

Fachabitur 2014 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Zeigen Sie, dass G_f für $x = \frac{5}{2}$ einen Punkt mit waagrechtter Tangente besitzt. Bestimmen Sie mithilfe der maximalen Monotonieintervalle Art und Koordinaten aller Punkte auf G_f mit waagrechtter Tangente.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G_f auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Begründen Sie, dass f im Intervall $I =]3; 4[$ genau eine Nullstelle x_0 besitzt. Ermitteln Sie ein Intervall $I_0 \subset I$ der Länge $\Delta x = 0,25$, das diese Nullstelle x_0 enthält.

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g , mit $g : x \mapsto -\frac{9}{8}x$ und $D_g = \mathbb{R}$, für $x = \pm 2$ berühren. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte.

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g im Bereich $-3 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Teilaufgabe 2. (4 BE)

Gegeben ist die allgemeine ganzrationale Funktion u vierten Grades durch $u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Geben Sie ohne Begründung und ohne Rechnung einen Überblick, wie viele Nullstellen (Anzahl und Vielfachheit!) die Funktion u haben kann.

Gegeben sind mit dem Parameter $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$ die quadratischen Funktionen $h_k : x \mapsto kx^2 + (2k-1) \cdot x + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k}$.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert k der Graph von h_k symmetrisch zum Koordinatensystem ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

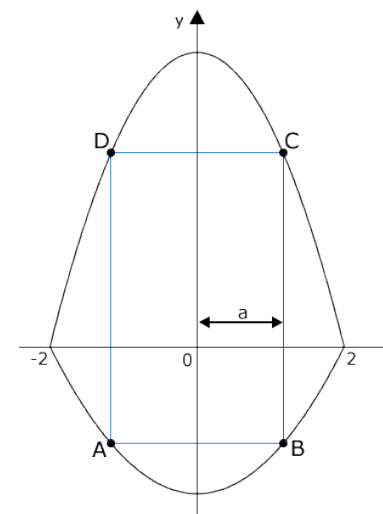
Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Weisen Sie nach, dass $D = -k^3 + 4k^2 - 4k$ die Diskriminante der Gleichung $h_k(x) = 0$ ist.

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Bestimmen Sie nun diejenigen Werte k , für die die quadratische Funktion h_k mindestens eine Nullstelle besitzt.

Die Graphen der reellen Funktionen p und q mit $p(x) = -x^2 + 4$ und $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und mit $D_p = D_q = [-2; 2]$ bilden die untere abgebildete Fläche. Darin eingeschrieben ist das Rechteck $ABCD$, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen p und q liegen.



Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die Maßzahl $A(a)$ der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von a und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A an.

[Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -3a^3 + 12a$]

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)

Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Fläche maximalen Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahlen für die Fläche, Breite und Länge des Rechtecks.

Lösung**Teilaufgabe 1.1** (8 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass G_f für $x = \frac{5}{2}$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie mithilfe der maximalen Monotonieintervalle Art und Koordinaten aller Punkte auf G_f mit waagrechter Tangente.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1**Waagerechte Tangenten**

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Benötigte Ableitungsregeln:

1. Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$$

2. Ableitung einer Summe:

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

3. Potenzregel:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8}$$

$x = \frac{5}{2}$ in $f'(x)$ einsetzen:

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} - \frac{9}{8} = 0 \quad , \text{ d.h. Steigung gleich Null}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) \approx -2,56$$

$\Rightarrow$ Punkt $(2, 5 | -2, 56)$ mit waagerechter Tangente

Monotonieverhalten einer Funktion

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$\frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8} = 0$$

Erläuterung: Lösen einer Gleichung dritten Grades

Das Lösen einer Gleichung dritten Grades (auf der rechten Seite muss die Null stehen) setzt voraus, dass bereits eine Lösung bekannt ist. Ist dies nicht der Fall, so muss eine Lösung durch Ausprobieren geraten werden (für x werden die Werte $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, etc. eingesetzt).

Hat man eine Lösung gefunden, so teilt man mittels Polynomdivision den Term links des Gleichheitszeichens durch die bekannte Lösung.

Polynomdivision durchführen: $\left(\frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8}\right) : \left(x - \frac{5}{2}\right)$

Erläuterung: Polynomdivision

Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ beispielsweise lässt sich in Faktoren folgendermaßen schreiben:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.

Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^2 + x - 2) : (x - 1) = x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline 2x - 2 \\ -(2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \left(\frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8}\right) : \left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{20} \\ \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \\ \hline \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x \\ \hline \frac{9}{20}x - \frac{9}{8} \\ \frac{9}{20}x - \frac{9}{8} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{20} = 0$$

Erläuterung: *Diskriminante*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Diskriminante D .

$$D = b^2 - 4ac$$

Man unterscheidet drei Fälle:

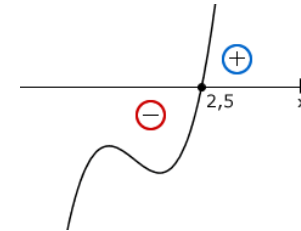
1. Die Diskriminante ist negativ: $D < 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
2. Die Diskriminante ist Null: $D = 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung
3. Die Diskriminante ist positiv: $D > 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen

$$D = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{20} = -\frac{11}{100} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine weiteren Stellen mit waagr. Tangente}$$

Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung mit Hilfe einer Skizze von f' bestimmen:

Erläuterung:

Die Funktion $\frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8}$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Leitkoeffizienten $\frac{1}{5}$. Ihr charakteristischer Verlauf ist „von links unten nach rechts oben“. Sie schneidet die x -Achse an der Stelle $x = \frac{5}{2}$



Erläuterung: *Funktionswert*

Dort wo der Graph oberhalb der x -Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die erste Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x -Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$$f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]-\infty; 2,5[$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]2,5; \infty[$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton fallend.

$$\Rightarrow G_f \text{ ist streng monoton fallend für } x \in]-\infty; 2,5]$$

$$\Rightarrow G_f \text{ ist streng monoton steigend für } x \in [2,5; \infty[$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Vorzeichenwechsel in f' bei $x = \frac{5}{2}$ von $(-)$ auf $(+)$.

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$\Rightarrow$ Minimum $(2, 5 | -2, 56)$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G_f auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Wendepunkt ermitteln

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8} \quad (\text{s. Teilaufgabe 1.1})$$

Zweite und dritte Ableitung bilden:

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Benötigte Ableitungsregeln:

1. Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$$

2. Ableitung einer Summe:

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

3. Potenzregel:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f''(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{5}x$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:

$$f''(x^{\text{WP}}) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f''(x) = 0$$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$$\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2}^{\text{WP}} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,15$$

Lage der möglichen Wendepunkte:

$$y_1^{\text{WP}} = f(1,15) \approx -0,94 \Rightarrow \text{WP}_1(1,15 | -0,94)$$

$$y_2^{\text{WP}} = f(-1,15) \approx 1,56 \Rightarrow \text{WP}_2(-1,15 | 1,56)$$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP} , d.h. $f''(x^{\text{WP}}) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''(x^{\text{WP}}) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

Nachweis über die dritte Ableitung:

$$\left. \begin{array}{l} f'''(1,15) \approx 1,38 \neq 0 \\ f'''(-1,15) \approx -1,38 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{WP}_1 \text{ und WP}_2 \text{ sind Wendepunkte}$$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Begründen Sie, dass f im Intervall $I =]3; 4[$ genau eine Nullstelle x_0 besitzt. Ermitteln Sie ein Intervall $I_0 \subset I$ der Länge $\Delta x = 0,25$, das diese Nullstelle x_0 enthält.

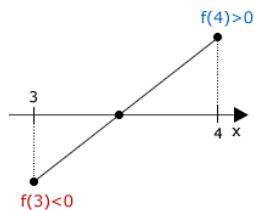
Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Nullstellen einer Funktion

Begründung:

Erläuterung:

Wenn f bei $x = 3$ negativ und bei $x = 4$ positiv ist, und f stetig ist (keine Sprünge), dann muss G_f die x -Achse mindestens einmal schneiden.



1. Da $f(3) = -\frac{17}{8} < 0$, $f(4) = \frac{27}{10} > 0$ und f stetig ist, gibt es im Intervall $]3; 4[$ mindestens eine Nullstelle.

Erläuterung:

Da G_f noch zusätzlich ab der Stelle $x = 2,5$ streng monoton steigt, kann G_f die x -Achse nur einmal im Bereich $x \in]3; 4[$ schneiden.

