Abitur 2013 Mathematik Stochastik IV

In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. 12% der Wahlberechtigten sind Jungwähler, d. h. Personen im Alter von 18 bis 24 Jahren. Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. Der Umfrage zufolge haben sich 44% der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden. Jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

J: „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person ist Jungwähler."

K: „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person hat sich bereits für einen Kandidaten entschieden."

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Zeigen Sie, dass $P_J\left(\overline{K}\right) > P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)$ gilt.

Begründen Sie, dass es trotz der Gültigkeit dieser Ungleichung nicht sinnvoll ist, sich im Wahlkampf vorwiegend auf die Jungwähler zu konzentrieren.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Der Kandidat der Partei A spricht an einem Tag während seines Wahlkampfs 48 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau sechs Jungwähler befinden.

Der Umfrage zufolge hätte der Kandidat der Partei A etwa 50% aller Stimmen erhalten, wenn die Wahl zum Zeitpunkt der Befragung stattgefunden hätte. Ein Erfolg im ersten Wahlgang, für den mehr als 50% aller Stimmen erforderlich sind, ist demnach fraglich. Deshalb rät die von der Partei A eingesetzte Wahlkampfberaterin in der Endphase des Wahlkampfs zu einer zusätzlichen Kampagne. Der Schatzmeister der Partei A möchte die hohen Kosten, die mit einer zusätzlichen Kampagne verbunden wären, jedoch möglichst vermeiden.

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Um zu einer Entscheidung über die Durchführung einer zusätzlichen Kampagne zu gelangen, soll die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig höchstens 50% aller Stimmen erhalten." mithilfe einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die Wahl der Nullhypothese für den beschriebenen Test in Einklang mit dem Anliegen der Wahlkampfberaterin steht, einen Erfolg bereits im ersten Wahlgang zu erreichen.

Nach der Wahl darf die Partei A in einem Ausschuss drei Sitze besetzen. Von den acht Stadträtinnen und vier Stadträten der Partei A, die Interesse an einem Sitz in diesem Ausschuss äußern, werden drei Personen per Losentscheid als Ausschussmitglieder bestimmt.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der weiblichen Ausschussmitglieder der Partei A. Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X mit $P(X=0)=\frac{1}{55}$ und $P(X=3)=\frac{14}{55}$.

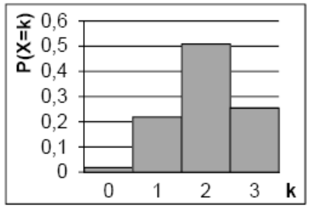


Abb. 1

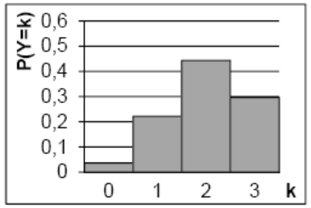


Abb. 2

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X=1)$ und $P(X=2)$.

(Ergebnis: $P(X=1)=\frac{12}{55}$, $P(X=2)=\frac{28}{55}$*)*

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

(Ergebnis: $E(X) = 2\,,\ Var(X) = \frac{6}{11}$*)*

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Abbildung 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 3$ und $p = \frac{2}{3}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass Y den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsgröße X, aber eine größere Varianz als X besitzt.
Erläutern Sie, woran man durch Vergleich der Abbildungen 1 und 2 erkennen kann, dass $\mathrm{Var}(Y) > \mathrm{Var}(X)$ gilt.

Lösung

Teilaufgabe 1a (4 BE)

In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. 12% der Wahlberechtigten sind Jungwähler, d. h. Personen im Alter von 18 bis 24 Jahren. Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. Der Umfrage zufolge haben sich 44% der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden. Jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

J: „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person ist Jungwähler.“

K: „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person hat sich bereits für einen Kandidaten entschieden.“

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Daten aus dem Text analysieren:

“ 12% der Wahlberechtigten sind Jungwähler“ $\quad\Rightarrow\quad P(J) = 0,12$

“ ...haben sich 44% der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden.“ $\quad\Rightarrow\quad P(K) = 0,44$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses gilt:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Somit gilt:

$P(\overline{J}) = 1 - 0,12 = 0,88 \qquad \text{und} \qquad P(\overline{K}) = 1 - 0,44 = 0,56$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Unter $P_{\overline{K}}(J)$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis J unter der Bedingung des Ereignisses $\overline{K}$.

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses J.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{K}}(J)$ ist also die Wahrscheinlichkeit für J, wenn man nur $\overline{K}$ betrachtet.

Die Bedingung lautet hier:
" ... die sich noch *nicht* für einen Kandidaten entschieden haben ..." .

„Jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler." $\Rightarrow$ $P_{\overline{K}}(J) = \dfrac{1}{7}$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_{\overline{K}}(J) = \frac{P(\overline{K} \cap J)}{P(\overline{K})}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{P(\overline{K} \cap J)}{0,56}$$

$$P(\overline{K} \cap J) = \frac{1}{7} \cdot 0,56 = 0,08$$

Vierfeldertafel erstellen:

	J	$\overline{J}$	
K			0,44
$\overline{K}$	0,08		0,56
	0,12	0,88	1

Vierfeldertafel vervollständigen:

	J	$\overline{J}$	
K	0,04	0,40	0,44
$\overline{K}$	0,08	0,48	0,56
	0,12	0,88	1

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Zeigen Sie, dass $P_J\left(\overline{K}\right) > P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)$ gilt.

Begründen Sie, dass es trotz der Gültigkeit dieser Ungleichung nicht sinnvoll ist, sich im Wahlkampf vorwiegend auf die Jungwähler zu konzentrieren.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Vierfeldertafel aus Teilaufgabe 1a:

	J	$\overline{J}$	
K	0,04	0,40	0,44
$\overline{K}$	0,08	0,48	0,56
	0,12	0,88	1

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_J(\overline{K}) = \dfrac{P(J \cap \overline{K})}{P(J)} = \dfrac{0,08}{0,12} \approx 0,67$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_{\overline{J}}(\overline{K}) = \dfrac{P(\overline{J} \cap \overline{K})}{P(\overline{J})} = \dfrac{0,48}{0,88} \approx 0,55$

Somit gilt: $\underbrace{P_J(\overline{K})}_{0,67} > \underbrace{P_{\overline{J}}(\overline{K})}_{0,55}$

Erläuterung:

Die Ungleichung besagt, dass die Wahrscheinlichkeit einen Wahlberechtigen, der sich vor der Wahl noch nicht für einen Kandidaten entschieden hat, unter den Jungwähler zu finden, größer ist als unter den nicht Jungwählern.

Das ist eine relative Betrachtung.

Die Anzahl der nicht Jungwählern ist deutlich größer als die der Jungwähler. Der Anteil an nicht Jungwählern, die sich noch für einen Kandidaten entschieden haben, ist somit größer als derjenige der Jungwähler.

Es ist nicht sinnvoll sich im Wahlkampf vorwiegend auf die Jungwähler zu konzentrieren, da unter den nicht Jungwähler, die Anzahl der Unentschlossenen wesentlich größer ist.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Der Kandidat der Partei A spricht an einem Tag während seines Wahlkampfs 48 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau sechs Jungwähler befinden.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Binomialverteilung

Ereignis A: „Genau 6 Jungwähler“

$p = P(J) = 0,12$ (s. Teilaufgabe 1a)

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,12$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 1 - 0,12 = 0,88$

In diesem Fall ist ein Jungwähler der Treffer.

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n	Anzahl der Züge („Länge“ der Bernoulli-Kette)	hier : $n = 48$

Bernoulli-Kette mit $n = 48$ und $p = 0,12$.

Erläuterung: *Ereignis*

Genau 6 Jungwähler $\Rightarrow$ $Z = 6$

$P(A) = P_{0,12}^{48}(Z = 6)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P(A) = \binom{48}{6} \cdot 0,12^6 \cdot 0,88^{42}$

$P(A) \approx 17,1\%$

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Der Umfrage zufolge hätte der Kandidat der Partei A etwa 50% aller Stimmen erhalten, wenn die Wahl zum Zeitpunkt der Befragung stattgefunden hätte. Ein Erfolg im ersten Wahlgang, für den mehr als 50% aller Stimmen erforderlich sind, ist demnach fraglich. Deshalb rät die von der Partei A eingesetzte Wahlkampfberaterin in der Endphase des Wahlkampfs zu einer zusätzlichen Kampagne. Der Schatzmeister der Partei A möchte die hohen Kosten, die mit einer zusätzlichen Kampagne verbunden wären, jedoch möglichst vermeiden.

