Abitur 2013 Mathematik Stochastik III

Folgende Tabelle gibt die Verteilung der Blutgruppen und der Rhesusfaktoren innerhalb der Bevölkerung Deutschlands wieder:

	0	A	B	AB
Rh+	35 %	37 %	9 %	4 %
Rh-	6 %	6 %	2 %	1 %

In einem Krankenhaus spenden an einem Vormittag 25 Personen Blut. Im Folgenden soll angenommen werden, dass diese 25 Personen eine zufällige Auswahl aus der Bevölkerung darstellen.

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zehn der Spender die Blutgruppe A haben.

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte der Spender die Blutgruppe 0 und den Rhesusfaktor Rh+ besitzt.

Folgende Tabelle gibt für die verschiedenen Empfänger von Spenderblut an, welches Spenderblut für sie jeweils geeignet ist:

		Spender							
		0 Rh-	0 Rh+	A Rh-	A Rh+	B Rh-	B Rh+	AB Rh-	AB Rh+
Empfänger	AB Rh+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	AB Rh-	✓		✓		✓		✓	
	B Rh+	✓	✓			✓	✓		
	B Rh-	✓				✓			
	A Rh+	✓	✓	✓	✓				
	A Rh-	✓		✓					
	0 Rh+	✓	✓						
	0 Rh-	✓							

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Für einen Patienten mit der Blutgruppe B und dem Rhesusfaktor Rh- wird Spenderblut benötigt. Bestimmen Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen mindestens Blut spenden müssten, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine für diesen Patienten geeignete Blutspende erhält.

Bei $0,074\%$ der neugeborenen Kinder liegt eine bestimmte Stoffwechselstörung vor. Wird diese Störung frühzeitig erkannt, lässt sich durch eine geeignete Behandlung eine spätere Erkrankung vermeiden. Zur Früherkennung kann zunächst ein einfacher Test durchgeführt werden. Zeigt das Ergebnis des Tests die Stoffwechselstörung an, so bezeichnet man es als positiv.

Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,5\%$ positiv. Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung nicht vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, $0,78\%$.

Bei einem zufällig ausgewählten neugeborenen Kind wird der Test durchgeführt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Stoffwechselstörung liegt vor.“

T: „Das Testergebnis ist positiv.“

Teilaufgabe 2a (2 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{S \cup T}$ im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 2b (8 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(T)$ und $P_T(S)$. Interpretieren Sie das Ergebnis für $P_T(S)$ im Sachzusammenhang.

(zur Kontrolle: $P(T) \approx 0,85\%$, $P_T(S) < 0,1$)

Teilaufgabe 2c (3 BE)

Im Rahmen eines Screenings wird eine sehr große Anzahl zufällig ausgewählter neugeborener Kinder getestet. Ermitteln Sie die pro Million getesteter Kinder im Mittel zu erwartende Anzahl derjenigen Kinder, bei denen die Stoffwechselstörung vorliegt und das Testergebnis negativ ist.

Um Geld für die Ausstattung des Spielbereichs in der Kinderstation des Krankenhauses einzunehmen, wird ein Gewinnspiel angeboten. Nachdem der Spieler zwei Euro bezahlt hat, werden aus einem Behälter, in dem sich drei rote, drei grüne und drei blaue Kugeln befinden, drei Kugeln ohne Zurücklegen zufällig entnommen. Haben die drei entnommenen Kugeln die gleiche Farbe, so gewinnt der Spieler und bekommt einen bestimmten Geldbetrag ausgezahlt; ansonsten verliert er und erhält keine Auszahlung. Anschließend werden die gezogenen Kugeln in den Behälter zurückgelegt.

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass bei einem Spiel die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $\frac{1}{28}$ beträgt.

Teilaufgabe 3b (4 BE)

Berechnen Sie, welcher Geldbetrag im Fall eines Gewinns ausgezahlt werden muss, damit im Mittel eine Einnahme von 1,25 Euro pro Spiel für die Ausstattung des Spielbereichs erwartet werden kann.

Lösung

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Folgende Tabelle gibt die Verteilung der Blutgruppen und der Rhesusfaktoren innerhalb der Bevölkerung Deutschlands wieder:

	0	A	B	AB
Rh+	35 %	37 %	9 %	4 %
Rh-	6 %	6 %	2 %	1 %

In einem Krankenhaus spenden an einem Vormittag 25 Personen Blut. Im Folgenden soll angenommen werden, dass diese 25 Personen eine zufällige Auswahl aus der Bevölkerung darstellen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zehn der Spender die Blutgruppe A haben.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Binomialverteilung

Ereignis A: „Genau 10 Spender haben Blutgruppe A“

$p(\text{„Blutgruppe A“ }) = 37\% + 6\% = 43\% = 0,43$

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,43$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 1 - 0,43 = 0,57$

In diesem Fall ist die Blutgruppe A der Treffer.

