Fachabitur 2014 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Begründen Sie dann ohne weitere Rechnung, dass in den Intervallen $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$ sowie $\left]\sqrt{2}; 4\right[$ jeweils eine Extremstelle liegt. Geben Sie auch deren Art an.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G_f rechts- bzw. linksgekrümmt ist, sowie die Koordinaten des Wendepunkts.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \leq x \leq 4,5$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Die Gerade G_t enthält die Schnittpunkte des Graphen G_f mit der y-Achse und mit der x-Achse bei $x = 4$. Zeigen Sie, dass die Gerade G_t Tangente an G_f ist und zeichnen Sie G_t in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Die Graphen G_f und G_t schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Teilaufgabe 1.7 (4 BE)

Gegeben ist zusätzlich die Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$ und es gilt:
$f(x) - p(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 5x^2\right)$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f - p$ mit deren Vielfachheit und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Stellen für die Graphen der beiden Funktionen.

Gegeben sind die reellen Funktionen $k_a : x \mapsto \frac{a}{4}\left[x^3 - (2a+2)x^2 + (8a-10)x + 8\right]$ mit $D_{k_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

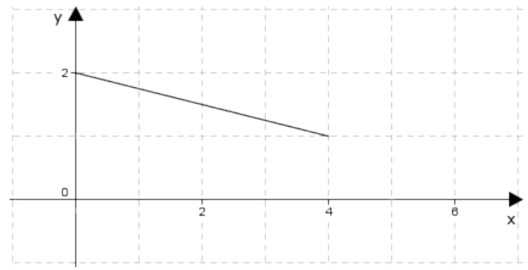
Berechnen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Graph der Funktion k_a bei $x = 4$ die x-Achse als Tangente besitzt.

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Untersuchen Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Graphen der Funktionen f(aus 1.0) und k_1 $(a = 1)$ besteht.

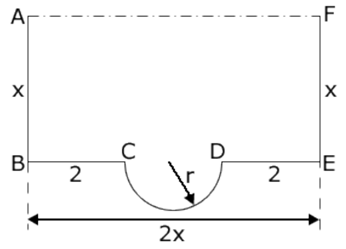
Teilaufgabe 3. (7 BE)

Eine Kugel soll eine Bahn hinabrollen, die durch den Graphen G_h der Funktion
$h : x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{8}\left(x^2 - 6x\right) & \text{für } 4 < x \leq 6 \end{cases}$
beschrieben wird. Dabei ist der Graph von g das in unten stehender Skizze dargestellte Geradenstück.
Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Bahn G_h an der Stelle $x = 4$ einen Sprung bzw. einen Knick aufweist.



© Abiturloesung.de

Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius r. Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet.



Teilaufgabe 4.1 (5 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl $A(x)$ der Querschnittfläche des Kanals in Abhängigkeit von x durch $A(x) = (2 + 0,5\pi)x^2 - 2\pi\, x + 2\pi$ darstellen lässt.

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Die Strecken $[A\,B]$, $[B\,C]$, $[D\,E]$ und $[E\,F]$ besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A der Funktion $A : x \mapsto A(x)$ gilt: $D_A =]2; 4]$.

Teilaufgabe 4.3 (4 BE)

Bestimmen Sie x so, dass die zugehörige Querschnittsfläche maximalen Inhalt annimmt.

Teilaufgabe 4.4 (3 BE)

Nun sei $x = 4$. Der Kanal ist bis 1m unter der Oberkante gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Begründen Sie dann ohne weitere Rechnung, dass in den Intervallen $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$ sowie $\left]\sqrt{2}; 4\right[$ jeweils eine Extremstelle liegt. Geben Sie auch deren Art an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right)$$

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right) = 0$$

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$$

Erläuterung: *Lösen einer Gleichung dritten Grades*

Das Lösen einer Gleichung dritten Grades (auf der rechten Seite muss die Null stehen) setzt voraus, dass bereits eine Lösung bekannt ist. Ist dies nicht der Fall, so muss eine Lösung durch Ausprobieren geraten werden (für x werden die Werte ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, etc. eingesetzt).

Hat man eine Lösung gefunden, so teilt man mittels Polynomdivision den Term links des Gleichheitszeichens durch die bekannte Lösung.

