Abitur 2014 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,c} : x \mapsto \sin(a\,x) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$.

Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Geben Sie für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für a und einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $g_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

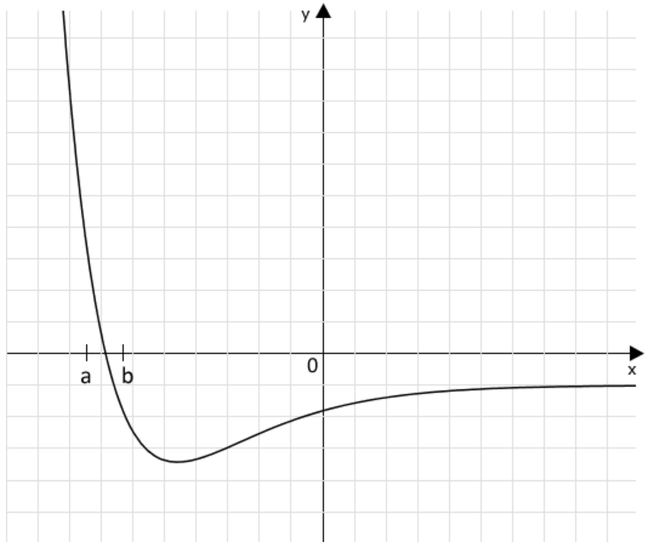
α) Die Funktion $g_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0; 2]$.

β) Die Funktion $g_{a,c}$ hat im Intervall $[0; \pi]$ genau drei Nullstellen.

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, welche Werte die Ableitung von $g_{a,c}$ annehmen kann.

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$ mit maximaler Definitionsmenge $D_f =]-\infty; 6]$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und geben Sie $f(6)$ an.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' von f und geben Sie die maximale Definitionsmenge von f' an.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 6} f'(x)$ und beschreiben Sie, welche Eigenschaft von G_f aus diesem Ergebnis folgt.

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12-2x}}$)

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f und die Wertemenge von f an.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Geben Sie $f(-2)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf die folgenden Aufgaben: $-3 \leq y \leq 7$).

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Die Funktion f ist in D_f umkehrbar. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f an und zeigen Sie, dass $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ gilt.

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ ist die Parabel G_h. Der Graph der in Aufgabe 1e betrachteten Umkehrfunktion f^{-1} ist ein Teil dieser Parabel.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_h mit der durch die Gleichung $y = x$ gegebenen Winkelhalbierenden w des I. und III. Quadranten.

(*Teilergebnis: x-Koordinaten der Schnittpunkte:* -2 *und* 4)

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zeichnen Sie die Parabel G_h - unter Berücksichtigung des Scheitels – im Bereich $-2 \leq x \leq 4$ in Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d ein. Spiegelt man diesen Teil von G_h an der Winkelhalbierenden w, so entsteht eine herzförmige Figur; ergänzen Sie Ihre Zeichnung dementsprechend.

Durch die in Aufgabe 2 entstandene herzförmige Figur soll das abgebildete Blatt modellhaft beschrieben werden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem aus Aufgabe 1d soll dabei 1 cm in der Wirklichkeit entsprechen.

Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Berechnen Sie den Inhalt des von G_h und der Winkelhalbierenden w eingeschlossenen Flächenstücks. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den Flächeninhalt des Blatts auf der Grundlage des Modells.

Teilaufgabe Teil B 3b (6 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(-2|h(-2))$. Berechnen Sie den Wert, den das Modell für die Größe des Winkels liefert, den die Blattränder an der Blattspitze einschließen.

Teilaufgabe Teil B 3c (3 BE)

Der Verlauf des oberen Blattrands wird in der Nähe der Blattspitze durch das bisher verwendete Modell nicht genau genug dargestellt. Daher soll der obere Blattrand im Modell für $-2 \leq x \leq 0$ nicht mehr durch G_h, sondern durch den Graphen G_k einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion k dritten Grades beschrieben werden. Für die Funktion k werden die folgenden Bedingungen gewählt (k' und h' sind die Ableitungsfunktionen von k bzw. h):

