Fachabitur 2014 Mathematik NT Stochastik S I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bei einer Casting-Show werden Models gekürt. Dazu gehen junge Damen einen Laufsteg entlang und präsentieren Kleider. Jedes Model hat genau einen Auftritt.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Zwei blonde (b), ein schwarzhaariges (s) und ein rothaariges (r) Model bereiten sich auf ihren Auftritt vor. Die Reihenfolge, in der die ersten drei Models aufgerufen werden, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller 12 Elementarereignisse. Begründen Sie, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Das dritte Model hat rote Haare."
E_2: „Das erste Model ist nicht blond."
$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E_2}}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2 und E_3.

Es steht eine große Zahl Kleider der Marken A, D, G und V zur Verfügung.
Im Folgenden werden fünf Auftritte des Models Eva betrachtet. Die Auswahl eines Kleides erfolgt zufällig, wobei das getragene Kleid wieder zurück gehängt wird und für einen weiteren Auftritt zur Verfügung steht.
Es gelten folgende Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = \frac{1}{3}; P(D) = \frac{1}{4}$ und $P(V) = \frac{1}{8}$.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_4 : „Eva trägt kein Kleid der Marke V."
E_5 : „Eva trägt mehr als dreimal ein Kleid der Marke D."
E_6 : „Eva trägt jeweils genau zwei Kleider der Marke A hintereinander und der Marke G hintereinander."

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der von Eva getragenen Kleider der Marke A an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Zufallsgröße innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Teilaufgabe 3. (5 BE)

$\frac{3}{4}$ von 24 Models tragen Schuhe einer bestimmten Marke (M). Neun der Models, die diese Schuhe tragen, klagen über Hautreizungen (H) an den Füßen. Insgesamt hat die Hälfte aller Models keine Hautreizungen.
Prüfen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel, ob die Ereignisse M und H stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im vorliegenden Zusammenhang.

Am Ende der Show bewerten die Zuschauer jedes Model. Eva hatte bei der letzten Bewertung eine Zustimmung von 60% erhalten. Es wird vermutet, dass Eva bei der nächsten Bewertung weniger Zustimmung bekommt (Gegenhypothese).
Zur Überprüfung der Vermutung wird eine Umfrage unter 200 Personen durchgeführt.

Teilaufgabe 4.1 (5 BE)

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den minimalen Annahmebereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Geben Sie an, wie man anhand des Tests (vgl. 4.1) entscheidet, wenn nur 55% der Befragten Eva die Zustimmung geben.
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht und warum man seine Wahrscheinlichkeit nicht berechnen kann.

Teilaufgabe 5. (4 BE)

Das Monatsgehalt Y der Vorjahressiegerin der Casting-Show kann als Zufallsgröße mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden:

y in €	1000	2000	4000	10000	12000
P(Y = y)	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung geeignet graphisch dar und untersuchen Sie rechnerisch, ob das Model mit einem festen Monatsgehalt von 3540 € auf lange Sicht mehr verdienen würde.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bei einer Casting-Show werden Models gekürt. Dazu gehen junge Damen einen Laufsteg entlang und präsentieren Kleider. Jedes Model hat genau einen Auftritt.

Zwei blonde (b), ein schwarzhaariges (s) und ein rothaariges (r) Model bereiten sich auf ihren Auftritt vor. Die Reihenfolge, in der die ersten drei Models aufgerufen werden, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller 12 Elementarereignisse. Begründen Sie, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Wahrscheinlichkeit

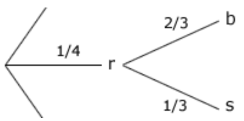
Baumdiagramm zeichnen:

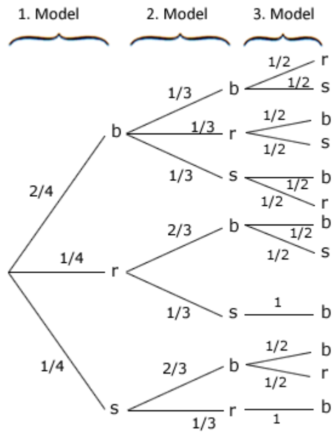
Erläuterung: *Ziehen ohne Zurücklegen*

Nachdem ein Model aufgerufen wurde, verändert sich die Anzahl der zu Verfügung stehenden Models. Somit ändern sich die Wahrscheinlichkeiten nach jedem Aufruf.