2. Da G_f für $x \in [2,5;\infty[$ streng monoton steigend ist (siehe Teilaufgabe 1.1), gibt es genau eine Nullstelle im Intervall $]3; 4[$.

Intervall $I_0 \subset I$ ermitteln:

Erläuterung:

$$3,75 - 3,5 = 0,25 \quad (\Delta x)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3,5) \approx -0,53 < 0 \\ f(3,75) \approx 0,84 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_0 =]3,5; 3,75[$$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g , mit $g : x \mapsto -\frac{9}{8}x$ und $D_g = \mathbb{R}$, für $x = \pm 2$ berühren. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Steigung eines Funktionsgraphen

$$f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x - \frac{9}{8}$$

$$g(x) = -\frac{9}{8}x$$

$$g'(x) = -\frac{9}{8}$$

Erläuterung: *Berührungspunkt*

Berühren sich zwei Graphen G_f und G_g in einem Punkt $P(x_P|y_P)$, so gilt:

1. Die Funktionswerte an der Stelle x_P sind gleich:

$$f(x_P) = g(x_P)$$

2. Die Tangenten an den Graphen G_f und G_g an der Stelle x_P haben die gleiche Steigung:

$$f'(x_P) = g'(x_P)$$

Es muss gelten:

$$1. f(2) = g(2) \text{ und } f(-2) = g(-2)$$

$$2. f'(2) = g'(2) \text{ und } f'(-2) = g'(-2)$$

Nachweis von 1.:

$$f(2) = -\frac{9}{4} = g(2)$$

$$f(-2) = \frac{9}{4} = g(-2)$$

Nachweis von 2.:

$$f'(2) = -\frac{9}{8} = g'(2)$$

$$f'(-2) = -\frac{9}{8} = g'(-2)$$

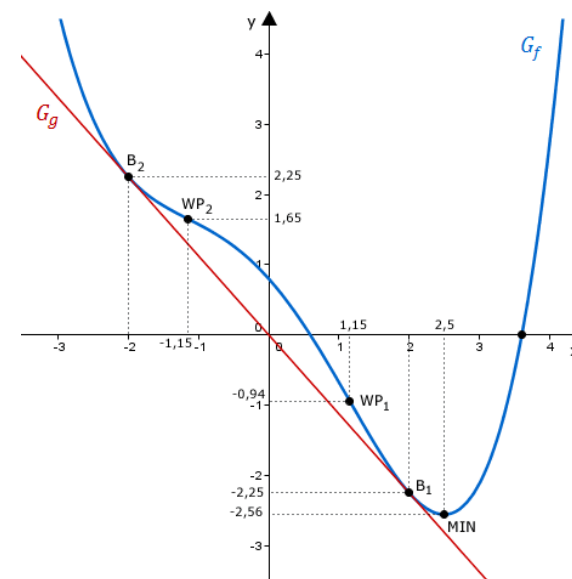
$$\text{Berührungspunkte: } B_1 \left(2 \mid -\frac{9}{4} \right), B_2 \left(-2 \mid \frac{9}{4} \right)$$

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g im Bereich $-3 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Skizze

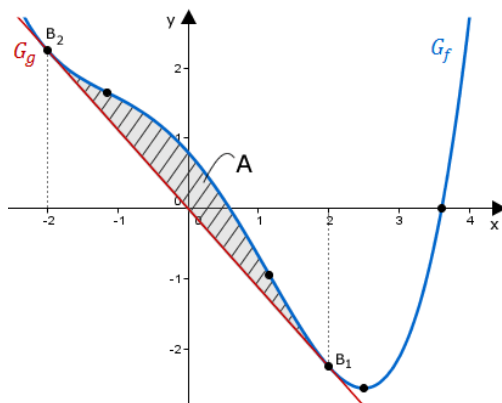


Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g , so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g .

$$A = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$A = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5} - \left(-\frac{9}{8}x \right) \right) dx$$

$$A = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5} \right) dx$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ (siehe auch Merkgel Mathematik):

