Abitur 2014 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft hat.

Teilaufgabe Teil A 1a (1 BE)

Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Die Funktion h hat den Wertebereich $[1;3]$.

Teilaufgabe Teil A 1c (1 BE)

Die Funktion k besitzt die Periode π.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

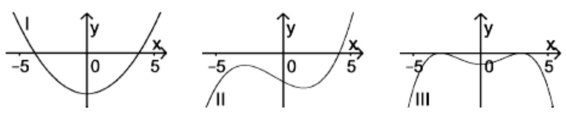
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Teilaufgabe Teil A 3 (2 BE)

Der Graph einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto g(x)$ besitzt für $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I, II und III zur zweiten Ableitungsfunktion g'' von g gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Teilaufgabe Teil A 4 (5 BE)

In einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) werden alle Rechtecke betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen.
- Ein Eckpunkt liegt auf dem Graphen G_f der Funktion $f : x \mapsto -\ln x$ mit $0 < x < 1$.

Abbildung 1 zeigt ein solches Rechteck.
Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.

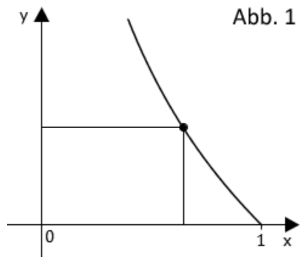


Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

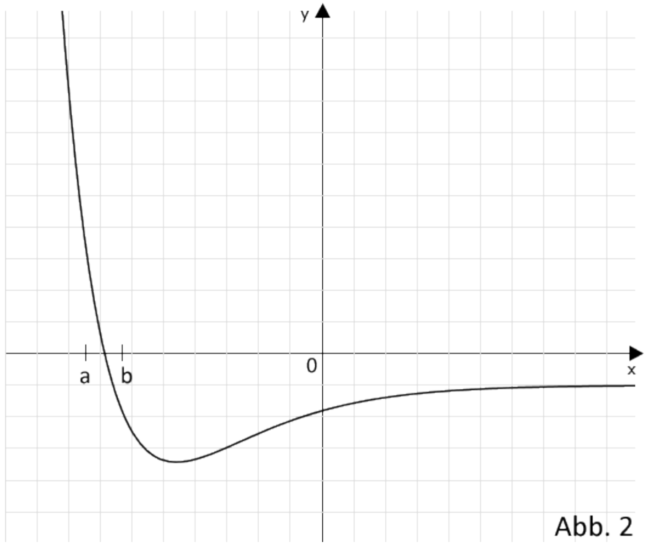


Abb. 2

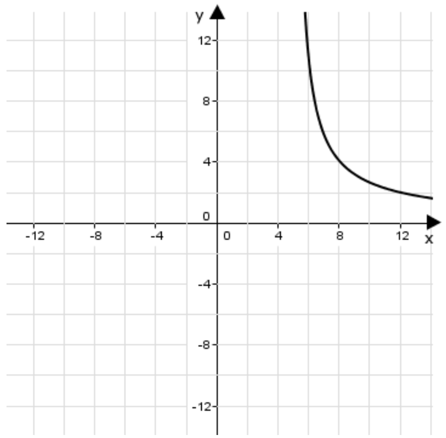
Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 - 25}$ und maximalem Definitionsbereich D_f. Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen G_f von f.



Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Zeigen Sie, dass $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ gilt und dass G_f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Geben Sie die Nullstelle von f sowie die Gleichungen der drei Asymptoten von G_f an.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Steigung von G_f in jedem Punkt des Graphen negativ ist. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem G_f die x-Achse schneidet.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Die Funktion $f^\star : x \mapsto f(x)$ mit Definitionsbereich $]5; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion f nur hinsichtlich des Definitionsbereichs. Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar ist, die Funktion $f^\star$ dagegen schon. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von $f^\star$ in die Abbildung ein.

