

Fachabitur 2013 Mathematik NT Stochastik S II

Eine Agentur vertreibt Tickets für Sportveranstaltungen (S), Konzerte (K), Musicals (M) und Eventreisen (E).

20% der Kunden bestellen Tickets für Sportveranstaltungen, 30% für Konzerte und 35% für Musicals.

Die Eintrittskarten können telefonisch (t) oder online (o) bestellt werden.

56% der Karten für Sportveranstaltungen, 9% der Tickets für Eventreisen und 35% der Muscalkarten werden online bestellt. Die telefonische Bestellung hat insgesamt einen Anteil von 51,2%. Die Entscheidungen für die Kartenart und die Bestellart werden als Zufallsexperiment betrachtet.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Ermitteln Sie mithilfe eines vollständig ausgefüllten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

[Teilergebnis: $P(\{K o\}) = 0,24$]

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Kunde bestellt online oder eine Eventreise telefonisch.“

E_2 : „Ein Kunde bestellt online, aber weder Konzert- noch Muscalkarten.“

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

E_3 : „In einer Folge von 10 Ticketbestellungen sind die ersten beiden und insgesamt 4 Konzertkartenbestellungen online.“

Für eine Bestellung fallen Zusatzkosten (Vorverkaufsgebühr und Porto/Versand) in € gemäß folgender Tabelle an:

Vorverkaufsgebühr	5	4	3	2	3	2	2
Porto/Versand	2	2	2	2	0	1	0
Kundenanteil in %	5	20	25	10	15	5	20

Die Zufallsgröße X gibt die Zusatzkosten einer zufällig herausgegriffenen Bestellung an.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform an und stellen Sie sie in Form eines Histogramms graphisch dar.

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3,50€ aber höchstens 6,00€ an Zusatzkosten anfallen.

Teilaufgabe 2.3 (7 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen, und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sinn der vorliegenden Thematik.

Schraffieren Sie im Histogramm aus Teilaufgabe 2.1 die Fläche, die zur oben berechneten Wahrscheinlichkeit gehört.

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Die Ticketagentur hat viele Stammkunden, von denen 60% Karten für Musicals (M) und 75% Karten für Konzerte (K) bestellen, wobei 95% mindestens eines der beiden Angebote nutzen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{M \cap K}$ unter Verwendung einer Vierfeldertafel und beschreiben Sie dieses Ereignis in Worten.

Erfahrungsgemäß bestellt ein bestimmter Großkunde des Unternehmens zu 30% telefonisch.

Teilaufgabe 4.1 (2 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 200 Bestellungen mehr als 35% per Telefon erfolgen.

Teilaufgabe 4.2 (6 BE)

Ein Mitarbeiter vermutet, dass sich der Anteil der Online-Bestellungen von 70% erhöht hat (Gegenhypothese). Anhand von 100 Bestellungen soll die Vermutung überprüft werden. Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Welche Entscheidung liegt nahe, wenn 76 Bestellungen online getätigt werden?

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Eine Agentur vertreibt Tickets für Sportveranstaltungen (S), Konzerte (K), Musicals (M) und Eventreisen (E).

20% der Kunden bestellen Tickets für Sportveranstaltungen, 30% für Konzerte und 35% für Musicals.

Die Eintrittskarten können telefonisch (t) oder online (o) bestellt werden.

56% der Karten für Sportveranstaltungen, 9% der Tickets für Eventreisen und 35% der Musickarten werden online bestellt. Die telefonische Bestellung hat insgesamt einen Anteil von 51,2%. Die Entscheidungen für die Kartenart und die Bestellart werden als Zufallsexperiment betrachtet.