Um zu einer Entscheidung über die Durchführung einer zusätzlichen Kampagne zu gelangen, soll die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig höchstens 50% aller Stimmen erhalten.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,5$

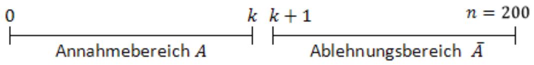
Stichprobenumgang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k + 1, 200]$

> Erläuterung: *Nullhypothese*
>
> Weil die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig **höchstens** 50% aller Stimmen erhalten.“ lautet, liegt der Annahmebereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Fehler 1.Art bestimmen:

> Erläuterung: *Fehler 1.Art*
>
> Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn, die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.
>
> Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \geq k + 1$).
>
> $\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,5}^{200}(Z \geq k + 1) \leq 0,05$

$P_{0,5}^{200}(Z \geq k + 1) \leq 0,05$

> Erläuterung: *Gegenereignis*
>
> Betrachtung des Gegenereignisses:
>
> P(mindestens k+1 Treffer) = 1 - P(höchstens k Treffer)
>
> In mathematischen Zeichen:
>
> $P(Z \geq k + 1) = 1 - P(Z \leq k)$

$1 - P_{0,5}^{200}(Z \leq k) \leq 0,05 \quad | \quad -1$

$-P_{0,5}^{200}(Z \leq k) \leq -0,95 \quad | \quad \cdot(-1)$

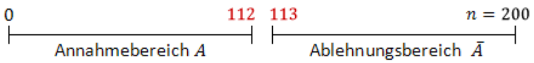
(da die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$P_{0,5}^{200}(Z \leq k) \geq 0,95$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k = 112$

$\Rightarrow$ ab $Z = 113$ wird die Nullhypothese agbgelehnt

Entscheidungsregel:



Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{113, 114, \ldots, 200\}$

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die Wahl der Nullhypothese für den beschriebenen Test in Einklang mit dem Anliegen der Wahlkampfberaterin steht, einen Erfolg bereits im ersten Wahlgang zu erreichen.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Hypothesentest - Entscheidungsregel

Das Risiko, irrtümlich auf eine zusätzliche Kampagne zu verzichten, beträgt höchstens 5% und ist damit - im Einklang mit dem Anliegen der Wahlkampfberaterin - gering.

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Nach der Wahl darf die Partei A in einem Ausschuss drei Sitze besetzen. Von den acht Stadträtinnen und vier Stadträten der Partei A, die Interesse an einem Sitz in diesem Ausschuss äußern, werden drei Personen per Losentscheid als Ausschussmitglieder bestimmt.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der weiblichen Ausschussmitglieder der Partei A. Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X mit $P(X = 0) = \frac{1}{55}$ und $P(X = 3) = \frac{14}{55}$.

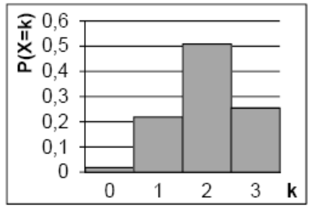


Abb. 1

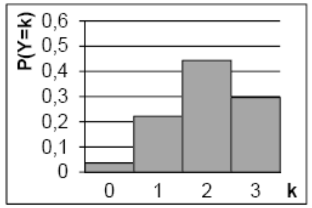


Abb. 2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ und $P(X = 2)$.

(Ergebnis: $P(X = 1) = \frac{12}{55}$, $P(X = 2) = \frac{28}{55}$*)*

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

8 weibliche (w) und 4 männliche (m) Stadträte.

3 von 12 werden ausgewählt.

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um 3-maliges Ziehen ohne Reihenfolge (wer wann ausgewählt wird, ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (eine Person kann nur einmal ausgewählt werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

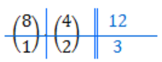
$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \;\cdot\; \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

1 weiblicher Stadtrat (aus 8) wird ausgewählt:
$\Rightarrow |\text{ Treffer}| = \binom{8}{1}$

2 männliche Stadträte (aus 4) werden ausgewählt:
$\Rightarrow |\text{ Niete}| = \binom{4}{2}$

3 Personen werden aus 12 ausgewählt:
$\Rightarrow |\Omega| = \binom{12}{3}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



$$P(X=1) = \frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{55}$$

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um 3-maliges Ziehen ohne Reihenfolge (wer wann ausgewählt wird, ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (eine Person kann nur einmal ausgewählt werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

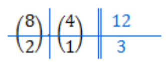
$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \;\cdot\; \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

2 weibliche Stadträte (aus 8) werden ausgewählt:
$\Rightarrow |\text{ Treffer}| = \binom{8}{2}$

1 männlicher Stadtrat (aus 4) wird ausgewählt:
$\Rightarrow |\text{ Niete}| = \binom{4}{1}$

3 Personen werden aus 12 ausgewählt:
$\Rightarrow |\Omega| = \binom{12}{3}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55}$$

Alternative Lösung

$$P(X=1) = \overbrace{\frac{8}{12}}^{\text{1 x w}} \cdot \overbrace{\frac{4}{11}}^{\text{1 x m}} \cdot \overbrace{\frac{3}{10}}^{\text{1 x m}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Durchschieben}} = \frac{12}{55}$$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

$P(X = 1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass 1 weiblicher Stadtrat gewählt wird. Die anderen zwei sind also männlich.