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n Anzahl der Züge („Länge" der Bernoulli-Kette) hier : $n = 25$

Bernoulli-Kette mit $n = 25$ und $p = 0,43$.

Erläuterung: *Ereignis*

Genau 10 Spender $\Rightarrow$ $Z = 10$

$P(A) = P_{0,43}^{25}(Z = 10)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P(A) = \binom{25}{10} \cdot 0,43^{10} \cdot 0,57^{15}$$

$P(A) \approx 15,4\%$

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte der Spender die Blutgruppe 0 und den Rhesusfaktor Rh+ besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Binomialverteilung

Ereignis B: „Mehr als die Hälfte der Spender haben Blutgruppe 0 und Rhesusfaktor Rh+"

p(„Blutgruppe 0 $\cap$ Rhesusfaktor Rh+") $= 35\% = 0,35$ (s. Tabelle in Teilaufgabe 1a)

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,35$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 1 - 0,35 = 0,65$

In diesem Fall ist Blutgruppe 0 mit Rhesusfaktor Rh+ der Treffer.

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n Anzahl der Züge („Länge" der Bernoulli-Kette) hier : $n = 25$

Bernoulli-Kette mit $n = 25$ und $p = 0,35$.

Erläuterung: *Ereignis*

Mehr als die Hälfte der Spender $\Rightarrow$ $Z \geq 13$

$P(B) = P_{0,35}^{25}(Z \geq 13)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(höchstens k-1 Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

Angewendet auf diese Aufgabenstellung:

$P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12)$

$P(B) = 1 - P_{0,35}^{25}(Z \leq 12)$

$P(B) = 1 - 0,93956$ (Tafelwerk)

$P(B) \approx 6,0\%$

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Folgende Tabelle gibt für die verschiedenen Empfänger von Spenderblut an, welches Spenderblut für sie jeweils geeignet ist:

		Spender							
		0 Rh-	0 Rh+	A Rh-	A Rh+	B Rh-	B Rh+	AB Rh-	AB Rh+
Empfänger	AB Rh+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	AB Rh-	✓		✓		✓		✓	
	B Rh+	✓	✓			✓	✓		
	B Rh-	✓				✓			
	A Rh+	✓	✓	✓	✓				
	A Rh-	✓		✓					
	0 Rh+	✓	✓						
	0 Rh-	✓							

Für einen Patienten mit der Blutgruppe B und dem Rhesusfaktor Rh- wird Spenderblut benötigt. Bestimmen Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen mindestens Blut spenden müssten, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine für diesen Patienten geeignete Blutspende erhält.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Binomialverteilung

Text analysieren:

" ...mit einer Wahrscheinlichkeit von **mehr als** 95% ..." $\Rightarrow$ $P > 0,95$

" ... **mindestens eine** geeignete Blutspende..." $\Rightarrow$ $Z \geq 1$

Erläuterung:

Aus der Spender/Empfänger-Tabelle entnimmt man, dass sich für ein Empfänger mit Blutgruppe B und dem Rhesusfaktor Rh- Blutspenden des Typs 0 Rh- und B Rh- eignen.

Aus der Tabelle in Teilaufgabe 1a entnimmt man, dass:

p(0 Rh-) = 6%

p(B Rh-) = 2%

" ... Patienten mit der Blutgruppe B und dem Rhesusfaktor Rh- "
$\Rightarrow$ $p = 6\% + 2\% = 8\% = 0,08$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,08$ angesehen werden.

$P_{0,08}^{n}(Z \geq 1) > 0,95$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_{0{,}08}^{n}(Z = 0) > 0{,}95$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0{,}92^n > 0{,}95$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0{,}92^n > 0{,}95 \quad | \quad \text{umstellen}$

$0{,}92^n < 1 - 0{,}95 \quad | \quad \text{logarithmieren}$

$\ln\,(0{,}92^n) < \ln(1 - 0{,}95)$

$n \cdot \ln 0{,}92 < \ln(1 - 0{,}95)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln(1 - 0{,}95)}{\ln 0{,}92}$

$n > \dfrac{\ln(1 - 0{,}95)}{\ln 0{,}92} \approx 35{,}93$

$n \geq 36$

Es müssen mindestens 36 zufällig ausgewählte Personen Blut spenden.