I	$k(0) = h(0)$
II	$k'(0) = h'(0)$
III	$k(-2) = h(-2)$
IV	$k'(-2) = 1,5$

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass die Wahl der Bedingungen I, II und III sinnvoll ist. Machen Sie plausibel, dass die Bedingung IV dazu führt, dass die Form des Blatts in der Nähe der Blattspitze im Vergleich zum ursprünglichen Modell genauer dargestellt wird.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad , D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Erste Ableitung bilden:

> Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*
>
> Quotientenregel:
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$
>
> Hier ist $u(x) = x$ und $v(x) = \ln x$.
> Dann ist $u'(x) = 1$ und $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1 \qquad | \quad e^x$$

$$x = e^1$$

$$\Rightarrow \quad x^E = e$$

Lage des möglichen Extrempunkts:

$$y^E = f\left(x^E\right) = f(e) = \frac{e}{\underbrace{\ln e}_{1}} = e \quad \Rightarrow \quad E\,(e|e)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

> Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Quotientenregel:
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$
>
> Hier ist $u(x) = \ln x - 1$ und $v(x) = (\ln x)^2$.
> Dann ist $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$
>
> $v'(x)$ wird mit der Kettenregel gebildet:
>
> $$v(x) = r(s(x)) \quad \Rightarrow \quad v'(x) = r'(s(x)) \cdot s'(x)$$
>
> Hier ist $r(x) = (\ldots)^2$ und $s(x) = \ln x$.
> Dann ist $r'(x) = 2(\ldots)^1$ und $s'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $\frac{1}{x} \cdot \ln x$ wird im Zähler ausgeklammert.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot (\ln x - 2(\ln x - 1))}{(\ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot (2 - \ln x)}{(\ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2 - \ln x)}{x \cdot (\ln x)^3}$$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Extremstellen untersuchen:

$$f''(e) = \frac{\overbrace{(2 - \ln e)}^{2-1}}{e \cdot \underbrace{(\ln e)^3}_{1}} = \frac{1}{e} > 0 \quad \Rightarrow \quad E\ (e|e) \ \text{Tiefpunkt}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right)$.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Nullstellen einer Funktion

$$\underbrace{e^x}_{>0} \cdot \left(2x + x^2\right) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $2x + x^2$ untersucht werden.

$2x + x^2 = 0$

$x \cdot (2 + x) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Nachweis einer Stammfunktion

$F(x) = x^2 \cdot e^x$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$.

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion e^x ist gleich die Funktion selbst.

$F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$F'(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right) = f(x)$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\quad F' = f$.

$\Rightarrow \quad F$ ist eine Stammfunktion von f.

Stammfunktion bestimmen

$G(x) = F(x) + C$

$G(x) = x^2 \cdot e^x + C$

$G(1) = 1 \cdot e + C$

$e + C = 2e \qquad \Rightarrow \qquad C = e$

$\Rightarrow \qquad G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,c} : x \mapsto \sin(a\,x) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$.

Geben Sie für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für a und einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $g_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

α) Die Funktion $g_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0; 2]$.

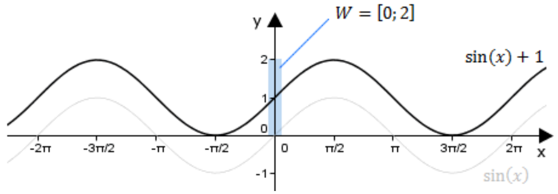
β) Die Funktion $g_{a,c}$ hat im Intervall $[0; \pi]$ genau drei Nullstellen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Verschiebung von Funktionsgraphen

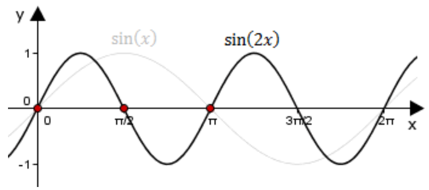
α) z.B. $a = 1$, $c = 1$

$\Rightarrow \qquad g_{1,1}(x) = \sin x + 1$



β) z.B. $a = 2$, $c = 0$

$\Rightarrow \qquad g_{2,0}(x) = \sin(2x)$



Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, welche Werte die Ableitung von $g_{a,c}$ annehmen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$g_{a,c}(x) = \sin(a\,x) + c$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Für die Sinusfunktion gilt: $(\sin x)' = \cos x$