Bei der ersten Auswahl stehen 8 weibliche von insgesamt 12 Stadträte zu Verfügung:

$p(1 \text{ x w}) = \dfrac{8}{12}$

Ist bei der ersten Auswahl ein weiblicher Stadtrat gewählt worden, so bleiben für die zweite Auswahl 4 männliche von insgesamt 11 Stadträte zu Verfügung:

$p(1 \text{ x m}) = \dfrac{4}{11}$

Ist bei der zweiten Auswahl ein männlicher Stadtrat gewählt worden, so bleiben für die dritte Auswahl 3 männliche von insgesamt 10 Stadträte zu Verfügung:

$p(1 \text{ x m}) = \dfrac{3}{10}$

Die Reihenfolge der Auswahl ist nicht wichtig. Der weibliche Stadtrat kann an erster, zweiter oder an dritter Stelle gewählt werden. Also 3 verschiedene Möglichkeiten der Auswahl. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten müssen somit noch mit 3 multipliziert werden („Durchschieben“).

$$P(X = 2) = \overbrace{\frac{8}{12}}^{w} \cdot \overbrace{\frac{7}{11}}^{w} \cdot \overbrace{\frac{4}{10}}^{m} \cdot \underbrace{3}_{\text{Durchschieben}} = \frac{28}{55}$$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

$P(X = 2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 weibliche Stadträte gewählt werden. Der dritte ist also männlich.

Bei der ersten Auswahl stehen 8 weibliche von insgesamt 12 Stadträte zu Verfügung:

$p(1 \text{ x w}) = \dfrac{8}{12}$

Ist bei der ersten Auswahl ein weiblicher Stadtrat gewählt worden, so bleiben für die zweite Auswahl 7 weibliche von insgesamt 11 Stadträte zu Verfügung:

$p(1 \text{ x w}) = \dfrac{7}{11}$

Ist bei der zweiten Auswahl ein weiblicher Stadtrat gewählt worden, so bleiben für die dritte Auswahl 4 männliche von insgesamt 10 Stadträte zu Verfügung:

$p(1 \text{ x m}) = \dfrac{4}{10}$

Die Reihenfolge der Auswahl ist nicht wichtig. Der männliche Stadtrat kann an erster, zweiter oder an dritter Stelle gewählt werden. Also 3 verschiedene Möglichkeiten der Auswahl. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten müssen somit noch mit 3 multipliziert werden („Durchschieben“).

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

(Ergebnis: $E(X) = 2\,,\ Var(X) = \dfrac{6}{11}$*)*

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Mit den Angaben aus Teilaufgabe 3a kann folgende Tabelle erstellt werden:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 4) ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\,(X = x_i)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{55} + 1 \cdot \frac{12}{55} + 2 \cdot \frac{28}{55} + 3 \cdot \frac{14}{55} = 2$$

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Die Varianz einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 4) ist definiert als:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

Kann auch berechnet werden durch:

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$$Var(X) = (0-2)^2 \cdot \frac{1}{55} + (1-2)^2 \cdot \frac{12}{55} + (2-2)^2 \cdot \frac{28}{55} + (3-2)^2 \cdot \frac{14}{55}$$

$$Var(X) = \frac{6}{11}$$

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Abbildung 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 3$ und $p = \frac{2}{3}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass Y den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsgröße X, aber eine größere Varianz als X besitzt. Erläutern Sie, woran man durch Vergleich der Abbildungen 1 und 2 erkennen kann, dass

$\mathrm{Var}(Y) > \mathrm{Var}(X)$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$n = 3;\ p = \frac{2}{3}$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p$

$$\mu = n \cdot p = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

Varianz einer Zufallsgröße

$$Var(Y) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Varianz von X: $Var(X) = n \cdot p \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}$

Vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Werte (0,1 und 3) der Zufallsgrößen X und Y miteinander, so stellt man fest:

- Für $k = 1$ sind die Wahrscheinlichkeiten in etwa gleich.

- Für $k = 0$ und $k = 3$ sind die Wahrscheinlichkeiten bei der Zufallsgröße Y größer als bei X.

Da der Erwartungswert (2) für beide Zufallsgrößen gleich ist, und die restlichen Wahrscheinlichkeiten bei der Zufallsgröße Y größer sind, gilt:

$$Var(Y) > Var(X)$$