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5} \right) dx = \frac{1}{20} \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{2}{5} \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4}{5} \frac{x^{0+1}}{0+1}$$

$$A = \left[\frac{1}{100}x^5 - \frac{2}{15}x^3 + \frac{4}{5}x \right]_{-2}^2$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \frac{1}{100} \cdot 2^5 - \frac{2}{15} \cdot 2^3 + \frac{4}{5} \cdot 2 - \left(\frac{1}{100} \cdot (-2)^5 - \frac{2}{15} \cdot (-2)^3 + \frac{4}{5} \cdot (-2) \right)$$

$$A = \frac{8}{25} - \frac{16}{15} + \frac{9}{5} + \frac{8}{25} - \frac{16}{15} + \frac{9}{5} = \frac{128}{75}$$

Teilaufgabe 2. (4 BE)

Gegeben ist die allgemeine ganzrationale Funktion u vierten Grades durch

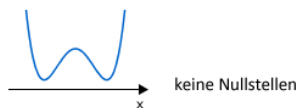
$u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Geben Sie ohne Begründung und ohne Rechnung einen Überblick, wie viele Nullstellen (Anzahl und Vielfachheit!) die Funktion u haben kann.

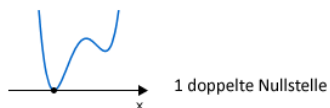
Lösung zu Teilaufgabe 2.

Nullstellen einer Funktion

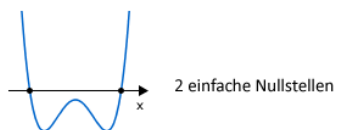
Möglichkeiten:



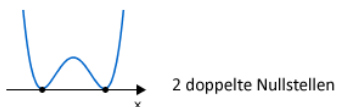
keine Nullstellen



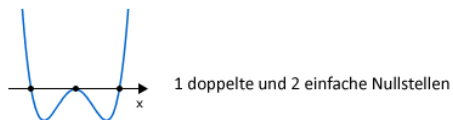
1 doppelte Nullstelle



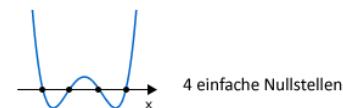
2 einfache Nullstellen



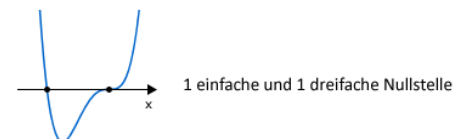
2 doppelte Nullstellen



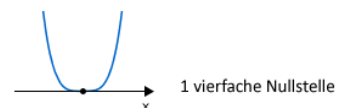
1 doppelte und 2 einfache Nullstellen



4 einfache Nullstellen



1 einfache und 1 dreifache Nullstelle



1 vierfache Nullstelle

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Gegeben sind mit dem Parameter $k \in \mathbb{R} \setminus (0)$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$ die quadratischen Funktionen $h_k : x \mapsto kx^2 + (2k - 1) \cdot x + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k}$.

Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert k der Graph von h_k symmetrisch zum Koordinatensystem ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1**Symmetrieverhalten einer Funktion**

1. Fall: Achsensymmetrie zur y-Achse

Der Graph von h_k ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, falls nur gerade Potenzen von x vorkommen.

$$2k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

2. Fall: $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{1}{2}\}$

Keine bekannte Symmetrie, da gerade und ungerade Potenzen von x vorkommen.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Weisen Sie nach, dass $D = -k^3 + 4k^2 - 4k$ die Diskriminante der Gleichung $h_k(x) = 0$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Quadratische Gleichung

$$h_k(x) = \underbrace{k}_a x^2 + \underbrace{(2k-1)}_b x + \underbrace{\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k}}_c$$

Erläuterung: *Diskriminante*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a x^2 + b x + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Diskriminante D .

$$D = b^2 - 4ac$$

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Die Diskriminante ist negativ: $D < 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
2. Die Diskriminante ist Null: $D = 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung
3. Die Diskriminante ist positiv: $D > 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen

Ist nach der Anzahl der Lösungen gefragt, dann untersucht man das Vorzeichen der Diskriminante.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (2k - 1)^2 - 4 \cdot k \cdot \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k} \right)$$

$$D = 4k^2 - 4k + 1 - k^3 - 1$$

$$D = -k^3 + 4k^2 - 4k$$

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Bestimmen Sie nun diejenigen Werte k , für die die quadratische Funktion h_k mindestens eine Nullstelle besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Nullstellen einer Funktion

$$D(k) = -k^3 + 4k^2 - 4k \quad (\text{s. Teilaufgabe 3.2})$$

Erläuterung: *Diskriminante*Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Diskriminante D .

$$D = b^2 - 4ac$$

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Die Diskriminante ist negativ: $D < 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
2. Die Diskriminante ist Null: $D = 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung
3. Die Diskriminante ist positiv: $D > 0$
 $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen

Ist nach der Anzahl der Lösungen gefragt, dann untersucht man das Vorzeichen der Diskriminante.