Erste Nullstelle durch „Ausprobieren“ : $x_1^N = 4$

Polynomdivision durchführen: $\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right) : (x - 4)$

Erläuterung: *Polynomdivision*

Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ lässt sich beispielsweise in Faktoren folgendermaßen schreiben:

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.

Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision.

$$\begin{array}{l}
(x^2 \quad +x \quad -2\ ) : (x-1) = x+2 \\
\underline{-(x^2 \quad -x)} \\
\qquad\quad 2x \quad -2 \\
\qquad \underline{-(2x \quad -2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 \quad -2x + 8) : (x-4) = x^2 - 2 \\
\underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad -2x+8 \\
\qquad\quad \underline{-(-2x+8)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3}^N = \pm\sqrt{2}$

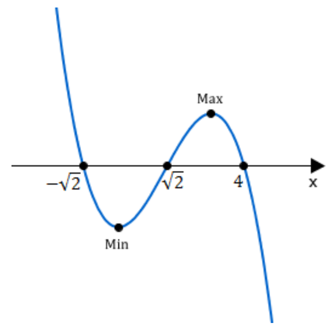
Vielfachheit von Nullstellen

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$

$x_1^N = 4$ ist einfache Nullstelle.
$x_2^N = -\sqrt{2}$ ist einfache Nullstelle.
$x_3^N = \sqrt{2}$ ist einfache Nullstelle.

Art von Extrempunkten ermitteln

Begründung mit Hilfe einer Skizze:



Der charakteristische Verlauf der Funktion ist von „links oben“ nach „rechts unten“. Der Graph der Funktion schneidet die x-Achse an den Stellen $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ und $x = 4$.

© Abiturloesung.de

Zwischen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ liegt somit ein Minimum, zwischen $\sqrt{2}$ und 4 ein Maximum.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right)$$

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\left(3x^2 - 8x - 2\right)$$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 8x - 2 = 0$$

> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:
>
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{88}}{6}$$

$$x_1^E = \frac{8 + \sqrt{88}}{6} \approx 2,90$$

$$x_2^E = \frac{8 - \sqrt{88}}{6} \approx -0,23$$

Lage der Extrempunkte:

$$y_1^E = f\left(x_1^E\right) = f(2,90) \approx 1,76 \quad \Rightarrow \quad E_1\,(2,90|1,76)$$

$$y_2^E = f\left(x_2^E\right) = f(-0,23) \approx -2,06 \quad \Rightarrow \quad E_2\,(-0,23|-2,06)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\,(6x - 8)$$

> Erläuterung: *Art eines Extremums*
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Extremstellen untersuchen:

$$f''\left(x_1^E\right) = f''(2,90) \approx -2,35 < 0 \quad \Rightarrow \quad E_1\,(2,90|1,76) \text{ Maximum}$$

$$f''\left(x_2^E\right) = f''(-0,23) \approx 2,35 > 0 \quad \Rightarrow \quad E_2\,(-0,23|-2,06) \text{ Minimum}$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G_f rechts- bzw. linksgekrümmt ist, sowie die Koordinaten des Wendepunkts.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Krümmungsverhalten einer Funktion

Mögliche Wendestelle(n) bestimmen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:

$f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{4}(6x-8) = 0$$

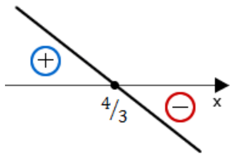
$$6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{\text{WP}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ mithilfe einer Skizze bestimmen:

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Der Graph der zweiten Ableitung $f''(x) = -\frac{1}{4}(6x-8) = -\frac{3}{2}x + 2$ ist eine Gerade mit negativer Steigung $(m = -\frac{3}{2})$. Sie schneidet die x-Achse an der Stelle $x^{\text{WP}} = \frac{4}{3}$.

Skizze von f'':



Erläuterung: *Funktionswert*

Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die zweite Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$$f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]\frac{4}{3}; \infty\right[$$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$$\Rightarrow \quad G_f \text{ ist linksgekrümmt für } x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \quad G_f \text{ ist rechtsgekrümmt für } x \in \left[\frac{4}{3}; \infty\right[$$

Wendepunkt ermitteln

Lage des Wendepunkts bestimmen:

© Abiturloesung.de

$y^{\text{WP}} = f\left(x^{\text{WP}}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{27}$

> Erläuterung: *Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

Da sich an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ das Krümmungsverhalten ändert, ist WP $\left(\frac{4}{3} \middle| -\frac{4}{27}\right)$ ein Wendepunkt.