Ermitteln Sie mithilfe eines vollständig ausgefüllten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

[Teilergebnis: $P(\{K o\}) = 0,24$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

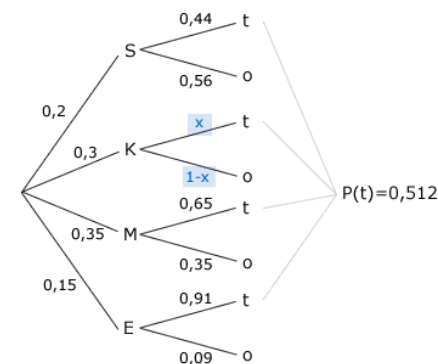
Gegeben:

$$P(S) = 20\% = 0,2 \quad ; \quad P(K) = 30\% = 0,3 \quad ; \quad P(M) = 35\% = 0,35$$

$$P(S - o) = 56\% = 0,56 \quad ; \quad P(E - o) = 9\% = 0,09 \quad ; \quad P(M - o) = 35\% = 0,35$$

$$P(t) = 51,2\% = 0,512$$

Baumdiagramm zeichnen:



x bestimmen:

Erläuterung: 2. Pfadregel, 1. Pfadregel

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

$$\text{In diesem Fall: } P(t) = P(\{S t\}) + P(\{K t\}) + P(\{M t\}) + P(\{E t\})$$

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Zum Beispiel hier:

$$P(\{S t\}) = 0,2 \cdot 0,44 = 0,088$$

$$0,512 = 0,2 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot x + 0,35 \cdot 0,65 + 0,15 \cdot 0,91$$

$$0,512 = 0,088 + 0,3 \cdot x + 0,2275 + 0,1365 \quad \Rightarrow \quad x = 0,2$$

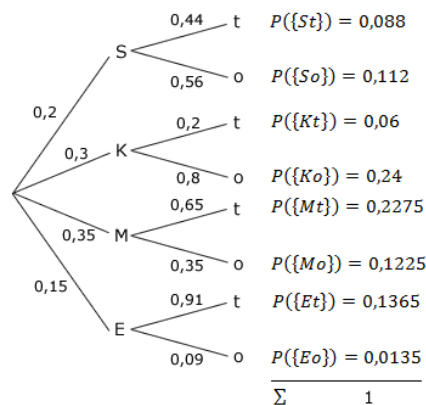
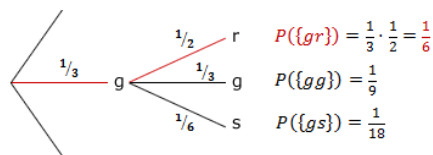
Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bestimmen:

Erläuterung: 1. Pfadregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel:

$$P(\{gr\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Kunde bestellt online oder eine Eventreise telefonisch.“

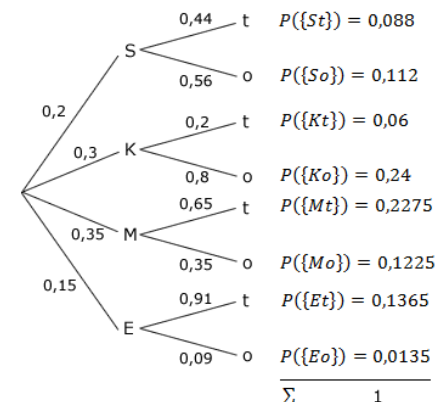
E_2 : „Ein Kunde bestellt online, aber weder Konzert- noch Musikkarten.“

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Stochastische Unabhängigkeit

Baumdiagramm aus vorheriger Teilaufgabe:



$$E_1 = \{So ; Ko ; Mo ; Eo ; Et\}$$

$$E_2 = \{So ; Eo\}$$

$$E_1 \cap E_2 = \{So , Eo\} = E_2$$

Erläuterung: 2. Pfadregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall:

$$P(E_1) = P(\{S o\}) + P(\{K o\}) + P(\{M o\}) + P(\{E o\}) + P(\{E t\})$$

$$P(E_2) = P(\{S o\}) + P(\{E o\})$$

$$P(E_1) = 0,112 + 0,24 + 0,1225 + 0,0135 + 0,1365 = 0,6245$$

$$P(E_2) = 0,112 + 0,0135 = 0,1255 = P(E_1 \cap E_2)$$

Erläuterung: Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

(s. Merkhilfe der Mathematik)

$$\underbrace{P(E_1)}_{0,6245} \cdot \underbrace{P(E_2)}_{0,1255} \neq \underbrace{P(E_1 \cap E_2)}_{0,1255} \Rightarrow E_1 \text{ und } E_2 \text{ sind stochastisch abhängig}$$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)