Beispiel:

Wurde beim ersten Aufruf ein rothaariges Model aufgerufen, so kann beim zweiten Mal kein rothaariges mehr aufgerufen werden. Es gibt noch 3 Models: 2 schwarzhaarige und 1 blondes.





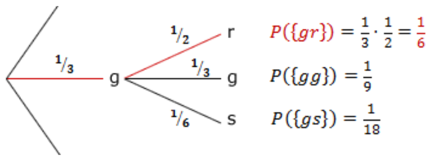
Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bestimmen:

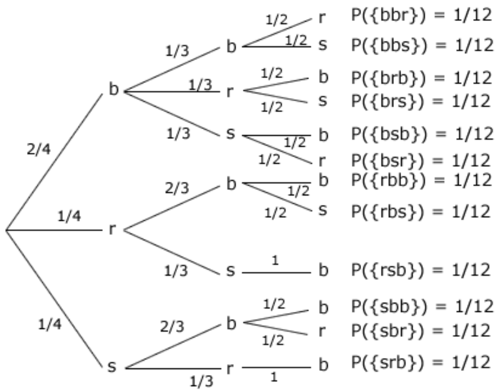
Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel:

$$P(\{g\,r\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$





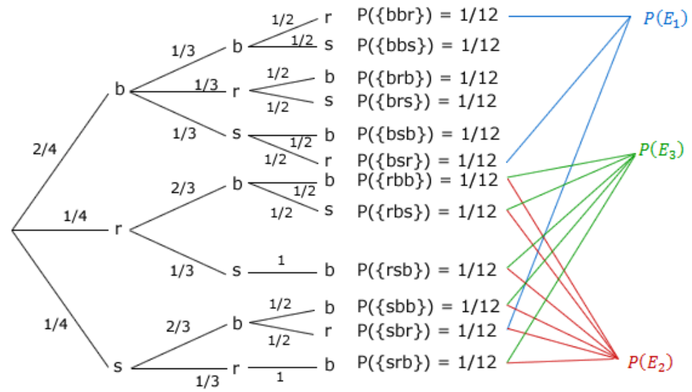
Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da die Wahrscheinlichkeit für alle Elementarereignisse gleich ist $\left(p = \frac{1}{12}\right)$.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Das dritte Model hat rote Haare."
E_2: „Das erste Model ist nicht blond."
$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E_2}}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2 und E_3.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Wahrscheinlichkeit



$E_1 = \{\text{bbr}; \text{bsr}; \text{sbr}\}$

$E_2 = \{\text{rbb}; \text{rsb}; \text{rbs}; \text{sbb}; \text{sbr}; \text{srb}\}$

Erläuterung: *De Morgansche Gesetze*

Gesetze von De Morgan (s. auch Merkhilfe Mathematik):

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

In diesem Fall: $\overline{E_1 \cup \overline{E_2}} = \overline{E_1} \cap \underbrace{\overline{\overline{E_2}}}_{E_2} = \overline{E_1} \cap E_2$

$\overline{E_1 \cup \overline{E_2}} = \overline{E_1} \cap E_2 \quad \Rightarrow \quad E_3 = \{\text{sbb}; \text{rbb}; \text{srb}; \text{rbs}; \text{rsb}\}$

Erläuterung: *2. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Beispiel:

$P\ (E_1) = P(\{\text{bbr}\}) + P(\{\text{bsr}\}) + P(\{\text{sbr}\})$

$P\ (E_1) = 3 \cdot \frac{1}{12} = 0,25$

$P\ (E_2) = 6 \cdot \frac{1}{12} = 0,5$

$P\ (E_3) = 5 \cdot \frac{1}{12} \approx 0,4167$

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Es steht eine große Zahl Kleider der Marken A, D, G und V zur Verfügung.
Im Folgenden werden fünf Auftritte des Models Eva betrachtet. Die Auswahl eines Kleides erfolgt zufällig, wobei das getragene Kleid wieder zurück gehängt wird und für einen weiteren Auftritt zur Verfügung steht.
Es gelten folgende Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = \frac{1}{3}; P(D) = \frac{1}{4}$ und $P(V) = \frac{1}{8}$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_4 : „Eva trägt kein Kleid der Marke V."
E_5 : „Eva trägt mehr als dreimal ein Kleid der Marke D."
E_6 : „Eva trägt jeweils genau zwei Kleider der Marke A hintereinander und der Marke G hintereinander."