Teilaufgabe Teil B 1e (5 BE)

Der Graph von f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 10$ und $x = s$ mit $s > 10$ schließen ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(s)$ ein. Bestimmen Sie $A(s)$.

(*Ergebnis:* $A(s) = 10 \cdot \ln \dfrac{s^2 - 25}{75}$)

Teilaufgabe Teil B 1f (3 BE)

Ermitteln Sie s so, dass das Flächenstück aus Aufgabe 1e den Inhalt 100 besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1g (2 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von $A(s)$ für $s \to +\infty$

Ein Motorboot fährt mit konstanter Motorleistung auf einem Fluss eine Strecke der Länge 10 km zuerst flussabwärts und unmittelbar anschließend flussaufwärts zum Ausgangspunkt zurück. Mit der Eigengeschwindigkeit des Motorboots wird der Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich das Boot bei dieser Motorleistung auf einem stehenden Gewässer bewegen würde.

Im Folgenden soll modellhaft davon ausgegangen werden, dass die Eigengeschwindigkeit des Boots während der Fahrt konstant ist und das Wasser im Fluss mit der konstanten Geschwindigkeit $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fließt. Die für das Wendemanöver erforderliche Zeit wird vernachlässigt.

Die Gesamtfahrtzeit in Stunden, die das Boot für Hinfahrt und Rückfahrt insgesamt benötigt, wird im Modell für $x > 5$ durch den Term $t(x) = \dfrac{10}{x+5} + \dfrac{10}{x-5}$ angegeben. Dabei ist x die Eigengeschwindigkeit des Boots in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jeweils die Gesamtfahrtzeit in Minuten.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass der erste Summand des Terms $t(x)$ die für die Hinfahrt, der zweite Summand die für die Rückfahrt erforderliche Zeit in Stunden angibt.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $t(x)$ für $0 < x < 5$ nicht als Gesamtfahrtzeit interpretiert werden kann.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Terme $f(x)$ und $t(x)$ äquivalent sind.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung für eine Fahrt mit einer Gesamtfahrtzeit zwischen zwei und vierzehn Stunden die zugehörige Eigengeschwindigkeit des Boots näherungsweise ermitteln kann. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Eigengeschwindigkeit des Boots für eine Fahrt mit einer Gesamtfahrtzeit von vier Stunden.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (1 BE)

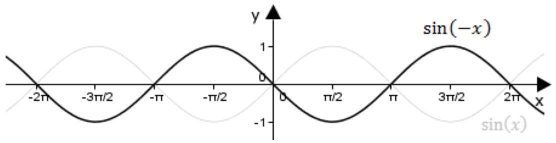
Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft hat.

Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Spiegelung von Funktionsgraphen

z.B.: $\quad g(x) = \sin(-x)$



Erläuterung: *Spiegelung von Funktionsgraphen*

Der Graph einer Funktion g mit $g(x) = -f(x)$ geht aus dem Graphen der Funktion f durch **Spiegelung an der x-Achse** hervor.

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2$

Der Graph einer Funktion g mit $g(x) = f(-x)$ geht aus dem Graphen der Funktion f durch **Spiegelung an der y-Achse** hervor.

Beispiel: $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{-x}$

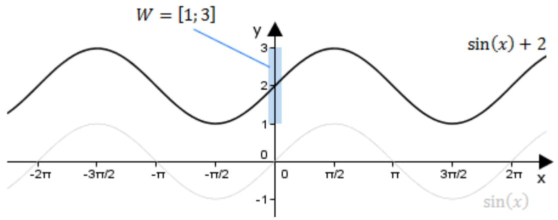
Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Die Funktion h hat den Wertebereich $[1;3]$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Wertemenge einer Funktion

z.B.: $\quad h(x) = \sin(x) + 2$



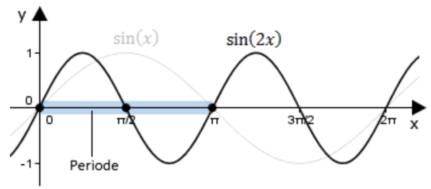
Teilaufgabe Teil A 1c (1 BE)

Die Funktion k besitzt die Periode π.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1c

Verschiebung von Funktionsgraphen

z.B.: $\quad k(x) = \sin(2x)$



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Nullstellen einer Funktion

Ansatz:

Erläuterung: *Nullstellen*

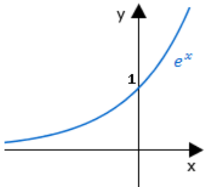
Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$\underbrace{e^x}_{>0} \cdot (2x + x^2) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $2x + x^2$ untersucht werden.