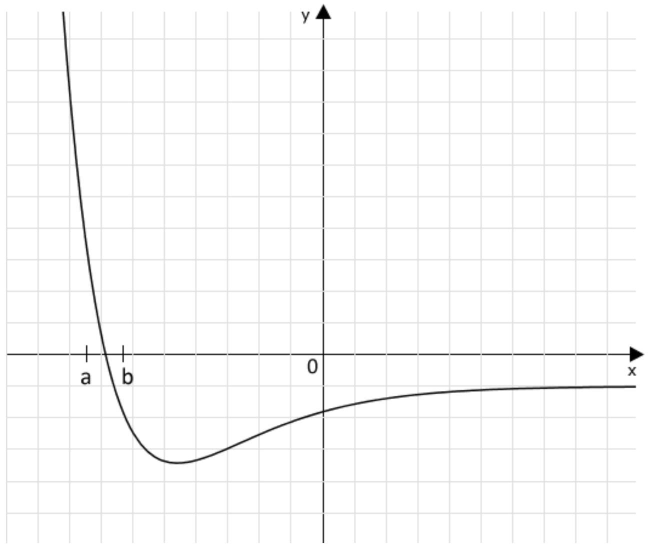
$g'_{a,c}(x) = a \cdot \cos(a\,x)$

Wertebereich bestimmen

$W = [-a, a]$

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Stammfunktion

Zwischen a und der Nullstelle von f steigt der Graph der Stammfunktion streng monoton, hat an der Nullstelle von f ein Maximum und fällt dann streng monoton bis b.

Erläuterung: *Stammfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

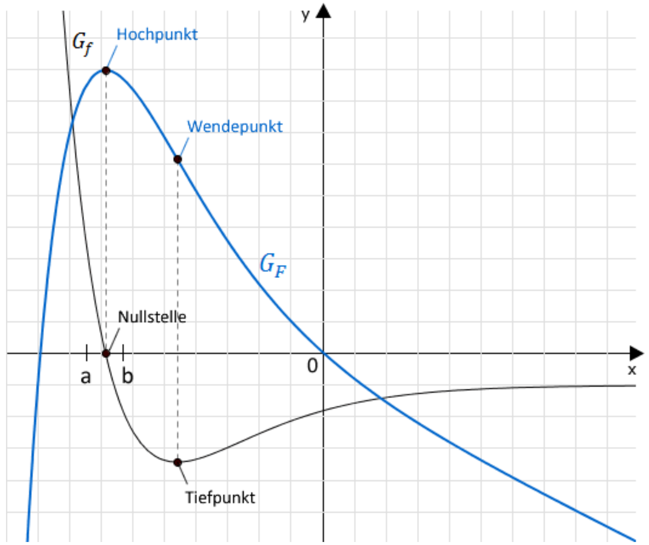
f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Stammfunktion



Erläuterung: *Stammfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$ mit maximaler Definitionsmenge $D_f =]-\infty; 6]$.
Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.
Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und geben Sie $f(6)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f(x) = 2 - \sqrt{12 - 2x} \quad , \quad D_f =]-\infty; 6]$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

$f(0) = 2 - \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad \left(0|2 - \sqrt{12}\right)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0$

$0 = 2 - \sqrt{12 - 2x}$

$\sqrt{12 - 2x} = 2 \qquad |$ quadrieren

$12 - 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

$\Rightarrow \quad (4|0)$

Grenzwert bestimmen

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \underbrace{\sqrt{12 - 2x}}_{\to +\infty} = -\infty$

Funktionswert berechnen

$f(6) = 2 - \sqrt{12 - 12} = 2 - 0 = 2$

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' von f und geben Sie die maximale Definitionsmenge von f' an.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 6} f'(x)$ und beschreiben Sie, welche Eigenschaft von G_f aus diesem Ergebnis folgt.

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12-2x}}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f(x) = 2 - \sqrt{12-2x} \quad , \quad D_f =]-\infty; 6]$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiel: $(x+1)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(x+1)^3}$

$f(x) = 2 - (12-2x)^{\frac{1}{2}}$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $u(x) = (\dots)^{\frac{1}{2}}$ und $v(x) = 12-2x$.
Dann ist $u'(x) = \frac{1}{2}(\dots)^{-\frac{1}{2}}$ und $v'(x) = -2$.

