2} + \underbrace{P(X = 3)}_{0,4} = 0,6$$