Fachabitur 2013 Mathematik NT Stochastik S I

Beim Buchen eines Fluges kann man zwischen der Business- (B) und der Touristenklasse (T) wählen. Außerdem kann man angeben, ob man einen Fensterplatz (F), einen Platz am Gang (G) oder keinen besonderen Platz (K) wünscht.
Bei einem zufällig ausgewählten Flug wurde ermittelt, dass 90% der Fluggäste in der Touristenklasse fliegen. In der Businessklasse wird von 20% ein Fensterplatz gewünscht. Für Gangplätze in der Businessklasse gehen keine Wünsche ein. Die Passagiere der Touristenklasse wünschen sich zu 15% einen Fensterplatz und zu 10% einen Platz am Gang.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Stellen Sie die Buchung eines zufällig ausgewählten Kunden als Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

Beim Buchen kann man mit der Kreditkarte (C) oder per Überweisung ($\overline{C}$) zahlen. Bei 140 zufällig ausgewählten Buchungen wurde in 90% die Touristenklasse gebucht. 70% aller Buchungen wurden mit der Kreditkarte bezahlt. Zwei Buchungen der Businessklasse wurden durch Überweisung bezahlt. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.2.1 (6 BE)

Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Rechnen Sie mit exakten Werten.

E_1: „Ein Kunde bucht Touristenklasse oder zahlt nicht mit der Kreditkarte"

$E_2 = \overline{\overline{C} \cup B}$

Beschreiben Sie das Ereignis E_2 möglichst einfach in Worten.

Teilaufgabe 1.2.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Ereignisse B und C stochastisch abhängig sind und erklären Sie, was dies im Sachzusammenhang bedeutet.

In der Touristenklasse wird Gepäck bis maximal $20\,\text{kg}$ pro Fluggast kostenlos befördert. Für je 2 angefangene kg, die über $20\,\text{kg}$ hinausgehen, wird eine Gebühr von 12€ verlangt. Folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Gewichtsverteilung der Gepäckstücke in kg an:

Gewicht m	≤ 20	$20 < m \leq 22$	$22 < m \leq 24$	$24 < m \leq 26$	$26 < m \leq 28$
Wahrsch.	0,7	0,05	0,12	0,08	0,05

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die anfallenden Gepäckkosten pro Person an. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form und geeignet graphisch dar.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Untersuchen Sie, ob die Kosten für ein Gepäckstück mit $m = 24$ noch innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Bei einem bestimmten Flug sind 100 Plätze besetzt. Beim Essen können die Passagiere zwischen einem Fleischgericht und einem vegetarischen Gericht wählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 65% für das Fleischgericht.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3: „Es werden höchstens 40 vegetarische Gerichte gewählt."
E_4: „Es werden mindestens 30 vegetarische Gerichte gewählt."
$E_5 = E_3 \cap E_4$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Bestimmen Sie, wie viele Fleischgerichte mindestens mitgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% jeder der 100 Passagiere, der ein Fleischgericht wünscht, dieses bekommen kann.

Erfahrungsgemäß treten $12{,}5\%$ der Passagiere, die Tickets gekauft haben, den Flug nicht an. Damit die Flugzeuge möglichst voll besetzt sind, werden die Maschinen überbucht.

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Für einen Flug mit 183 Sitzplätzen werden 200 Tickets verkauft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht mehr Passagiere den Flug antreten als tatsächlich in der Maschine Platz finden.

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)

Man vermutet, dass inzwischen mehr als $12,5\%$ der Buchungen nicht wahrgenommen werden (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test an Hand von 200 Buchungen durchgeführt.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Erläutern Sie, wie man entscheiden wird, wenn 170 den Flug antreten.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Beim Buchen eines Fluges kann man zwischen der Business- (B) und der Touristenklasse (T) wählen. Außerdem kann man angeben, ob man einen Fensterplatz (F), einen Platz am Gang (G) oder keinen besonderen Platz (K) wünscht.
Bei einem zufällig ausgewählten Flug wurde ermittelt, dass 90% der Fluggäste in der Touristenklasse fliegen. In der Businessklasse wird von 20% ein Fensterplatz gewünscht. Für Gangplätze in der Businessklasse gehen keine Wünsche ein. Die Passagiere der Touristenklasse wünschen sich zu 15% einen Fensterplatz und zu 10% einen Platz am Gang.