$2x + x^2 = 0$

$x \cdot (2 + x) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Nachweis einer Stammfunktion

$F(x) = x^2 \cdot e^x$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$.

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion e^x ist gleich die Funktion selbst.

$F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$F'(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right) = f(x)$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\quad F' = f$.

$\Rightarrow \quad F$ ist eine Stammfunktion von f.

Stammfunktion bestimmen

$G(x) = F(x) + C$

$G(x) = x^2 \cdot e^x + C$

Es soll gelten: $G(1) = 2e$

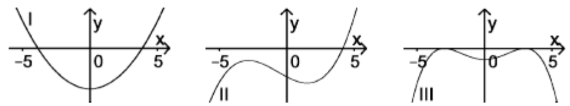
$G(1) = 1 \cdot e + C$

$e + C = 2e \quad \Rightarrow \quad C = e$

$\Rightarrow \quad G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

Teilaufgabe Teil A 3 (2 BE)

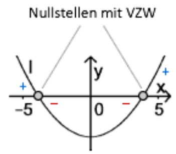
Der Graph einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto g(x)$ besitzt für $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I, II und III zur zweiten Ableitungsfunktion g'' von g gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3

Krümmungsverhalten einer Funktion

Graph I gehört zu g'', da dieser zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.



Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt (unter anderem):

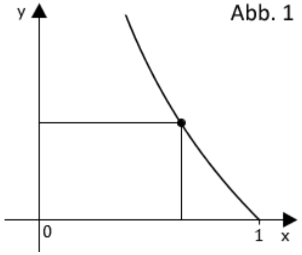
Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''\left(x^W\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

Teilaufgabe Teil A 4 (5 BE)

In einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) werden alle Rechtecke betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

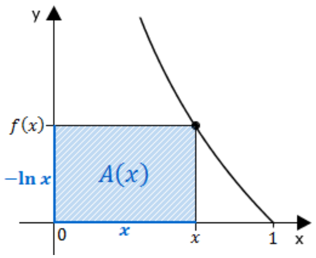
- Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen.
- Ein Eckpunkt liegt auf dem Graphen G_f der Funktion $f : x \mapsto -\ln x$ mit $0 < x < 1$.

Abbildung 1 zeigt ein solches Rechteck.
Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.



Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4

Extremwertaufgabe



Flächeninhalt des Rechtecks: $A(x) = x \cdot (-\ln x)$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = -\ln x$.

Für die ln-Funktion gilt: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$$A'(x) = 1 \cdot (-\ln x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$A'(x) = -\ln x - 1$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $A'(x) = 0$

$$0 = -\ln x - 1$$

$$\ln x = -1 \qquad | \; e^x$$

$$x^E = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Prüfen, ob es sich um eine Extremstelle handelt:

Zweite Ableitung bilden:

$$A''(x) = -\frac{1}{x}$$

$x^E = e^{-1}$ in $A''(x)$ einsetzen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right)=0$ und $f''\left(x^E\right)>0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right)=0$ und $f''\left(x^E\right)<0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