$f'(x) = 0 - \frac{1}{2}(12-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12-2x}}$

Definitionsbereich bestimmen

$D_{f'} =]-\infty; 6[$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f('x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $\sqrt{12-2x}$ darf den Wert Null nicht annehmen. Die Nullstelle der Nennerfunktion ($x = 6$) wird aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen (offene Klammer).

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x\to 6^-} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{12-2x}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Der Definitionsbereich der Funktion lautet $D_{f'} =]-\infty; 6[$, also muss bei $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt{12-2x}}$ ein linksseitiger Grenzwert betrachtet werden. Das wird durch die Schreibweise $x \to 6^-$ verdeutlicht.

$12-2x$ ist eine Gerade mit negativer Steigung, die bei $x = 6$ die x-Achse schneidet. Nähert man sich von links der Nullstelle, so werden die positiven Funktionswerte immer kleiner ($\to 0^+$).

Dies bedeutet z.B.:

Für $x \to 6$ wird die Steigung von G_f unendlich groß

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Die Steigung des Graphen einer Funktion f an der Stelle x ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f und die Wertemenge von f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Monotonieverhalten einer Funktion

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12-2x}} \quad , \quad D_{f'} =]-\infty;6[$

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

$f'(x) = \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{12-2x}}_{>0}} > 0 \quad$ für alle $x \in D_{f'}$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist streng monoton steigend

Wertebereich bestimmen

$f(x) = 2 - \sqrt{12-2x} \quad , \quad D_f =]-\infty;6]$

$W_f =]-\infty;2]$

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Geben Sie $f(-2)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf die folgenden Aufgaben: $-3 \leq y \leq 7$).

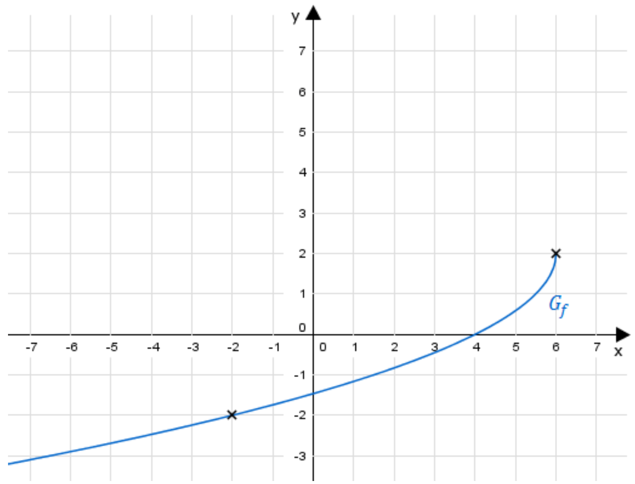
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Funktionswert berechnen

$f(x) = 2 - \sqrt{12-2x} \quad , \quad D_f =]-\infty;6]$

$f(-2) = 2 - \sqrt{12-2\cdot(-2)} = 2 - \sqrt{16} = -2$

Skizze



Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Die Funktion f ist in D_f umkehrbar. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f an und zeigen Sie, dass $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Umkehrfunktion bestimmen

$f : y = 2 - \sqrt{12-2x}$

Erläuterung: *Umkehrfunktion*

Um die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f zu bestimmen, vertauscht man die Variablen x und y in der Funktionsgleichung und löst die Gleichung nach y auf.

Einfaches Beispiel:

$f(x) = x + 2$

$y = x + 2$

Vertauschen:

$x = y + 2$

Auflösen:

$y = x - 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$

$x = 2 - \sqrt{12 - 2y}$

$2 - x = \sqrt{12 - 2y} \qquad |^2$

$(2 - x)^2 = 12 - 2y$

$4 - 4x + x^2 = 12 - 2y$

$-8 - 4x + x^2 = -2y$

$f^{-1} : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

Erläuterung: *Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion*

Die Regel lautet:

Der Definitionsbereich der Funktion wird der Wertebereich der Umkehrfunktion und der Wertebereich der Funktion wird der Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

$W_f =]-\infty; 2] \quad \Rightarrow \quad D_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ ist die Parabel G_h. Der Graph der in Aufgabe 1e betrachteten Umkehrfunktion f^{-1} ist ein Teil dieser Parabel.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_h mit der durch die Gleichung $y = x$ gegebenen Winkelhalbierenden w des I. und III. Quadranten.