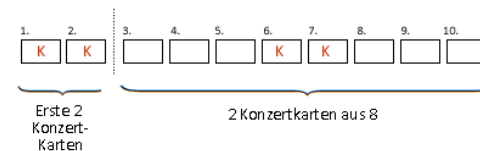
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

E_3 : „In einer Folge von 10 Ticketbestellungen sind die ersten beiden und insgesamt 4 Konzertkartenbestellungen online.“

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Binomialverteilung

$$p = P(\text{„Konzertkarte online“}) = P(\{Ko\}) = 0,24 \quad (\text{s. Teilaufgabe 1.1})$$



Erläuterung: Bernoulli-Kette

Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten zwei Tickets Konzertkarten sind, beträgt $0,24 \cdot 0,24 = 0,24^2$.

Damit es insgesamt 4 Konzertkarten gibt, fehlen noch weitere 2 aus 8 übrigen Ticketsbestellungen.

Dies kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 8$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,24$ angesehen werden.

$$P(E_4) = 0,24^2 \cdot P_{0,24}^8(T = 2)$$

Erläuterung: Bernoulli-Formel

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(T = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P(E_4) = 0,24^2 \cdot \binom{8}{2} \cdot 0,24^2 \cdot 0,76^6 \approx 0,0179$$

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Für eine Bestellung fallen Zusatzkosten (Vorverkaufsgebühr und Porto/Versand) in € ge-

mäß folgender Tabelle an:

Vorverkaufsgebühr	5	4	3	2	3	2	2
Porto/Versand	2	2	2	2	0	1	0
Kundenanteil in %	5	20	25	10	15	5	20

Die Zufallsgröße X gibt die Zusatzkosten einer zufällig herausgegriffenen Bestellung an.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform an und stellen Sie sie in Form eines Histogramms graphisch dar.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabellenform:

Erläuterung:

$$\text{Zusatzkosten} = \text{Vorverkaufsgebühr} + \text{Porto/Versand}$$

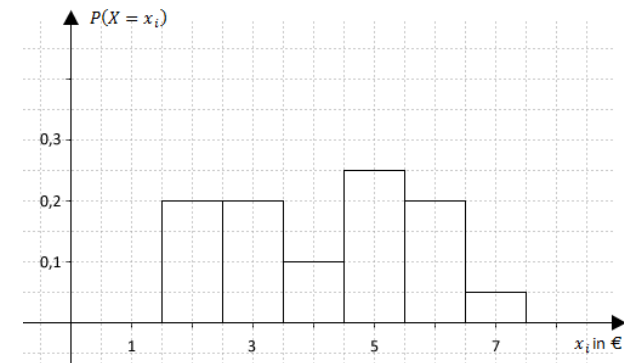
Vorverkaufsgebühr	5	4	3	2	3	2	2
Porto/Versand	2	2	2	2	0	1	0
Zusatzkosten x_i	7	6	5	4	3	3	2
Kundenanteil in %	5	20	25	10	15	5	20
$P(X = x_i)$	0,05	0,2	0,25	0,1	0,15	0,05	0,2

Die Wahrscheinlichkeit $P(X)$ entspricht dem prozentualen Kundenanteil.

Für $x_i = 3$ gilt: $P(X = 3) = 0,15 + 0,05 = 0,2$

x_i in €	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,1	0,25	0,2	0,05	1

Histogramm:



Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3,50 € aber höchstens 6,00 € an Zusatzkosten anfallen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe 2.1:

x_i in €	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,1	0,25	0,2	0,05	1

Erläuterung:

“mehr als 3,50 €“ $\iff 3,50 < X$

“höchstens 6,00 €“ $\iff X \leq 6$

Wenn die Kosten mehr als 3,50 € aber höchstens 6,00 € betragen sollen, dann sind Kosten in Höhe von 4, 5 oder 6 € möglich.

$$P(3,50 < X \leq 6) = \underbrace{P(X=4)}_{0,1} + \underbrace{P(X=5)}_{0,25} + \underbrace{P(X=6)}_{0,2} = 0,55$$

Teilaufgabe 2.3 (7 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen, und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sinn der vorliegenden Thematik.