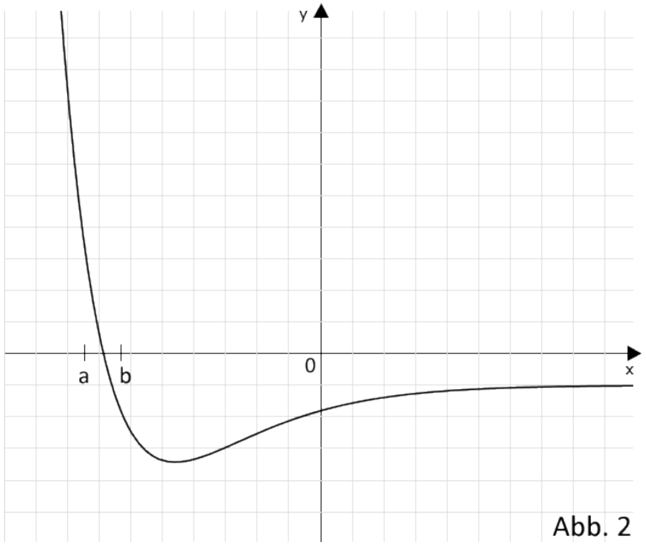
$A''\left(e^{-1}\right)=-\dfrac{1}{e^{-1}}=-e<0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum an der Stelle $x^E=e^{-1}$

$y^E=f\left(x^E\right)=f\left(e^{-1}\right)=-\ln\left(e^{-1}\right)=1$

Gesuchte Seitenlängen: $e^{-1}, 1$

Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.



Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5a

Eigenschaften der Integralfunktion

Zwischen a und der Nullstelle von f steigt der Graph der Stammfunktion streng monoton, hat an der Nullstelle von f ein Maximum und fällt dann streng monoton bis b.

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

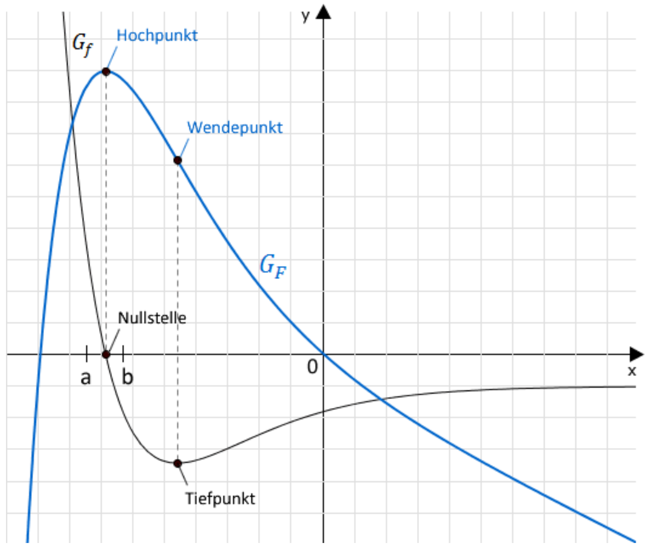
f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5b

Eigenschaften der Integralfunktion



Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

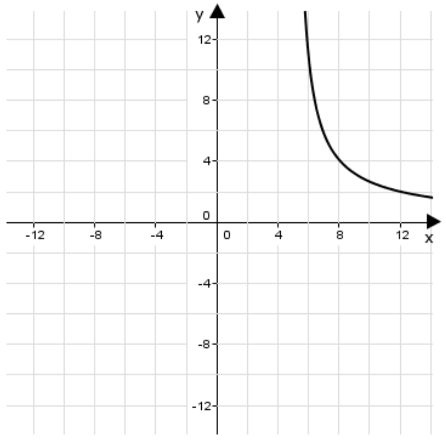
wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 - 25}$ und maximalem Definitionsbereich D_f. Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen G_f von f.