(*Teilergebnis: x-Koordinaten der Schnittpunkte:* -2 *und* 4)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Schnittpunkt zweier Funktionen

$h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 4; \qquad y = x$

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$h(x) = x$

$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = x$

$-\dfrac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1 \pm 3}{-1}$$

$x_1 = -2 \;;\; x_2 = 4$

$h(x_1) = -2$; $h(x_2) = 4$

Schnittpunkte: $S_1(-2|-2)$; $S_2(4|4)$

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zeichnen Sie die Parabel G_h - unter Berücksichtigung des Scheitels – im Bereich $-2 \leq x \leq 4$ in Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d ein. Spiegelt man diesen Teil von G_h an der Winkelhalbierenden w, so entsteht eine herzförmige Figur; ergänzen Sie Ihre Zeichnung dementsprechend.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

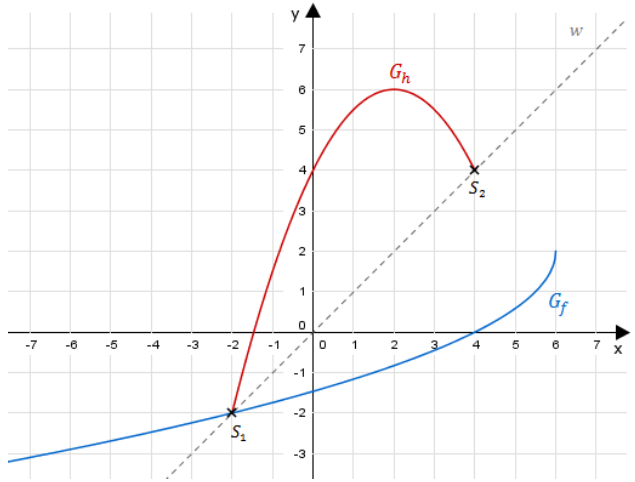
Skizze

$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

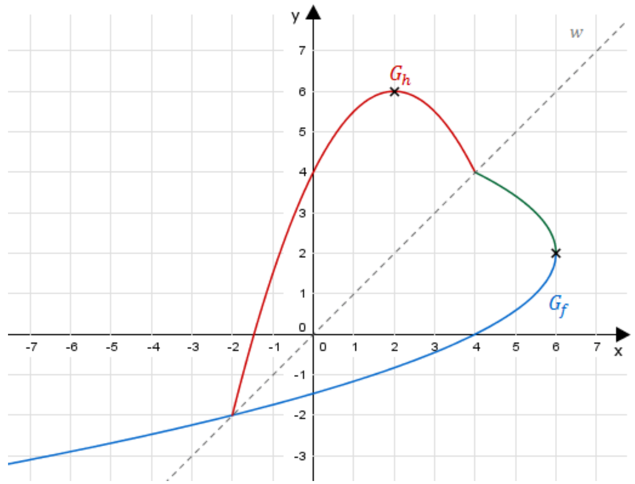
$h'(x) = -x + 2$

$-x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad (2|h(2) = 6)$ Scheitelpunkt

G_h im Bereich $-2 \leq x \leq 4$:



Spiegelung von G_h an der Winkelhalbierenden:



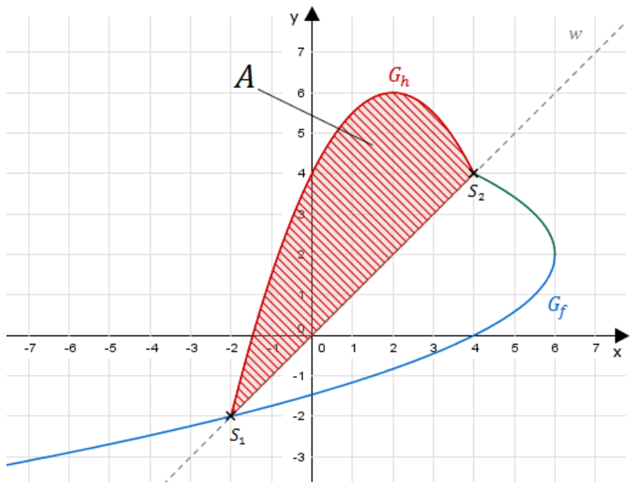
Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Durch die in Aufgabe 2 entstandene herzförmige Figur soll das abgebildete Blatt modellhaft beschrieben werden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem aus Aufgabe 1d soll dabei 1 cm in der Wirklichkeit entsprechen.