Teilaufgabe 2a (2 BE)

Bei $0{,}074\%$ der neugeborenen Kinder liegt eine bestimmte Stoffwechselstörung vor. Wird diese Störung frühzeitig erkannt, lässt sich durch eine geeignete Behandlung eine spätere Erkrankung vermeiden. Zur Früherkennung kann zunächst ein einfacher Test durchgeführt werden. Zeigt das Ergebnis des Tests die Stoffwechselstörung an, so bezeichnet man es als positiv.

Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von $99{,}5\%$ positiv. Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung nicht vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, $0{,}78\%$.

Bei einem zufällig ausgewählten neugeborenen Kind wird der Test durchgeführt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Stoffwechselstörung liegt vor.“

T: „Das Testergebnis ist positiv.“

Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{S \cup T}$ im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Ereignis beschreiben

$\overline{S \cup T}$: „Die Stoffwechselstörung liegt **nicht** vor **und** das Testergebnis ist **negativ**“

Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse, Komplementbeziehung*

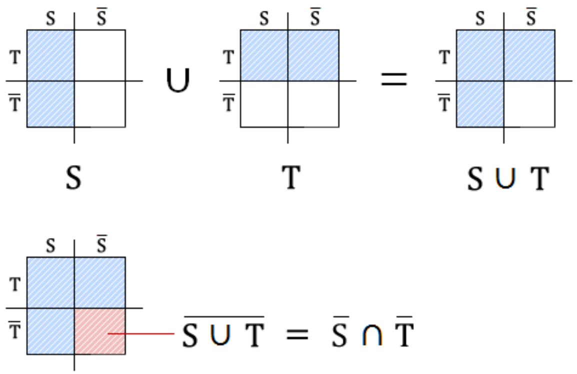
Bei der Vereinigung von zwei Ereignissen tritt entweder das eine **oder** das andere Ereignis ein.

Bei dem Durchschnitt von zwei Ereignissen tritt das eine **und** das andere Ereignis gleichzeitig ein.

$S \cup T$: „entweder S oder T treten ein“

Aus dem Mengendiagramm erkennt man: das Komplement zu $S \cup T$ ist gleich dem Durchschnitt von $\overline{S}$ und $\overline{T}$.

$\overline{S \cup T} = \overline{S} \cap \overline{T}$



Teilaufgabe 2b (8 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(T)$ und $P_T(S)$. Interpretieren Sie das Ergebnis für $P_T(S)$ im Sachzusammenhang.

(zur Kontrolle: $P(T) \approx 0,85\%$, $P_T(S) < 0,1$)

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

S: „Die Stoffwechselstörung liegt vor.“
T: „Das Testergebnis ist positiv.“

Aus der Einleitung zu Teilaufgabe 2a:

Erläuterung: *Ereignis*

„Bei $0,074\%$ der neugeborenen Kinder liegt eine bestimmte Stoffwechselstörung vor.“

$P(S) = 0,074\% = 0,00074$
$\Rightarrow P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0,99926$

Erläuterung: *Ereignis, Bedingte Wahrscheinlichkeit*

„Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,5\%$ positiv.“

Die Bedingung ist hier, dass eine Stoffwechselstörung vorliegt.

$P_S(T) = 99,5\% = 0,995$
$\Rightarrow P_S(\overline{T}) = 1 - P_S(T) = 0,005$

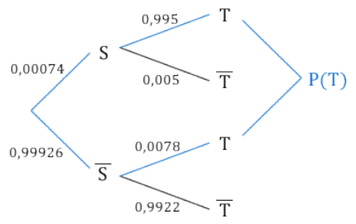
Erläuterung: *Ereignis, Bedingte Wahrscheinlichkeit*

„Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung nicht vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, $0,78\%$.“

Die Bedingung ist hier, dass eine Stoffwechselstörung nicht vorliegt.

$P_{\overline{S}}(T) = 0,78\% = 0,0078$
$P_{\overline{S}}(\overline{T}) = 1 - P_{\overline{S}}(T) = 0,9922$

Veranschaulichung durch ein Baumdiagramm:



Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

$$P(T) = P(S) \cdot P_S(T) + P(\overline{S}) \cdot P_{\overline{S}}(T)$$

$P(T) = 0,00074 \cdot 0,995 + 0,99926 \cdot 0,0078$

$P(T) \approx 0,00853 \qquad (\approx 0,85\%)$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)}$$

$$P_T(S) = \frac{0,00074 \cdot 0,995}{0,00074 \cdot 0,995 + 0,99926 \cdot 0,0078} \approx 0,0863$$

Interpretation:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei positiv ausgefallenem Test eine Stoffwechselstörung vorliegt, liegt bei ca. $8,6\%$.