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Binomialverteilung

$P(G)$ bestimmen:

$$P(G) = 1 - (P(A) + P(D) + P(V)) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}$$

Erläuterung: *Ereignis*

Die Wahrscheinlichkeit kein Kleid der Marke V $\left(\overline{V}\right)$ zu tragen beträgt:

$P\ \left(\overline{V}\right) = 1 - P(V) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$$P\ (E_4) = \underbrace{\frac{7}{8}}_{1.\ \text{Auftritt}} \cdot \underbrace{\frac{7}{8}}_{2.} \cdot \underbrace{\frac{7}{8}}_{3.} \cdot \underbrace{\frac{7}{8}}_{4.} \cdot \underbrace{\frac{7}{8}}_{5.} = \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0,5129$$

Erläuterung: *Ereignis*

„mehr als dreimal ein Kleid der Marke D" bedeutet bei 5 Auftritte entweder 4 **oder** 5 Mal ein Kleid der Marke D.

Das " **oder**" kennzeichnet Alternativen, die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden addiert.

$$P\ (E_5) = P^5_{\frac{1}{4}}(X > 3) = P^5_{\frac{1}{4}}(X = 4) + P^5_{\frac{1}{4}}(X = 5)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P^n_p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P\ (E_5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^0}_{1} = \frac{1}{64} \approx 0,0156$$

Erläuterung:

Möglichkeiten $A\,A$ und $G\,G$ hintereinander:

Auftritt

Möglichkeit	1.	2.	3.	4.	5.
1	A	A	G	G	
2		A	A	G	G
3	G	G	A	A	
4		G	G	A	A
5	A	A		G	G
6	G	G		A	A

Anzahl Möglichkeiten zwei Kleider der Marke A hintereinander und zwei Kleider der Marke G hintereinander: 6

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

$$6 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2}_{\text{2x A}} \cdot \underbrace{\left(\frac{7}{24}\right)^2}_{\text{2x G}} \cdot \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{1x D oder V}}$$

$$P(D \cup V) = P(D) + P(V) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P\,(E_6) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{24}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} \approx 0,0213$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der von Eva getragenen Kleider der Marke A an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Zufallsgröße innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$p = P(A) = \frac{1}{3}$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Der Erwartungswert $E(X)$ einer binomialverteilten Zufallsgröße X ist gegeben durch:

$$E(x) = n \cdot p$$

(binomialverteilt = es gibt zwei mögliche Ausgänge. Hier: Eva trägt ein Kleid der Marke A (Treffer) oder nicht (Niete))

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$E(x) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Standardabweichung einer Zufallsgröße

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Die Standardabweichung σ einer Zufallsgröße X entspricht der Wurzel aus der Varianz $Var(X)$.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Die Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße X ist gegeben durch:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 1,05$$

Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung:

„innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert“ = $|X-\mu|<\sigma$

Die Ungleichung $|X-\mu|<\sigma$ ist gleichbedeutend zu $\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$.

$P(|X-\mu|<\sigma)=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$

$P(|X-1,7|<1,05)=P(0,62<X<2,72)$

Erläuterung:

Die Zufallsgröße X gibt in diesem Fall die Anzahl der getragenen Kleider der Marke A an. Da ein Kleid nur ganze Male getragen werden kann, muss hier auf ganze Zahlen gerundet werden.

$P(|X-1,7|<1,05)=P(1\leq X\leq 2)$

Erläuterung:

Wenn X zwischen 1 und 2 liegen soll, dann kann X entweder gleich 1 oder 2 sein.

$P(|X-1,7|<1,05)=P^5_{\frac{1}{3}}(X=1)+P^5_{\frac{1}{3}}(X=2)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer})=P^n_p(Z=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n=$ Anzahl der Versuche
$k=$ Anzahl der Treffer
$p=$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1-p=$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P(|X-1,7|<1,05)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\approx 0,6584$$

Teilaufgabe 3. (5 BE)

$\frac{3}{4}$ von 24 Models tragen Schuhe einer bestimmten Marke (M). Neun der Models, die diese Schuhe tragen, klagen über Hautreizungen (H) an den Füßen. Insgesamt hat die Hälfte aller Models keine Hautreizungen.
Prüfen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel, ob die Ereignisse M und H stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im vorliegenden Zusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe 3.