Alternative Lösung

Wendepunkt ermitteln mittels dritter Ableitung:

Lage des Wendepunkts:
$y^{\text{WP}} = f\left(x^{\text{WP}}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{27}$

Dritte Ableitung:
$f'''(x) = -\frac{6}{4}$

Wert der dritten Ableitung an der Stelle x^{WP}:
$f'''\left(x^{\text{WP}}\right) = f'''\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{6}{4} \neq 0$

> Erläuterung: *Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

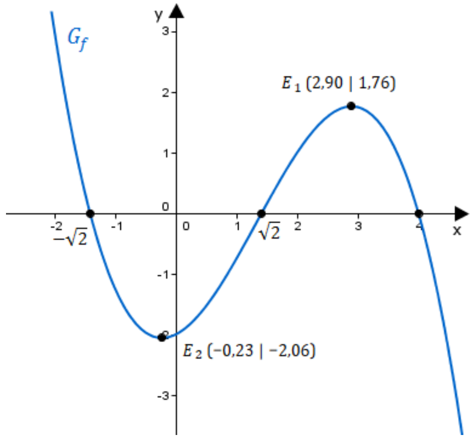
$\Rightarrow$ WP $\left(\frac{4}{3} \middle| -\frac{4}{27}\right)$ ist ein Wendepunkt

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \leq x \leq 4{,}5$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze



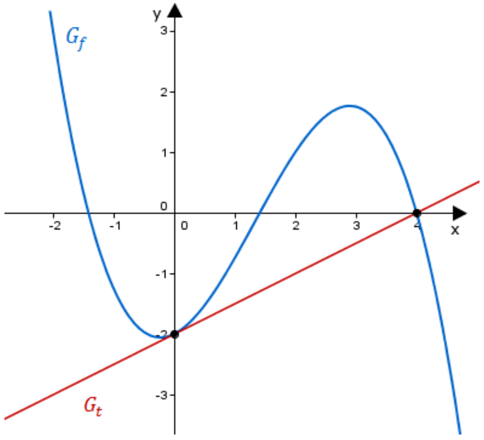
Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Die Gerade G_t enthält die Schnittpunkte des Graphen G_f mit der y-Achse und mit der x-Achse bei $x = 4$. Zeigen Sie, dass die Gerade G_t Tangente an G_f ist und zeichnen Sie G_t in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Skizze

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

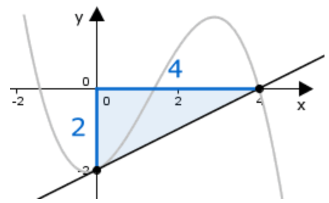


Geradengleichung aufstellen

Gleichung der Geraden t aufstellen:

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $\quad y = m \cdot x + t$
>
> m gibt die Steigung der Geraden an.
> t entspricht dem y-Achsenabschnitt.

$t : y = m\,x + t$

> Erläuterung: *Steigung einer Geraden*
>
> Die Steigung m einer Geraden gibt an, wie steil die Gerade verläuft. Genauer gesagt ist m das Seitenverhältnis $m = \dfrac{y}{x}$ im Steigungsdreieck.
>
> In diesem Fall: $\quad m = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
>
> 
>

$t : y = \dfrac{1}{2}x + t$

> Erläuterung: *y-Achsenabschnitt*
>
> Der y-Achsenabschnitt t gibt an, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse (senkrechte Achse) schneidet.
>
> In diesem Fall: $\quad t = f(0) = -2$

$t : y = \dfrac{1}{2}x - 2$

Nachweis einer Tangente

Aus Teilaufgabe 1.2: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{4} \cdot \left(3x^2 - 8x - 2\right)$

G_t ist Tangente an G_f, da:

- G_t durch den Punkt $(0|2)$ verläuft.