Zeigen Sie, dass $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ gilt und dass G_f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Geben Sie die Nullstelle von f sowie die Gleichungen der drei Asymptoten von G_f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Definitionsbereich bestimmen

$$f(x) = \frac{20x}{x^2 - 25}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x^2 - 25$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x_{1,2} = \pm 5$$

$$\Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$$

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$f(-x) = \frac{20 \cdot (-x)}{(-x)^2 - 25} = \frac{-20x}{x^2 - 25} = -\frac{20x}{x^2 - 25} = -f(x)$$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Nullstellen einer Funktion

Ansatz:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0$

$$0 = \frac{20x}{x^2 - 25}$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$20x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^N = 0$

Asymptoten bestimmen

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$

Erläuterung: *Asymptoten, Grenzwert*

Um die Asymptoten einer Funktion zu bestimmen, untersucht man das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und an den Definitionslücken. Dazu bildet man die Grenzwerte.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{20x}^{\to \pm\infty}}{\underbrace{x^2 - 25}_{\to +\infty}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{20x}{x}}{\frac{x^2}{x} - \frac{25}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{20}{\underbrace{x - \underbrace{\frac{25}{x}}_{\to 0}}_{\to \pm\infty}} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ waagerechte Asymptote

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man das Verhalten einer Funktion an einer Definitionslücke, also eine Stelle x_0 die nicht zum Definitionsbereich gehört, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von links.
Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von rechts.

In diesem Fall ist 5 die Definitionslücke.

$$\lim_{x \to 5^\pm} \frac{\overbrace{20x}^{\to 100}}{\underbrace{x^2 - 25}_{\to 0^\pm}} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 5$ senkrechte Asymptote

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man das Verhalten einer Funktion an einer Definitionslücke, also eine Stelle x_0 die nicht zum Definitionsbereich gehört, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von links.
Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von rechts.

In diesem Fall ist -5 die Definitionslücke.

$$\lim_{x \to -5^\pm} \frac{\overbrace{20x}^{\to -100}}{\underbrace{x^2 - 25}_{\to 0^\mp}} = \pm\infty$$

$\Rightarrow \quad x = -5$ senkrechte Asymptote

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Steigung von G_f in jedem Punkt des Graphen negativ ist. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem G_f die x-Achse schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Steigung eines Funktionsgraphen

$$f(x) = \frac{20x}{x^2 - 25}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 20x$ und $v(x) = x^2 - 25$.
Dann ist $u'(x) = 20$ und $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{20 \cdot \left(x^2 - 25\right) - 20x \cdot 2x}{\left(x^2 - 25\right)^2} = \frac{20x^2 - 500 - 40x^2}{\left(x^2 - 25\right)^2} = \frac{-20x^2 - 500}{\left(x^2 - 25\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-20\left(x^2 + 25\right)}{\left(x^2 - 25\right)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

Erläuterung:

Die Nennerfunktion $\left(x^2 - 25\right)^2$ ist wegen dem Quadrat für alle x aus dem Definitionsbereich größer Null.

Die Zählerfunktion $-20\left(x^2 + 25\right)$ ist für alle x aus dem Definitionsbereich kleiner Null, da der Term $x^2 + 25$ stets größer Null ist.

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-20\overbrace{\left(x^2 + 25\right)}^{>0}}^{<0}}{\underbrace{\left(x^2 - 25\right)^2}_{>0}} < 0 \qquad \text{für alle } x \in D_f$$

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Die Steigung des Graphen einer Funktion f an der Stelle x ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x.

$\Rightarrow$ Die Steigung von G_f ist in jedem Punkt des Graphen negativ.

Schnittwinkel eines Graphen mit der x-Achse

$$f'(x) = \frac{-20\,\left(x^2+25\right)}{\left(x^2-25\right)^2} \qquad ; \qquad x^N = 0$$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α, welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.