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

$\frac{3}{4}\cdot 24=18$ Models tragen $M \quad\Rightarrow\quad P(M)=\frac{18}{24}=0,75$

9 Models tragen M und klagen über $H \quad\Rightarrow\quad P(M\cap H)=\frac{9}{24}=0,375$

Die Hälfte aller Models hat keine $H \quad\Rightarrow\quad P(\overline{H})=\frac{12}{24}=0,5$

	H	$\overline{H}$	Σ
M	0,375		0,75
$\overline{M}$			
Σ		0,5	1

Tafel vervollständigen:

	H	$\overline{H}$	Σ
M	0,375	0,375	0,75
$\overline{M}$	0,125	0,125	0,25
Σ	0,5	0,5	1

Stochastische Unabhängigkeit

$P(M) \cdot P(H) = 0,75 \cdot 0,5 = 0,375 = P(M \cap H)$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Die Wahrscheinlichkeiten werden aus der Vierfeldertafel entnommen.

M und H sind stochastisch unabhängig (es besteht kein Zusammenhang zwischen Schuhen der Marke M und Hautreizungen).

Teilaufgabe 4.1 (5 BE)

Am Ende der Show bewerten die Zuschauer jedes Model. Eva hatte bei der letzten Bewertung eine Zustimmung von 60% erhalten. Es wird vermutet, dass Eva bei der nächsten Bewertung weniger Zustimmung bekommt (Gegenhypothese).
Zur Überprüfung der Vermutung wird eine Umfrage unter 200 Personen durchgeführt.

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den minimalen Annahmebereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

T: Anzahl der Zustimmungen unter 200 Personen

Nullhypothese: $H_0 : p = 0,60$

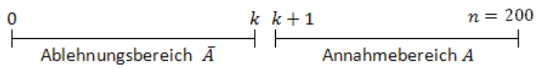
Gegenhypothese: $H_1 : p_1 < 0,60$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Erläuterung: *Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese " $p_1 < 0,60$" bzw. " **weniger** Zustimmung bekommt" lautet, liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 200]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

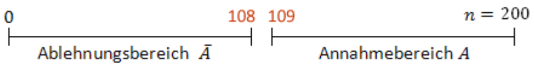
Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($T \leq k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,60}^{200}(T \leq k) \leq 0,05$

$P_{0,60}^{200}(T \leq k) \leq 0,05$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 108$

Entscheidungsregel:



Minimaler Annahmebereich: $A = \{109, 110, \ldots, 200\}$

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Geben Sie an, wie man anhand des Tests (vgl. 4.1) entscheidet, wenn nur 55% der Befragten Eva die Zustimmung geben.
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht und warum man seine Wahrscheinlichkeit nicht berechnen kann.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

55% von 200 = 110 geben Zustimmung

$110 \in A \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird angenommen

Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl falsch, d.h. man nimmt an, dass Eva 60% Zu-

stimmung bekommt, obwohl diese in Wirklichkeit geringer.

Fehler 2. Art kann in diesem Fall nicht berechnet werden, da die tatsächliche Zustimmung p unklar ist.

Teilaufgabe 5. (4 BE)

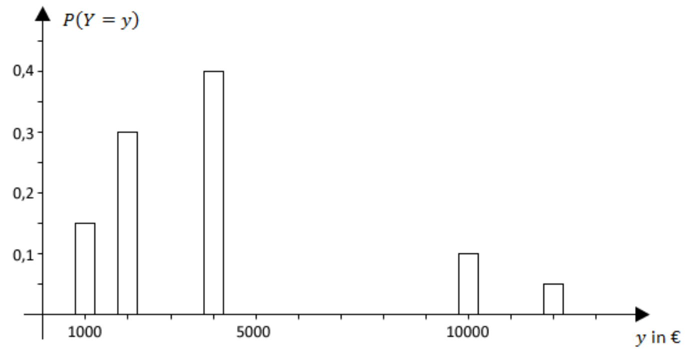
Das Monatsgehalt Y der Vorjahressiegerin der Casting-Show kann als Zufallsgröße mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden:

y in €	1000	2000	4000	10000	12000
P(Y = y)	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung geeignet graphisch dar und untersuchen Sie rechnerisch, ob das Model mit einem festen Monatsgehalt von 3540 € auf lange Sicht mehr verdienen würde.

Lösung zu Teilaufgabe 5.

Erwartungswert einer Zufallsgröße



Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$E(Y) = 0,15 \cdot 1000 + 0,3 \cdot 2000 + 0,4 \cdot 4000 + 0,1 \cdot 10000 + 0,05 \cdot 12000 = 3950 > 3540$$

$\Rightarrow$ kein größerer Verdienst mit festem Monatsgehalt