Es muss gelten: $D \geq 0$

$$-k^3 + 4k^2 - 4k = 0$$

$$-k \cdot (k^2 - 4k + 4) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$$\Rightarrow \quad k_1 = 0$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

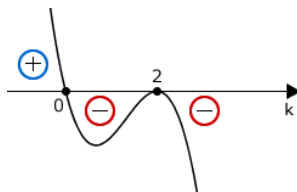
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Der Term $k^2 - 4k + 4$ entspricht der zweiten binomischen Formel mit $a = k$ und $b = 2$

$$(k - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_{2,3} = 2$$

Skizze von G_D :Erläuterung: *Charakteristischer Verlauf ganzrationaler Funktionen*Die Funktion $-k^3 + 4k^2 - 4k$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades mit negativen Leitkoeffizienten -1 . Ihr charakteristischer Verlauf ist „von links oben nach rechts unten“. Der Graph schneidet die x -Achse an der Stelle $k = 0$ und berührt sie an der Stelle $k = 2$ (doppelte Nullstelle).



Erläuterung: *Funktionswert*

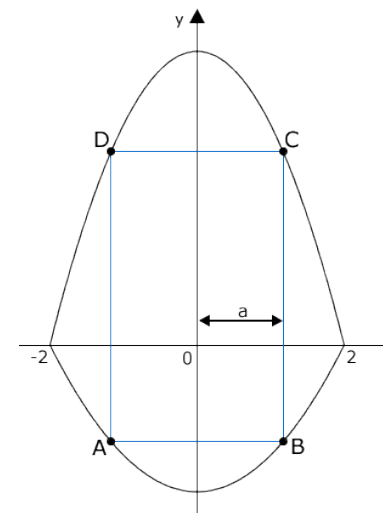
Dort wo der Graph oberhalb der k -Achse liegt, hat die Funktion positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x -Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$D \geq 0$ für $k \in]-\infty; 0[\cup \{2\}$, da $k \neq 0$ (vgl. Teilaufgabe 3.1)

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Die Graphen der reellen Funktionen p und q mit $p(x) = -x^2 + 4$ und $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und mit $D_p = D_q = [-2; 2]$ bilden die untere abgebildete Fläche. Darin eingeschrieben ist das Rechteck $ABCD$, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen p und q liegen.



Bestimmen Sie die Maßzahl $A(a)$ der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von a und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A an.

[Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -3a^3 + 12a$]

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Flächeninhalt eines Rechtecks

$$q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2; \quad p(x) = -x^2 + 4$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Graph von q ist eine nach oben, der von p eine nach unten (wegen dem Minus vor dem x^2) geöffnete Parabel.

Der Punkt B liegt auf dem Graphen der Funktion q . Seine x -Koordinate ist a und seine y -Koordinate dementsprechend $q(a)$.

Der Punkt C liegt auf dem Graphen der Funktion p . Seine x -Koordinate ist a und seine y -Koordinate dementsprechend $p(a)$.

$$B(a|q(a)) ; \quad C(a|p(a))$$

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Die Höhe des Rechtecks entspricht dem Abstand der Punkte B und C . Da die Punkte die gleich x -Koordinate haben, entspricht dieser Abstand der Differenz der y -Koordinaten.

$$A(a) = 2 \cdot a \cdot (y_C - y_B)$$

$$A(a) = 2 \cdot a \cdot (p(a) - q(a))$$

$$A(a) = 2 \cdot a \cdot \left(-a^2 + 4 - \left(\frac{1}{2}a^2 - 2 \right) \right)$$

$$A(a) = 2 \cdot a \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2}a^2 + 6 \right)}_{y_C - y_B} = -3a^3 + 12a$$