$f'(x_0) = \tan\alpha$

Hier ist $x_0 = 0$, die Nullstelle der Funktion.

$$f'(0) = \frac{-20\,(0+25)}{(0-25)^2} = \frac{-500}{625} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) \approx -38,7^\circ$$

$\Rightarrow \quad \hat{\alpha} \approx 38,7^\circ \qquad$ (spitzer Winkel)

oder

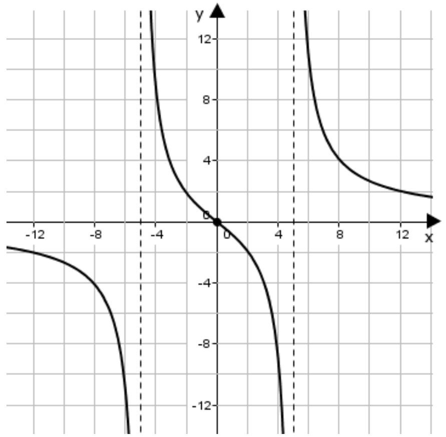
$\Rightarrow \quad \alpha = 180^\circ - \hat{\alpha} \approx 141,3^\circ \qquad$ (stumpfer Winkel)

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Skizze



Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Die Funktion $f^\star : x \mapsto f(x)$ mit Definitionsbereich $]5;+\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion f nur hinsichtlich des Definitionsbereichs. Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar ist, die Funktion $f^\star$ dagegen schon. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von $f^\star$ in die Abbildung ein.

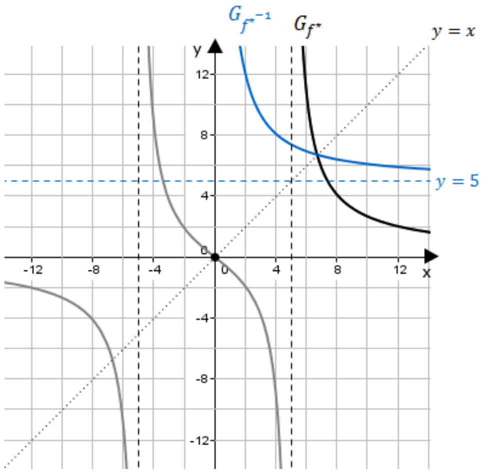
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Umkehrfunktion bestimmen

Die Funktion $f^\star$ ist umkehrbar, da sie im Bereich $]5;+\infty[$ **streng** monoton fallend ist.

Die Funktion f ist nicht umkehrbar, da es z.B. $x_1 \in]-5,0[$ und $x_2 \in]5;+\infty[$ gibt mit $f(x_1) = f(x_2)$.

Skizze



Erläuterung: *Graph der Umkehrfunktion*

Der Graph $G_{f^{\star -1}}$ der Umkehrfunktion $f^{\star^{-1}}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f an der Winkelhalbierenden $y = x$ für $x \in]5; +\infty[$.

Die senkrechte Asymptote $x = 5$ der Funktion f wird zur waagerechten Asymptote $y = 5$ der Umkehrfunktion $f^{\star^{-1}}$. Ebenso verhält es sich bei der waagerechten Asymptote $y = 0$ (x-Achse).

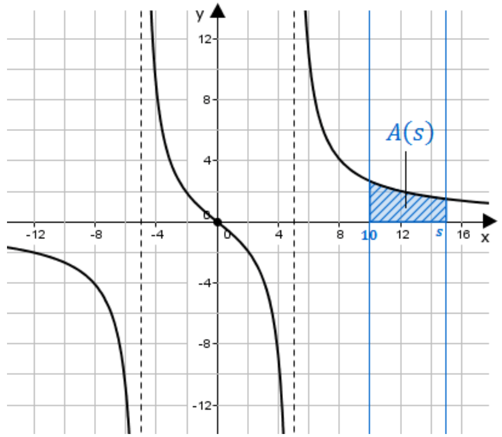
Teilaufgabe Teil B 1e (5 BE)

Der Graph von f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 10$ und $x = s$ mit $s > 10$ schließen ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(s)$ ein. Bestimmen Sie $A(s)$.