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

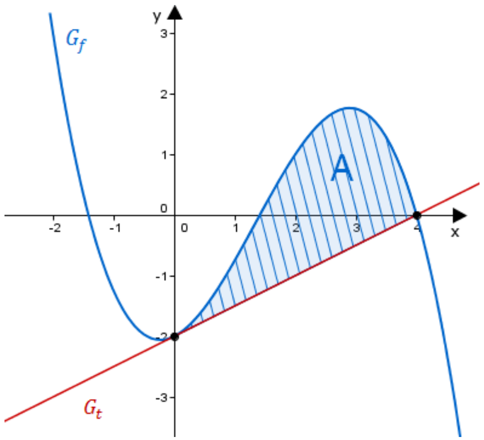
- die Steigung $m = \frac{1}{2}$ der Geraden t gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0$ ist: $f'(0) = \frac{1}{2}$

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Die Graphen G_f und G_t schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$A = \int_0^4 [f(x) - t(x)]\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int_0^4 \left[-\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right) - \left(\frac{1}{2}x - 2\right)\right]\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - 2 - \frac{1}{2}x + 2\right)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + x^2\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $-\frac{1}{4}x^3 + x^2$:

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-\frac{1}{4}x^3 + x^2\right)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{4}\frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{x^3}{3}$$

$$A = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$A = -\frac{1}{16}4^4 + \frac{1}{3}4^3 - 0$

$A = \frac{16}{3}$

Teilaufgabe 1.7 (4 BE)

Gegeben ist zusätzlich die Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$ und es gilt:
$f(x) - p(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 5x^2\right)$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f - p$ mit deren Vielfachheit und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Stellen für die Graphen der beiden Funktionen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.7

Nullstellen einer Funktion

$f(x) - p(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 5x^2\right)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

Ansatz: $\quad f(x) - p(x) = 0$

$-\frac{1}{4}\left(x^3 - 5x^2\right) = 0$

$x^3 - 5x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x - 5) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

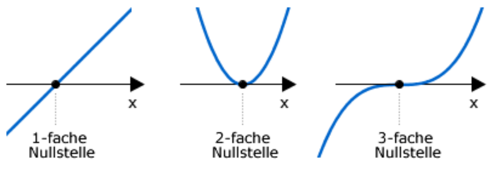
$x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5$

Vielfachheit von Nullstellen

Für die Funktion $f - p$ ist:

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5) \quad \Rightarrow \quad x = -5$ ist dreifache Nullstelle

In diesem Fall berührt der Graph G_{f-p} die x-Achse an der Stelle $x_1 = 0$ und schneidet sie an der Stelle $x_2 = 5$.

$x_1 = 0$ doppelte Nullstelle
$x_2 = 5$ einfache Nullstelle

Geometrische Interpretation:

Erläuterung: *Differenzfunktion*

Die Nullstellen der Differenzfunktion $f - p$ entsprechen den Schnittstellen der Graphen G_f und G_p.

Die Graphen G_f und G_p berühren sich an der Stelle $x_1 = 0$ (Berührstelle) und schneiden sich an der Stelle $x_2 = 5$ (Schnittstelle).

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $k_a : x \mapsto \frac{a}{4}\left[x^3 - (2a+2)x^2 + (8a-10)x + 8\right]$ mit $D_{k_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Berechnen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Graph der Funktion k_a bei $x = 4$ die x-Achse als Tangente besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Waagerechte Tangenten

$$k_a(x) = \frac{a}{4}\left[x^3 - (2a+2)x^2 + (8a-10)x + 8\right]$$

Erläuterung: *Funktionswert*

Wenn der Graph der Funktion k_a die x-Achse an der Stelle $x = 4$ berührt, dann muss der Funktionswert von k_a an dieser Stelle gleich Null sein.

Man überprüft, für welches a gilt: $\quad k_a(4) = 0$

$$k_a(4) = \frac{a}{4}\left[4^3 - (2a+2)\cdot 4^2 + (8a-10)\cdot 4 + 8\right]$$
$$k_a(4) = \frac{a}{4}\left[64 - 32a - 32 + 32a - 40 + 8\right]$$
$$k_a(4) = 0 \quad \text{(unabh. von } a\text{)}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Benötigte Ableitungsregeln:

1. Faktorregel:
$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$

2. Ableitung einer Summe:
$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

3. Potenzregel:
$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$k_a'(x) = \frac{a}{4}\left[3x^2 - (2a+2)\cdot 2x + 8a - 10\right]$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t (hier die x-Achse) an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $(S(x_S|y_S)$ (hier der Punkt $(0|4)$) ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