Berechnen Sie den Inhalt des von G_h und der Winkelhalbierenden w eingeschlossenen Flächenstücks. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den Flächeninhalt des Blatts auf der Grundlage des Modells.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

$w : y = x$

Schnittpunkte: $S_1(-2|-2)$; $S_2(4|4)$

Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Der Inhalt eines Flächenstücks zwischen zwei Funktionsgraphen G_f und G_g ist gegeben durch:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \text{ dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

Da nur zwei Schnittpunkte vorhanden sind, kann der innere Betrag weggelassen werden.

Vorsicht: kommt insgesamt beim Integral ein negativer Wert heraus, muss nur das Integral in Betrag gesetzt werden.

$$A = \int_{-2}^{4} [h(x) - x] \text{ dx}$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 - x\right) \text{ dx}$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right) \text{ dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \text{ dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right) \text{ dx} = -\frac{1}{2}\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4\frac{x^{0+1}}{0+1} = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^{4}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \left(-\frac{1}{6} \cdot 4^3 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) \right)$$

$$A = \frac{40}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right)$$

$$A = 18$$

Flächeninhalt Blatt: 36 cm^2

Teilaufgabe Teil B 3b (6 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(-2|h(-2))$. Berechnen Sie den Wert, den das Modell für die Größe des Winkels liefert, den die Blattränder an der Blattspitze einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Tangentengleichung ermitteln

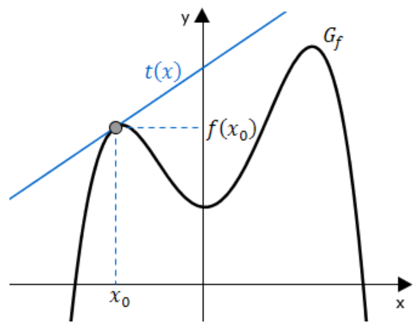
$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

Tangentengleichung t im Punkt $(-2|h(-2))$:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$



Hier ist $x_0 = -2$.

$$t: y = (x - x_0) \cdot h'(x_0) + h(x_0)$$

$$t: y = (x + 2) \cdot h'(-2) + h(-2)$$

Nebenrechnungen:

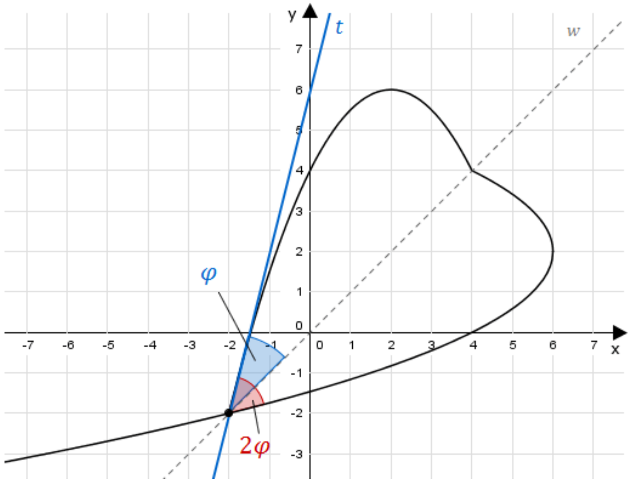
$$h(-2) = -2$$

$$h'(x) = -x + 2$$

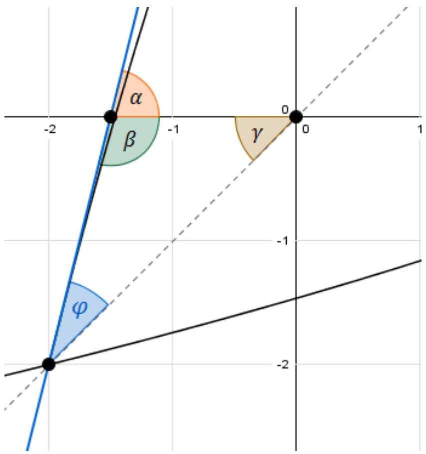
$$h'(-2) = 4$$

$$\Rightarrow \quad t: y = 4 \cdot (x + 2) - 2 = 4x + 6$$

Winkel zwischen zwei Geraden



Betrachtet wird nun das Dreieck, welches von Ursprung, Blattspitze und x-Achsenabschnitt der Tangente t gebildet wird.