Definitionsbereich bestimmen

1. Bedingung: $a > 0$

$$\Rightarrow D_A =]0; \dots$$

Erläuterung:

Die Höhe $y_C - y_B$ des Rechtecks muss positiv sein. Die Bedingung lautet somit:
 $y_C - y_B > 0$

2. Bedingung: $y_C - y_B > 0$

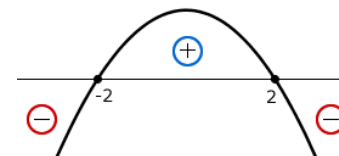
$$-\frac{3}{2}a^2 + 6 > 0$$

$$-\frac{3}{2}a^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \pm 2$$

Skizze Graph von $-\frac{3}{2}a^2 + 6$:

Erläuterung: *Parabel*

Der Graph der Funktion $-\frac{3}{2}a^2 + 6$ ist eine nach unten (wegen $-\frac{3}{2}$) geöffnete Parabel. Sie schneidet die a -Achse an den Stellen $a = -2$ und $a = 2$.



Erläuterung: *Funktionswert*

Am Graphen der Funktion $-\frac{3}{2}a^2 + 6$ erkennt man, dass zwischen -2 und 2 die Funktionswerte positiv sind.

$$-\frac{3}{2}a^2 + 6 > 0 \quad \text{für} \quad -2 < a < 2$$

Erläuterung:

Die zweite Bedingung ist erfüllt für $a \in]-2; 2[$. Wegen der 1. Bedingung ($a > 0$) ist die max. Definitionsmenge beschränkt auf $]0; 2[$.

$$\Rightarrow D_A =]0; 2[$$

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)

Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Fläche maximalen Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahlen für die Fläche, Breite und Länge des Rechtecks.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Extremwertaufgabe

$$A(a) = -3a^3 + 12a \quad ; \quad D_A =]0; 2[$$

Erste und zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Benötigte Ableitungsregeln:

1. Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$$

2. Ableitung einer Summe:

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

3. Potenzregel:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$A'(a) = -9a^2 + 12$$

$$A''(a) = -18a$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$$f'(x^E) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f'(x) = 0$$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $A'(a) = 0$

$$-9a^2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,15$$

($a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ist auszuschließen, da $D_A =]0; 2[$)

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mid \frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{möglicher Extrempunkt}$$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'(x^E) = 0$ und $f''(x^E) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und $f''(x^E) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

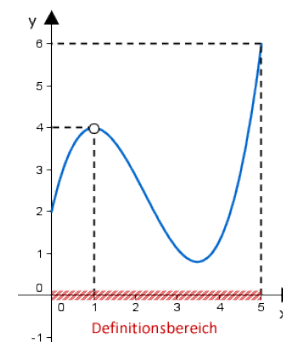
$$A''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{36}{\sqrt{3}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mid \frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{relatives Maximum}$$

Erläuterung: *Randbetrachtung*

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

Beispiel:



Diese Funktion hat zwar ein relatives Maximum im Punkt $HOP(1|4)$, dies ist jedoch nicht der größte Wert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annehmen kann.

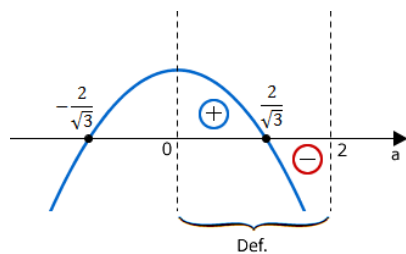
Bei $(5|6)$ gibt es am Rand des Definitionsbereichs damit noch einen größeren Wert. Dies wäre dann hier das globale Maximum.

Randbetrachtung:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{a \rightarrow 0^+} -3a^3 + 12a = 0 \\ \lim_{a \rightarrow 2^-} -3a^3 + 12a = 0 \end{array} \right\} < \frac{16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mid \frac{16\sqrt{3}}{3} \right) \text{ absolutes Maximum}$$

Alternative Lösung

Skizze von A' :



VZ-Wechsel in A' von $(+)$ nach $(-)$ $\Rightarrow$ rel. Maximum bei $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Da $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ einzige Nullstelle von $A'(a)$ im Definitionsbereich ist und somit keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich eintritt, gilt:

$\Rightarrow$ abs. Maximum bei $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$