Schraffieren Sie im Histogramm aus Teilaufgabe 2.1 die Fläche, die zur oben berechneten Wahrscheinlichkeit gehört.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe 2.1:

x_i in €	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,1	0,25	0,2	0,05	1

Erläuterung: Erwartungswert einer Zufallsgröße

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$\mu = E(X) = 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,05 = 4,2$$

Standardabweichung einer Zufallsgröße

Varianz bestimmen:

Erläuterung: Varianz einer Zufallsgröße

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an, so gilt für die Varianz dieser Zufallsgröße:

$$V \operatorname{ar}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \quad (\mu = E(X) = \text{Erwartungswert von } X)$$

$$V \operatorname{ar}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$\begin{aligned} V \operatorname{ar}(X) = & (2 - 4,2)^2 \cdot 0,2 + (3 - 4,2)^2 \cdot 0,2 \\ & + \\ & (4 - 4,2)^2 \cdot 0,1 + (5 - 4,2)^2 \cdot 0,25 \\ & + \\ & (6 - 4,2)^2 \cdot 0,2 + (7 - 4,2)^2 \cdot 0,05 \end{aligned}$$

$$V \operatorname{ar}(X) = 2,46$$

Alternative Berechnung der Varianz über die Verschiebungsregel:

$$E(X^2) = 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,25 + 6^2 \cdot 0,2 + 7^2 \cdot 0,05 = 20,1$$

$$V \operatorname{ar}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 20,1 - 4,2^2 = 2,46$$

Standardabweichung bestimmen: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{2,46} \approx 1,57$

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung:

„innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert“ = $|X - \mu| < \sigma$

Die Ungleichung $|X - \mu| < \sigma$ ist gleichbedeutend zu $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$.

$$P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

$$P(|X - 4,2| < 1,57) = P(2,63 < X < 5,77)$$

Erläuterung:

Die Zufallsgröße X gibt in diesem Fall die Anzahl der anfallenden Zusatzkosten an. Da diese nur aus ganze Zahlen bestehen, muss an dieser Stelle gerundet werden.

$$P(|X - 4,2| < 1,57) = P(3 \leq X \leq 5)$$

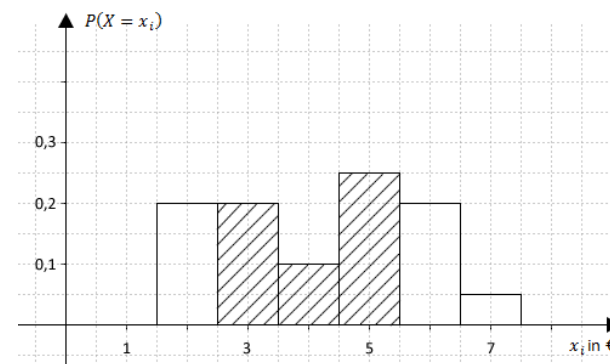
Erläuterung:

Wenn X zwischen 3 und 5 liegen soll, dann kann X entweder gleich 3 oder 4 oder 5 sein.

$$P(|X - 4,2| < 1,57) = \underbrace{P(X=3)}_{0,2} + \underbrace{P(X=4)}_{0,1} + \underbrace{P(X=5)}_{0,25} = 0,55$$

Interpretation: Im Schnitt betragen die Zusatzkosten pro Bestellung 4,20 €.

Schraffur:



Teilaufgabe 3. (5 BE)

Die Ticketagentur hat viele Stammkunden, von denen 60% Karten für Musicals (M) und 75% Karten für Konzerte (K) bestellen, wobei 95% mindestens eines der beiden Angebote nutzen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{M \cap K}$ unter Verwendung einer Vierfeldertafel und beschreiben Sie dieses Ereignis in Worten.

Lösung zu Teilaufgabe 3.