Neigungswinkel α der Tangente t gegen die x-Achse bestimmen:

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α, welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.

$\tan\alpha = h'(-2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(4)$

Nebenwinkel zu α: $\quad \beta = 180^\circ - \tan^{-1}(4)$

Winkel an Ursprung: $\quad \gamma = 45^\circ$

$\Rightarrow \quad \varphi = 180^\circ - \left(45^\circ + 180^\circ - \tan^{-1}(4)\right) \approx 30,96^\circ$

$\Rightarrow$ Winkel Blattspitze: $2\varphi \approx 61,93^\circ$

Alternative Lösung

Richtungsvektor der Tangente t: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor der Winkelhalbierenden w: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren, Skalarprodukt*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1+4}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \approx 30{,}96°$

$\Rightarrow \quad$ Winkel Blattspitze: $2\varphi \approx 61{,}93°$

Teilaufgabe Teil B 3c (3 BE)

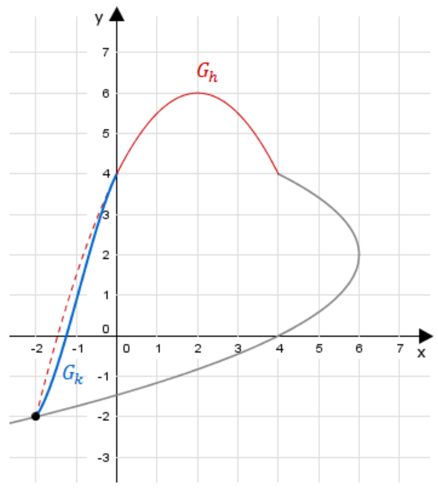
Der Verlauf des oberen Blattrands wird in der Nähe der Blattspitze durch das bisher verwendete Modell nicht genau genug dargestellt. Daher soll der obere Blattrand im Modell für $-2 \leq x \leq 0$ nicht mehr durch G_h, sondern durch den Graphen G_k einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion k dritten Grades beschrieben werden. Für die Funktion k werden die folgenden Bedingungen gewählt (k' und h' sind die Ableitungsfunktionen von k bzw. h):

I $\quad k(0) = h(0)$
II $\quad k'(0) = h'(0)$
III $\quad k(-2) = h(-2)$
IV $\quad k'(-2) = 1{,}5$

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass die Wahl der Bedingungen I, II und III sinnvoll ist. Machen Sie plausibel, dass die Bedingung IV dazu führt, dass die Form des Blatts in der Nähe der Blattspitze im Vergleich zum ursprünglichen Modell genauer dargestellt wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Erläuterungen zum Entstehen der Funktionsgraphen



Erläuterung: *Funktionswert*

$k(0) = h(0)$ bedeutet, dass die Graphen G_k und G_h denselben Funktionswert an der Stelle $x = 0$ annehmen.

I: Ränder schneiden sich bei $x = 0$.

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

$k'(0) = h'(0)$ bedeutet, dass die Graphen G_k und G_h dieselbe Steigung an der Stelle $x = 0$ besitzen.

G_k geht an der Stelle $x = 0$ zu G_h über ohne „Knick“.

II: Kein „Knick“ bei $x = 0$.

Erläuterung: *Funktionswert*

$k(-2) = h(-2)$ bedeutet, dass die Graphen G_k und G_h denselben Funktionswert an der Stelle $x = -2$ annehmen.

III: Ränder schneiden sich bei $x = -2$.

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Die Steigung der Tangente an G_h im Punkt $(-2|h(-2))$ hat den Wert $m = 4$ (siehe Teil B Teilaufgabe 3b).

$k'(-2) = 1,5$ bedeutet, dass die Steigung der Tangente an G_k im Punkt $(-2|k(-2))$ kleiner ist als bei G_h.

IV: Blattränder schließen einen kleineren Winkel ein.