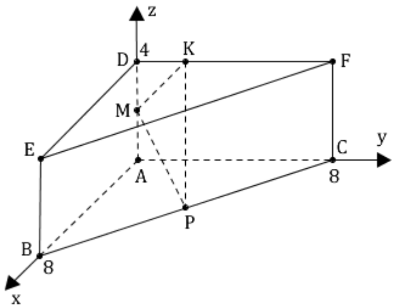
Abitur 2014 Mathematik Geometrie V

Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma $A\,B\,C\,D\,E\,F$ mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.



Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $[A\,D]$ bzw. $[B\,C]$.
Der Punkt K $(0|y_K|4)$ liegt auf der Kante $[D\,F]$. Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck $K\,M\,P$ in M rechtwinklig ist.

Gegeben ist die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 5$.

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kugel mit Mittelpunkt $Z(1|6|3)$ und Radius 7 die Ebene E schneidet.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$ das Dreieck $A\,B\,C$ fest, das in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A\,B\,C$.

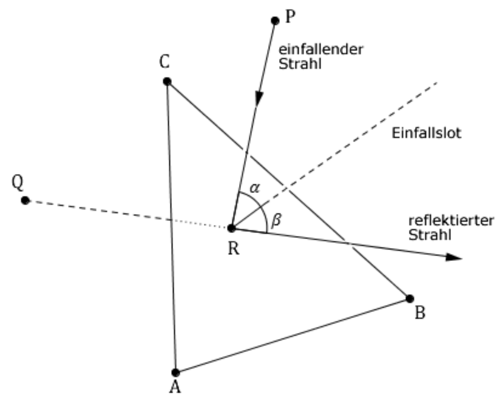
Das Dreieck $A\,B\,C$ stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2|2|3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht. Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

(*zur Kontrolle:* $R(1,5|1,5|1)$)

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0|0|1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

(*mögliches Teilergebnis:* $F: x_1 - x_2 = 0$)

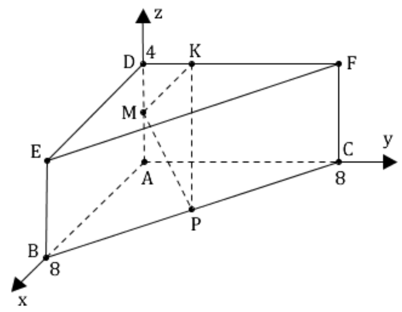
Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

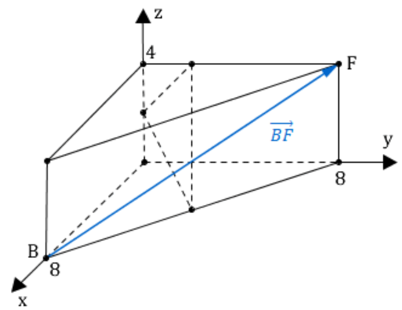
Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma $ABCDEF$ mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.



Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Länge eines Vektors



Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Koordinaten des Punktes F können direkt aus der Abbildung abgelesen werden.

$B(8|0|0)$, $F(0|8|4)$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

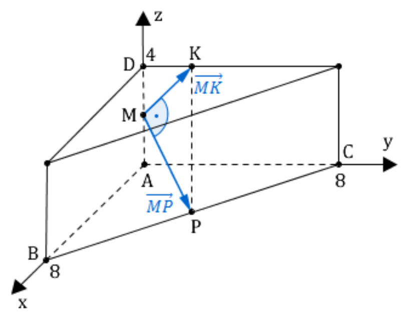
$$\overline{BF} = \left|\overrightarrow{BF}\right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 4^2} = 12$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $[AD]$ bzw. $[BC]$.
Der Punkt K $(0|y_K|4)$ liegt auf der Kante $[DF]$. Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Mittelpunkt einer Strecke



$A(0|0|0)$, $D(0|0|4)$
$B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\overrightarrow{A} + \overrightarrow{D}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad M(0|0|2)$

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{2} \cdot \left[\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad P(4|4|0)$

Skalarprodukt

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{K} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MK} \circ \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 4y_K - 4$$

Erläuterung: *Skalarprodukt, Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Wenn das Dreieck KMP in M rechtwinklig sein soll, dann müssen die Vektoren $\overrightarrow{MK}$ und $\overrightarrow{MP}$ senkrecht aufeinander stehen.

Es soll gelten: $\quad \overrightarrow{MK} \circ \overrightarrow{MP} = 0$

$4y_K - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad y_K = 1$

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Gegeben ist die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 5$.

Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Besondere Lage im Koordinatensystem

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

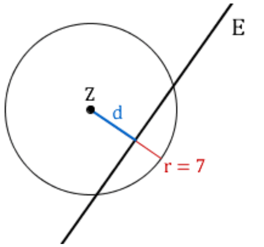
Die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse, da die x_1-Koordinate des Normalenvektors Null ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kugel mit Mittelpunkt $Z(1|6|3)$ und Radius 7 die Ebene E schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Abstand Punkt - Ebene



$Z(1|6|3)$

$E: 3x_2 + 4x_3 = 5$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad$ Normalenvektor der Ebene

Betrag des Normalenvektors bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 3^2 + 4^2} = 5$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{5}\,(3x_2 + 4x_3 - 5) = 0$$

Abstand bestimmen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$d = d(Z,E) = \left| \frac{1}{5}\,(3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 5) \right| = 5 < r \; (= 7)$$

Der Abstand des Mittelpunktes Z zur Ebene E ist kleiner als der Radius r der Kugel, also schneiden sich Kugel und Ebene.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$ das Dreieck ABC fest, das in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Flächeninhalt eines Dreiecks

$A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks, Vektorprodukt*

Der Flächeninhalt A eines beliebigen Dreiecks ABC ist gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Bemerkung:

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ stehen repräsentativ für zwei Vektoren aus dem Dreieck ABC, es müssen nicht immer diese verwendet werden.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-4) - (-4) \cdot 4 \\ -4 \cdot 0 - 4 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 16 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$A_{ABC} = 8 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 8\sqrt{3}$$

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Das Dreieck ABC stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2|2|3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht. Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

(*zur Kontrolle:* $R(1,5|1,5|1)$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Geradengleichung aufstellen

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Schnitt Ebene und Gerade

$E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$

Ebene E und Gerade g schneiden: $E \cap g$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade, Einsetzen*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt R, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

$$\begin{aligned} E \cap g: \quad (2-\lambda) + (2-\lambda) + (3-4\lambda) &= 4 \\ 7 - 6\lambda &= 4 \\ -6\lambda &= -3 \\ \lambda &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

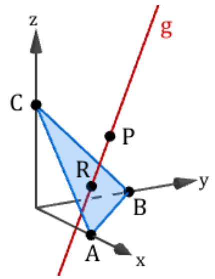
Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wird der gefundene λ-Wert in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R(1,5|1,5|1)$$

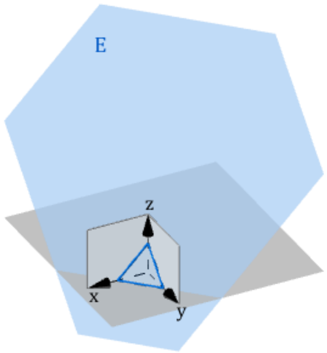
Begründung:

Erläuterung:

Die Eckpunkte A, B und C des Spiegels liegen jeweils auf einer positiven Koordinatenachse. Alle Punkte im Dreieck $A\,B\,C$ haben somit nur positive Koordinaten.



Alle Punkte der Ebene E mit nur positiven Koordinaten liegen ausschließlich im Dreieck $A\,B\,C$.

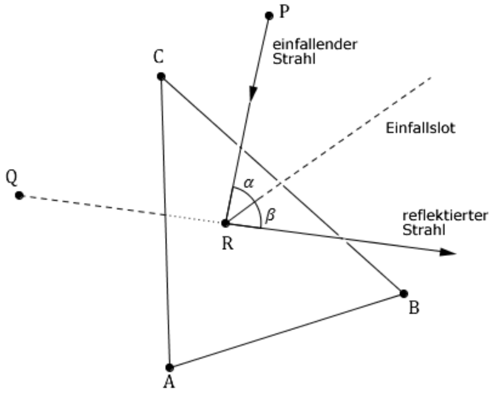


Da R nur positive Koordinaten hat und auf der Ebene E liegt, liegt er auch im Dreieck $A\,B\,C$.

Alle Koordinaten von R sind positiv.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0|0|1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Mittelpunkt einer Strecke

$P(2|2|3)$; $Q(0|0|1)$

Mittelpunkt M der Strecke $[PQ]$ bestimmen:

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

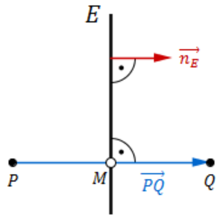
Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$M(1|1|2)$

Symmetrieebene



$$E: x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}}$$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist parallel zum Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E, also steht er senkrecht zur Ebene E.

Erläuterung: *Punktkoordinaten, Ebenengleichung*

Liegt ein Punkt P in einer Ebene E, so erfüllen seine Koordinaten die Ebenengleichung.