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Gegeben:

$$P(M) = 60\% = 0,6; \quad P(K) = 75\% = 0,75; \quad P(M \cup K) = 95\% = 0,95$$

Satz von Sylvester anwenden:

Erläuterung: *Satz von Sylvester*

Satz von Sylvester (s. auch Merkhilfe Mathematik):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(M \cup K) = P(M) + P(K) - P(M \cap K)$$

$$0,95 = 0,6 + 0,75 - P(M \cap K) \Rightarrow P(M \cap K) = 0,4$$

	M	$\overline{M}$	Σ
K	0,4		0,75
$\overline{K}$			
Σ	0,6		1

Tafel vervollständigen:

	M	$\overline{M}$	Σ
K	0,4	0,35	0,75
$\overline{K}$	0,2	0,05	0,25
Σ	0,6	0,4	1

Wahrscheinlichkeit

$$P(E_4) = P(\overline{M \cap K}) = 1 - P(M \cap K) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Ereignis in Worten:

Ein Stammkunde bestellt nicht gleichzeitig Karten für Konzert und Musical.

Teilaufgabe 4.1 (2 BE)

Erfahrungsgemäß bestellt ein bestimmter Großkunde des Unternehmens zu 30% telefonisch.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 200 Bestellungen mehr als 35% per Telefon erfolgen.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Binomialverteilung

Gegeben:

$$p = P(\text{„Telefonische Bestellung“}) = 30\% = 0,3$$

$$n = 200$$

$$35\% \text{ von } 200 = 70$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$$P(\text{„mehr als } k \text{ Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens } k \text{ Treffer“})$$

In mathematischen Zeichen:

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

$$P_{0,3}^{200}(T > 70) = 1 - P_{0,3}^{200}(T \leq 70)$$

$$P_{0,3}^{200}(T > 70) = 1 - 0,94579 = 0,05411 \quad (\text{s. Tafelwerk})$$

Teilaufgabe 4.2 (6 BE)

Ein Mitarbeiter vermutet, dass sich der Anteil der Online-Bestellungen von 70% erhöht hat (Gegenhypothese). Anhand von 100 Bestellungen soll die Vermutung überprüft werden.

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Welche Entscheidung liegt nahe, wenn 76 Bestellungen online getätigt werden?

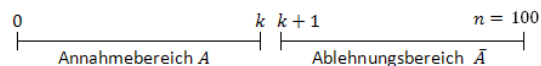
Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

 T : Anzahl der Online-Bestellungen von 100.Nullhypothese: $H_0 : p_0 \leq 0,7$ Gegenhypothese: $H_1 : p_1 > 0,7$ Stichprobenumfang: $n = 100$ Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$ Erläuterung: *Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese " $p_1 > 0,7$ " bzw. „Anteil der Online-Bestellungen **höher** als 70 %" lautet, liegt der Annahmebereich links und der Ablehnungsbereich rechts.

Annahmebereich von H_0 : $A = [0, k]$ Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = [k+1, 100]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1. Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($T \geq k+1$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,7}^{100}(T \geq k+1) \leq 0,05$

$$P_{0,7}^{100}(T \geq k+1) \leq 0,05$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$$P(\text{„mindestens } k+1 \text{ Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens } k \text{ Treffer“})$$

In mathematischen Zeichen:

$$P(X \geq k+1) = 1 - P(X \leq k)$$

$$1 - P_{0,7}^{100}(T \leq k) \leq 0,05$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$1 - P_{0,7}^{100}(T \leq k) \leq 0,05 \quad | -1$$

$$-P_{0,7}^{100}(T \leq k) \leq -0,95 \quad | \cdot (-1)$$

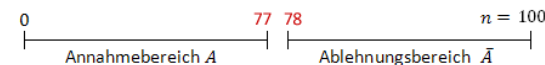
(Das Relationszeichen dreht sich, da mit einer negativen Zahl multipliziert wird.)

$$P_{0,7}^{100}(T \leq k) \geq 0,95$$

$$P_{0,7}^{100}(T \leq k) \geq 0,95$$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \geq 77$

Entscheidungsregel:

Max. Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{78, \dots, 100\}$ $76 \in A \Rightarrow H_0$ wird angenommen