$k_a'(4) = \frac{a}{4}\left[3\cdot 4^2 - (2a+2)\cdot 2\cdot 4 + 8a - 10\right]$

$k_a'(4) = \frac{a}{4}\left[48 - 16a - 16 + 8a - 10\right]$

$k_a'(4) = \frac{a}{4}\left[22 - 8a\right]$

Erläuterung: *Waagerechte Tangente*

Die Steigung m einer waagerechten Tangente (hier die x-Achse) ist gleich 0.

Man überprüft, für welches a gilt: $k_a'(4) = 0$

$0 \overset{!}{=} \frac{a}{4}\left[22 - 8a\right]$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a\cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$(\frac{a}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \notin \mathbb{R}^+)$

$22 - 8a = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{22}{8} = 2,75$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Untersuchen Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Graphen der Funktionen f(aus 1.0) und k_1 $(a = 1)$ besteht.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Verschiebung von Funktionsgraphen

$f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right)$

$k_a(x) = \frac{a}{4}\left[x^3 - (2a+2)x^2 + (8a-10)x + 8\right]$

$a = 1$ einsetzen:

$k_1(x) = \frac{1}{4}\left[x^3 - (2+2)x^2 + (8-10)x + 8\right]$

$k_1(x) = \frac{1}{4}\left[x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right] = -f(x)$

$\Rightarrow$ G_f entsteht durch Spiegelung von G_{k_1} an der x-Achse (und umgekehrt)

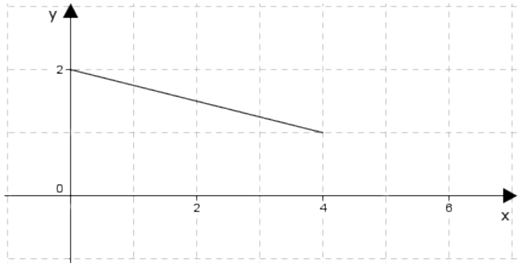
Teilaufgabe 3. (7 BE)

Eine Kugel soll eine Bahn hinabrollen, die durch den Graphen G_h der Funktion

$h: x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{8}\left(x^2 - 6x\right) & \text{für } 4 < x \leq 6 \end{cases}$

beschrieben wird. Dabei ist der Graph von g das in unten stehender Skizze dargestellte Geradenstück.

Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Bahn G_h an der Stelle $x = 4$ einen Sprung bzw. einen Knick aufweist.



Lösung zu Teilaufgabe 3.

Geradengleichung aufstellen

Funktionsgleichung $g(x)$ an der Skizze ablesen:

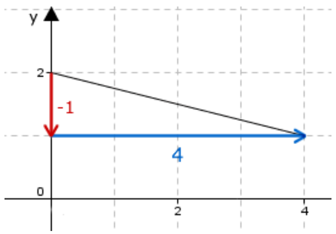
Erläuterung: *Geradengleichung*

Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $y = m \cdot x + t$

m gibt die Steigung der Geraden an.
t entspricht dem y-Achsenabschnitt.

Die Steigung m einer Geraden gibt an, wie steil die Gerade verläuft. Genauer gesagt ist m das Seitenverhältnis $m = \dfrac{y}{x}$ im Steigungsdreieck.

In diesem Fall: $m = \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{1}{4}$



$g(x) = -\dfrac{1}{4}x + 2$

Stetigkeit einer Funktion

Prüfen, ob $h(x)$ an der Stelle $x = 4$ stetig ist:

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man eine Funktion $h(x)$ auf Stetigkeit an der Stelle x_0, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} h(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)
$\lim\limits_{x \to x_0^-} h(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von rechts.
Ist $h(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x > x_0$ definiert ist.

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von links.
Ist $h(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x < x_0$ definiert ist.

$$\lim_{x \to 4^+} h(x) = \lim_{x \to 4^+} -\frac{1}{8}\left(x^2 - 6x\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 4^-} h(x) = \lim_{x \to 4^-} -\frac{1}{4}x + 2 = 1$$

$$h(4) = g(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 2 = 1$$

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn der Funktionswert an dieser Stelle sowohl mit dem links- als auch mit dem rechtsseitigem Grenzwert identisch ist, d.h. wenn gilt:

$$f\,(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x_0 keinen Sprung.