(*Ergebnis:* $A(s) = 10 \cdot \ln \dfrac{s^2 - 25}{75}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse sowie den Geraden $x = 10$ und $x = s$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_{10}^{s} f(x) \mathrm{d}x$$

Da $s > 10$, bildet s die obere Grenze des Integrals.

$$A(s) = \int_{10}^{s} f(x) \mathrm{d}x$$

$$A(s) = \int_{10}^{s} \frac{20x}{x^2 - 25} \mathrm{d}x$$

Erläuterung: *Ausklammern, Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gilt folgende Rechenregel für Integrale:

$$\int_a^b c \cdot h(x)\,d\,x \quad = \quad c \cdot \int_a^b h(x)\,d\,x$$

Hier wird der Faktor 10 aus dem Integral ausgeklammert, damit im Integral eine Funktion der Form $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ stehen bleibt.

$$\underbrace{\left(x^2-25\right)}_{g(x)}{}' = \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

$$A(s) = 10 \cdot \int_{10}^{s} \frac{2x}{x^2-25}\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\dfrac{2x}{x^2-25}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|g(x)| + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x}{x^2-25}\,\mathrm{dx} = \ln\left|x^2-25\right|$$

Hier ist die Nennerfunktion $g(x) = x^2 - 25$. Abgeleitet ergibt sie die Zählerfunktion $2x$.

$$A(s) = 10 \cdot \left[\ln\left|x^2-25\right|\right]_{10}^{s}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A(s) = 10 \cdot \left(\ln\left|s^2-25\right| - \ln\left|10^2-25\right|\right)$$

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Quotienten / Differenz von Logarithmen:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Da $s > 10$, ist $s^2 - 25 > 0$ und somit fallen die Betragsstriche weg.

$$A(s) = 10 \cdot \ln\frac{s^2-25}{75}$$

Teilaufgabe Teil B 1f (3 BE)

Ermitteln Sie s so, dass das Flächenstück aus Aufgabe 1e den Inhalt 100 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Parameterwerte ermitteln

$$A(s) = 10 \cdot \ln\frac{s^2-25}{75}$$

$$10 \cdot \ln\frac{s^2-25}{75} = 100 \qquad | :10$$

$$\ln\frac{s^2-25}{75} = 10 \qquad | \, e^x$$

$$\frac{s^2-25}{75} = e^{10} \qquad | \cdot 75$$

$$s^2 - 25 = 75e^{10} \qquad | +25$$

$$s^2 = 75e^{10} + 25 \qquad | \sqrt{}$$

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{75e^{10}+25}$$

$$\Rightarrow \qquad s = \sqrt{75e^{10}+25}$$

Teilaufgabe Teil B 1g (2 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von $A(s)$ für $s \to +\infty$

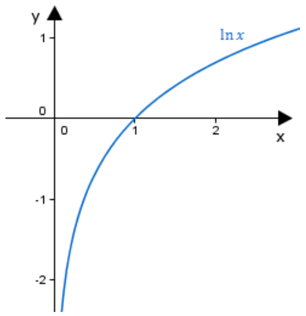
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{s \to +\infty} A(s) = \lim_{s \to +\infty} 10 \cdot \underbrace{\ln \underbrace{\frac{s^2 - 25}{75}}_{\to +\infty}}_{\to +\infty} = +\infty$$

Erläuterung: *ln-Funktion*

Graph der ln-Funktion:



Am Graphen der ln-Funktion lassen sich die Grenzwerte ablesen.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Ein Motorboot fährt mit konstanter Motorleistung auf einem Fluss eine Strecke der Länge 10 km zuerst flussabwärts und unmittelbar anschließend flussaufwärts zum Ausgangspunkt zurück. Mit der Eigengeschwindigkeit des Motorboots wird der Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich das Boot bei dieser Motorleistung auf einem stehenden Gewässer bewegen würde.

Im Folgenden soll modellhaft davon ausgegangen werden, dass die Eigengeschwindigkeit des Boots während der Fahrt konstant ist und das Wasser im Fluss mit der konstanten Geschwindigkeit $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fließt. Die für das Wendemanöver erforderliche Zeit wird vernachlässigt.