Beispiel:

$P(1|0|1)$; $E: x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$1 - 0 + 1 = 2$
$2 = 2$ (wahre Aussage)

Da zusätzlich M auf der Ebene E liegt $(1+1+2=4)$, sind P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

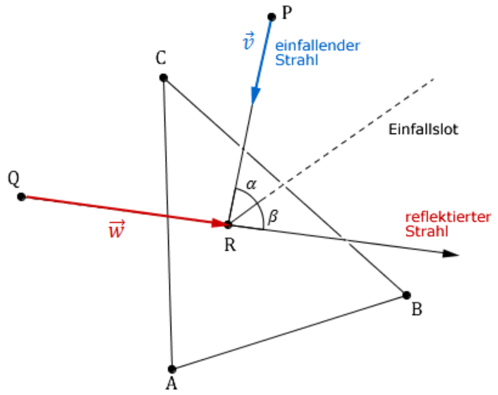
Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.

Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

(*mögliches Teilergebnis:* $F: x_1 - x_2 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Ebene aus zwei Geraden



Gegeben:

$P(2|2|3)$; $Q(0|0|1)$; $R(1,5|1,5|1)$

$E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$

Richtungsvektor des einfallenden Strahls: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (s. Teil B Teilaufgabe b)

Richtungsvektor des reflektierten Strahls:

$$\vec{w} = \overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ der Ebene F bestimmen:

> Erläuterung: *Vektorprodukt*
>
> Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.
>
> Für die komponentenweise Berechnung gilt:
>
> $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$
>
> In diesem Fall ist:
>
> $$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 - (-4) \cdot 1,5 \\ -4 \cdot 1,5 - (-1) \cdot 0 \\ -1 \cdot 1,5 - (-1) \cdot 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Vereinfachen*
>
> Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
> Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.
>
> Hier wird der Normalenvektor durch -6 geteilt.
>
> Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\overrightarrow{n_F} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$
>
> Hier (P ist Aufpunkt):

$$F : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P}}$$

$F : x_1 - x_2 = 2 - 2 + 0$

$F : x_1 - x_2 = 0$

Geradengleichung aufstellen

Geradengleichung des Einfallslots k:

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:
>
> $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$
>
> In diesem Fall ist der Richtungsvektor des Lotes gleich dem Normalenvektor der Ebene E, da dieser senkrecht auf der Ebene steht.

$$k : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{R}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}}$$

Lagebeziehung Gerade - Ebene

Ebene F und Gerade k schneiden: $F \cap k$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> t wird in E eingesetzt und die Gleichung wird nach λ aufgelöst.

$$\begin{aligned} F \cap k : \quad (1,5 + \lambda) - (1,5 + \lambda) &= 0 \\ 1,5 + \lambda - 1,5 - \lambda &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

> Erläuterung: *Lagebeziehung von Ebene und Gerade*
>
> Mögliche Lagen einer Gerade zu einer Ebene:
> enthalten, parallel, Schnitt (Schnittpunkt)
>
> Überprüfung: Ebene und Gerade scheiden.
>
> Möglichkeiten:
>
> Parameter bleibt stehen (z.B. $\lambda = 1$) $\Rightarrow$ **Schnittpunkt**
>
> Parameter fällt weg und die Aussage ist wahr (z.B. $0 = 0$)
> $\Rightarrow$ Gerade ist in der Ebene **enthalten**
>
> Parameter fällt weg und die Aussage ist falsch (z.B. $2 = 1$)
> $\Rightarrow$ Gerade liegt **parallel** zur Ebene

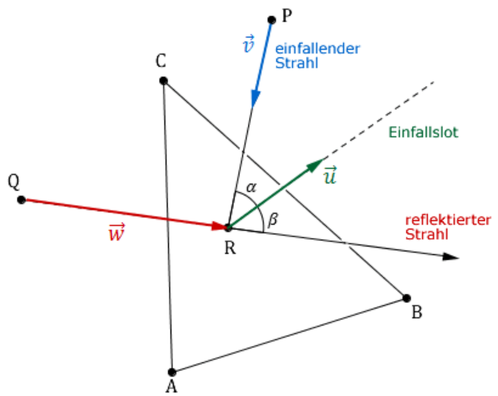
$\Rightarrow$ k ist in F enthalten ($k \subset F$)

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Winkel zwischen zwei Vektoren



Richtungsvektor des einfallenden Strahls: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (s. Teil B Teilaufgabe b)

Richtungsvektor des reflektierten Strahls: $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (s. Teil B Teilaufgabe d)

Richtungsvektor des Einfallslot $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s. Teil B Teilaufgabe d)

Winkel α und β bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{u}|} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{|\overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{w}| \cdot |\overrightarrow{u}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung:

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Hier:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{18}$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{(1,5)^2 + (1,5)^2 + 0} = \sqrt{4,5}$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{4,5} \cdot \sqrt{3}}$$

Erläuterung: *Umformung*

1) $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

3) $\sqrt{\dfrac{9}{2}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{4,5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Aus $\cos\alpha = \cos\beta$ folgt $\alpha = \beta$.