$\Rightarrow$ h ist an der Stelle $x = 4$ stetig

$\Rightarrow \quad G_h$ hat an der Stelle $x = 4$ keinen Sprung

Differenzierbarkeit einer Funktion

Erste Ableitung $h'(x)$ bestimmen:

> Erläuterung: *Ableitung einer abschnittsweise definierten Funktion*
>
> Eine abschnittsweise definierte Funktion wird auch abschnittsweise abgeleitet. Man bildet die Ableitungen der Teilfunktionen:
>
> $$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < x_0 \\ g(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$
>
> $$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x < x_0 \\ g'(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$
>
> Ist h an der Stelle x_0 nicht differenzierbar oder ist nicht bekannt, ob h bei x_0 differenzierbar ist, <u>muss</u> x_0 <u>bei der Ableitung ausgeschlossen werden</u>:
>
> $$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x < x_0 \\ g'(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{für } 0 < x < 4 \\ -\frac{1}{8}\,(2x-6) & \text{für } 4 < x < 6 \end{cases}$$

Prüfen, ob $h(x)$ an der Stelle $x = 4$ differenzierbar ist:

> Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*
>
> Untersucht man eine Funktion $h(x)$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle x_0, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:
>
> $\lim\limits_{x \to x_0^+} h'(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)
>
> $\lim\limits_{x \to x_0^-} h'(x)$ (linksseitiger Grenzwert)
>
> Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von rechts.
> Ist $h'(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x > x_0$ definiert ist.
>
> Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von links.
> Ist $h'(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x < x_0$ definiert ist.

$$\lim_{x \to 4^+} h'(x) = \lim_{x \to 4^+} -\frac{1}{8}\,(2x-6) = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 4^-} h'(x) = \lim_{x \to 4^-} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

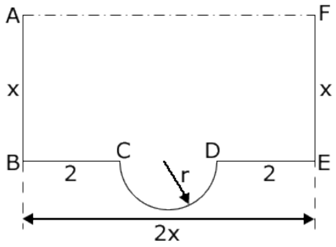
> Erläuterung: *Differenzierbarkeit einer Funktion*
>
> Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn gilt:
>
> 1. G_f ist in x_0 stetig
>
> 2. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$
>
> Anders ausgedrückt:
>
> Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es an dieser Stelle eine eindeutige Tangente an den Graphen gibt.
> Dies ist nur der Fall, wenn der Graph an dieser Stelle weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

$\Rightarrow \quad h$ ist an der Stelle $x = 4$ differenzierbar

$\Rightarrow \quad G_h$ hat an der Stelle $x = 4$ keinen Knick

Teilaufgabe 4.1 (5 BE)

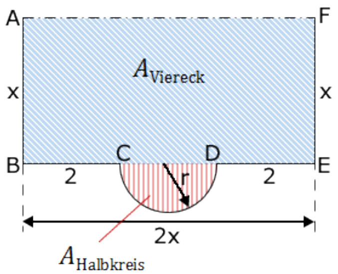
Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius r. Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet.



Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl $A(x)$ der Querschnittfläche des Kanals in Abhängigkeit von x durch $A(x) = (2 + 0,5\pi)x^2 - 2\pi\, x + 2\pi$ darstellen lässt.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Radius bestimmen:

$2x = 2 + 2r + 2$

$2x - 4 = 2r$

$r = x - 2$

Querschnittfläche bestimmen:

$A_{\text{Kanal}} = A_{\text{Viereck}} + A_{\text{Halbkreis}}$

$A_{\text{Kanal}} = 2x \cdot x + \frac{1}{2}\pi\, r^2 \qquad |\ r \text{ einsetzen}$

$A_{\text{Kanal}} = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi(x-2)^2 \qquad |\ \text{binomische Formel anwenden}$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2a\, b + b^2$

$A_{\text{Kanal}} = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi\, \left(x^2 - 4x + 4\right)$

$A_{\text{Kanal}} = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi\, x^2 - 2\pi\, x + 2\pi \qquad |\ x^2 \text{ ausklammern}$