Die Gesamtfahrtzeit in Stunden, die das Boot für Hinfahrt und Rückfahrt insgesamt benötigt, wird im Modell für $x > 5$ durch den Term $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$ angegeben. Dabei ist x die Eigengeschwindigkeit des Boots in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jeweils die Gesamtfahrtzeit in Minuten.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionswert berechnen

$$t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$$

$x_1 = 10$; $x_2 = 20$

$$t\ (x_1) = \frac{10}{10+5} + \frac{10}{10-5} = \frac{8}{3}\ \text{h} = \frac{8}{3} \cdot 60\ \text{min} = 160\ \text{min}$$

$$t\ (x_2) = \frac{10}{20+5} + \frac{10}{20-5} = \frac{16}{15}\ \text{h} = \frac{16}{15} \cdot 60\ \text{min} = 64\ \text{min}$$

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass der erste Summand des Terms $t(x)$ die für die Hinfahrt, der zweite Summand die für die Rückfahrt erforderliche Zeit in Stunden angibt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Anwendungszusammenhang

$$t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$$

Bei der Hinfahrt fährt das Boot 10 km flussabwärts (also mit der Strömung). Die Geschwindigkeit des Bootes setzt sich zusammen aus der Eigengeschwindigkeit x und der Geschwindigkeit des Flusses von $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, also $x+5$.

Bei der Rückfahrt fährt das Boot 10 km flussaufwärts (also gegen die Strömung). Die Geschwindigkeit des Bootes setzt sich zusammen aus der Eigengeschwindigkeit x abzüglich der Geschwindigkeit des Flusses von $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, also $x-5$.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $t(x)$ für $0 < x < 5$ nicht als Gesamtfahrtzeit interpretiert werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Anwendungszusammenhang

Ist die Eigengeschwindigkeit des Bootes (x) kleiner als $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, dann kann dieses nicht mehr flussaufwärts fahren, da die Strömung $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ schnell ist.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Terme $f(x)$ und $t(x)$ äquivalent sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Termumformung

$$f(x) = \frac{20x}{x^2-25} \qquad \text{(s. Teilaufgabe Teil B 1a)}$$

$$t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$$

$$t(x) = \frac{10\cdot(x-5)+10\cdot(x+5)}{(x+5)\cdot(x-5)}$$

$$t(x) = \frac{10x-50+10x+50}{x^2-25} = \frac{20x}{x^2-25} = f(x)$$

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

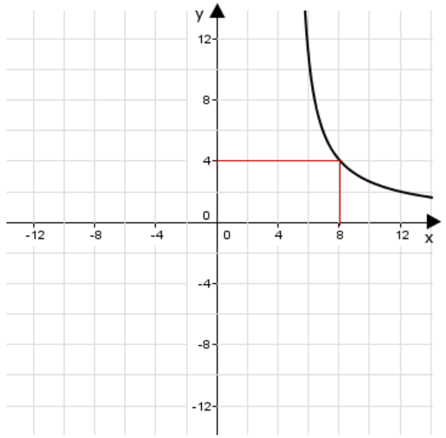
Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung für eine Fahrt mit einer Gesamtfahrtzeit zwischen zwei und vierzehn Stunden die zugehörige Eigengeschwindigkeit des Boots näherungsweise ermitteln kann. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Eigengeschwindigkeit des Boots für eine Fahrt mit einer Gesamtfahrtzeit von vier Stunden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Werte am Graphen ablesen

Am Graphen kann der zu einem betrachteten y-Wert (Gesamtfahrtzeit) zugehörige x-Wert (Eigengeschwindigkeit) abgelesen werden.

$$y = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x \approx 8,1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Quadratische Gleichung

$$4 = \frac{20x}{x^2 - 25} \qquad \mid \cdot \left(x^2 - 25\right)$$

$$4x^2 - 100 = 20x \qquad \mid -20x$$

$$4x^2 - 20x - 100 = 0 \qquad \mid : 4$$

$$x^2 - 5x - 25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 25}}{2} = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

Da $x > 5$ sein muss (s. Teilaufgabe Teil B 2a), folgt:

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{2} \approx 8,09$$