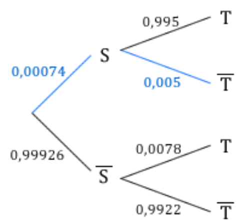
Teilaufgabe 2c (3 BE)

Im Rahmen eines Screenings wird eine sehr große Anzahl zufällig ausgewählter neugeborener Kinder getestet. Ermitteln Sie die pro Million getesteter Kinder im Mittel zu erwartende Anzahl derjenigen Kinder, bei denen die Stoffwechselstörung vorliegt und das Testergebnis negativ ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

S: „Die Stoffwechselstörung liegt vor."
T: „Das Testergebnis ist positiv."



Aus dem Baumdiagramm (Teilaufgabe 2a) entnimmt man:

$P(S \cap \overline{T}) = P(S) \cdot P_S(\overline{T}) = 0,00074 \cdot 0,005$

Im Mittel zu erwartende Anzahl:

$1\,000\,000 \cdot 0,00074 \cdot 0,005 = 3,7$

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Um Geld für die Ausstattung des Spielbereichs in der Kinderstation des Krankenhauses einzunehmen, wird ein Gewinnspiel angeboten. Nachdem der Spieler zwei Euro bezahlt hat, werden aus einem Behälter, in dem sich drei rote, drei grüne und drei blaue Kugeln befinden, drei Kugeln ohne Zurücklegen zufällig entnommen. Haben die drei entnommenen Kugeln die gleiche Farbe, so gewinnt der Spieler und bekommt einen bestimmten Geldbetrag ausgezahlt; ansonsten verliert er und erhält keine Auszahlung. Anschließend werden die gezogenen Kugeln in den Behälter zurückgelegt.

Zeigen Sie, dass bei einem Spiel die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $\frac{1}{28}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

9 Kugeln: 3 rot, 3 grün, 3 blau

Erläuterung:

3 Kugeln der gleichen Farbe bedeutet: entweder 3 rote oder 3 grüne oder 3 blaue.

Die Wahrscheinlichkeit 3 rote Kugeln zu ziehen, beträgt:

$P(\text{„3 rote Kugeln"}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$

Erläuterung:

Bei erstem Zug liegen 3 rote von insgesamt 9 Kugeln vor. Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen, beträgt somit $\frac{3}{9}$. Da die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird, bleiben 2 rote von insgesamt 8 Kugeln übrig. Die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, beträgt somit $\frac{2}{8}$. Beim dritten Zug beträgt die Wahrscheinlichkeit dann $\frac{1}{7}$.

Die Wahrscheinlichkeit 3 grüne Kugeln zu ziehen, ist genau so groß. Gleiches gilt für die Wahrscheinlichkeit 3 blau Kugeln zu ziehen. Deswegen gilt:

$P(\text{„3 gleichfarbige Kugeln"}) = 3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$

$P(\text{„3 gleichfarbige Kugeln"}) = 3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

Teilaufgabe 3b (4 BE)

Berechnen Sie, welcher Geldbetrag im Fall eines Gewinns ausgezahlt werden muss, damit im Mittel eine Einnahme von 1,25 Euro pro Spiel für die Ausstattung des Spielbereichs erwartet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Aus dem Aufgabentext von Teilaufgabe 3a entnimmt man:

Erläuterung:

Gewinnt eine Spieler, so erhält er einen Betrag a ausgezahlt. Sonst geht er leer aus.

Dieser Betrag a ist gesucht.

Auszahlung a_i	a	0
Gewinn g_i	$2-a$	2
$P(G=g_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{27}{28}$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 2) ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\,(X = x_i)$$

In dieser Aufgabe ist der Gewinn G die Zufallsgröße.

$E(G) = (2-a) \cdot \frac{1}{28} + 2 \cdot \frac{27}{28}$

Erläuterung:

Die Einnahmen pro Spiel sollen im Mittel 1,25 € betragen.

$\Rightarrow \quad E(G) = 1,25$

$1,25 = \frac{2}{28} - \frac{a}{28} + \frac{54}{28} \qquad | \cdot 28$

$35 = 2 - a + 54$

$\Rightarrow \quad a = 21$

Es muss ein Betrag von 21€ ausbezahlt werden.