$A_{\text{Kanal}} = \left(2 + \frac{1}{2}\pi\right) \cdot x^2 - 2\pi\, x + 2\pi$

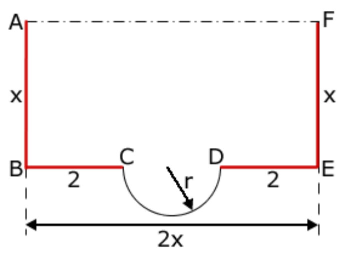
Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Die Strecken $[A\,B]$, $[B\,C]$, $[D\,E]$ und $[E\,F]$ besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A der Funktion $A : x \mapsto A(x)$ gilt: $D_A =]2; 4]$.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Definitionsbereich bestimmen

© Abiturloesung.de



> Erläuterung:
>
> Die Summe der Strecken beträgt **höchstens** 12 m, deswegen wird das „kleiner/gleich Zeichen" ($\leq$) verwendet.

1. Bedingung: $\underbrace{x}_{[A\,B]} + \underbrace{2}_{[B\,C]} + \underbrace{2}_{[D\,E]} + \underbrace{x}_{[E\,F]} \leq 12$

$2x + 4 \leq 12$

$2x \leq 8$

$x \leq 4$

> Erläuterung:
>
> Den Abflusskanal kann es nur geben, wenn es einen Radius gibt. Es muss also gelten: $r > 0$

2. Bedingung: $r > 0$

$r = x - 2$ (s. Teilaufgabe 4.1)

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$\Rightarrow \quad D_A =]2;4]$

Teilaufgabe 4.3 (4 BE)

Bestimmen Sie x so, dass die zugehörige Querschnittsfläche maximalen Inhalt annimmt.

Lösung zu Teilaufgabe 4.3

Extremwertaufgabe

$A(x) = \left(2 + \frac{1}{2}\pi\right) \cdot x^2 - 2\pi\,x + 2\pi$ (s. Teilaufgabe 4.1)

$D_A =]2;4]$ (s. Teilaufgabe 4.2)

Erste Ableitung bilden:

$A'(x) = \left(2 + \frac{1}{2}\pi\right) \cdot 2x - 2\pi$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $A'(x) = 0$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\pi\right) \cdot 2x - 2\pi = 0 \qquad | +2\pi$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\pi\right) \cdot 2x = 2\pi \qquad | : 2\left(2 + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$x = \frac{2\pi}{2\left(2 + \frac{1}{2}\pi\right)}$$

$x \approx 0{,}88 \notin D_A$

> Erläuterung: *Definitionsbereich einer Funktion*
>
> Der berechnete x-Wert liegt außerhalb des Definitionsbereichs der Funktion $A(x)$. Ob an dieser Stelle ein Extrempunkt vorliegt, muss somit nicht mehr geprüft werden.

© Abiturloesung.de

Randbetrachtung:

$$\lim_{x\to 2^+} A(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(2+\frac{1}{2}\pi\right)\cdot x^2 - 2\pi\, x + 2\pi = 8$$

$$A(4) = \left(2+\frac{1}{2}\pi\right)\cdot 16 - 8\pi + 2\pi = 32 + 2\pi \approx 38,28 > 8$$

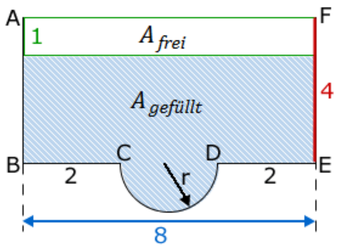
$\Rightarrow$ absolutes Maximum für $x = 4$

Teilaufgabe 4.4 (3 BE)

Nun sei $x = 4$. Der Kanal ist bis 1m unter der Oberkante gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind.

Lösung zu Teilaufgabe 4.4

Prozentrechnung



$A(4) = 32 + 2\pi$ (s. Teilaufgabe 4.3)

$A_{\text{frei}} = 8 \cdot 1 = 8$

$A_{\text{gefüllt}} = A(4) - A_{\text{frei}} = 24 + 2\pi$

$$\text{Prozentuale Auslastung} = \frac{A_{\text{gefüllt}}}{A(4)}\cdot 100 = \frac{24+2\pi}{32+2\pi}\cdot 100 \approx 79,1\%$$