Stellen Sie die Buchung eines zufällig ausgewählten Kunden als Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

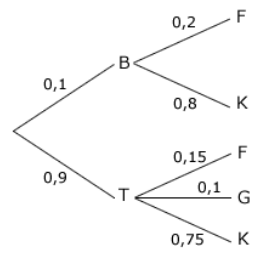
Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

Gegeben:

$P(T) = 90\% = 0,9; \quad P(B-F) = 20\% = 0,2; \quad P(T-F) = 15\% = 0,15; \quad P(T-G) = 10\% = 0,1$

Baumdiagramm zeichnen:



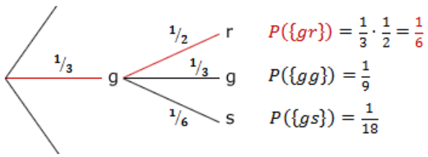
Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bestimmen:

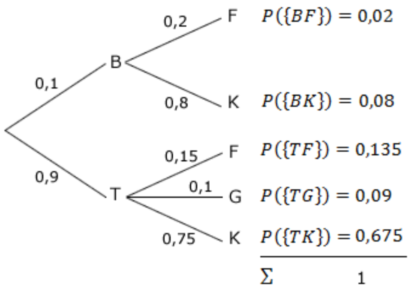
Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel:

$$P(\{g\,r\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$





Teilaufgabe 1.2.1 (6 BE)

Beim Buchen kann man mit der Kreditkarte (C) oder per Überweisung ($\overline{C}$) zahlen. Bei 140 zufällig ausgewählten Buchungen wurde in 90% die Touristenklasse gebucht. 70% aller Buchungen wurden mit der Kreditkarte bezahlt. Zwei Buchungen der Businessklasse wurden durch Überweisung bezahlt. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Rechnen Sie mit exakten Werten.

E_1 : „Ein Kunde bucht Touristenklasse oder zahlt nicht mit der Kreditkarte“

$E_2 = \overline{\overline{C} \cup B}$

Beschreiben Sie das Ereignis E_2 möglichst einfach in Worten.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2.1

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Gegeben:

$$P(T) = 90\% = 0,9 \quad ; \quad P(C) = 70\% = 0,7 \quad ; \quad P\left(B \cap \overline{C}\right) = \frac{2}{140} = \frac{1}{70}$$

	C	$\overline{C}$	Σ
B		$\frac{1}{70}$	
T			0,9
Σ	0,7		1

Tafel vervollständigen:

	C	$\overline{C}$	Σ
B	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{70}$	0,1
T	$\frac{43}{70}$	$\frac{2}{7}$	0,9
Σ	0,7	0,3	1

Wahrscheinlichkeit

E_1: „Ein Kunde bucht Touristenklasse oder zahlt nicht mit der Kreditkarte“

> Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse*
>
> Bei der Vereinigung von zwei Ereignissen tritt entweder das eine oder das andere Ereignis ein.
>
> „Ein Kunde bucht Touristenklasse (T) **oder** zahlt nicht mit der Kreditkarte ($\overline{C}$)“

$P\left(E_1\right) = P\left(T \cup \overline{C}\right)$

> Erläuterung: *Satz von Sylvester*
>
> Satz von Sylvester (s. auch Merkhilfe Mathematik):
>
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P\left(E_1\right) = P(T) + P\left(\overline{C}\right) - P\left(T \cap \overline{C}\right) = 0,9 + 0,3 - \frac{2}{7} = \frac{32}{35}$

> Erläuterung: *De Morgansche Gesetze*
>
> Gesetze von De Morgan (s. auch Merkhilfe Mathematik):
>
> $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
>
> $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
>
> In diesem Fall: $\overline{\overline{C} \cup B} = \underbrace{\overline{\overline{C}}}_{C} \cap \underbrace{\overline{B}}_{T} = C \cap T$

$P\left(E_2\right) = P\left(\overline{\overline{C} \cup B}\right) = P\left(C \cap \overline{B}\right) = P\left(C \cap T\right) = \frac{43}{70}$

E_2: „Ein Kunde bucht Touristenklasse und zahlt mit der Kreditkarte“

Teilaufgabe 1.2.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Ereignisse B und C stochastisch abhängig sind und erklären Sie, was dies im Sachzusammenhang bedeutet.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2.2

Stochastische Unabhängigkeit

Aus vorheriger Teilaufgabe:

$P(B) = 0,1; \quad P(C) = 0,7; \quad P(B \cap C) = \frac{3}{35} = 0,0\overline{857142}$

$P(B) \cdot P(C) = 0,1 \cdot 0,7 = 0,07 \neq 0,0\overline{857142} = P(B \cap C)$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$\Rightarrow \quad B$ und C sind stochastisch abhängig

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Buchung der Businessklasse und der Bezahlung mit Kreditkarte.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

In der Touristenklasse wird Gepäck bis maximal 20 kg pro Fluggast kostenlos befördert. Für je 2 angefangene kg, die über 20 kg hinausgehen, wird eine Gebühr von 12 € verlangt. Folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Gewichtsverteilung der Gepäckstücke in kg an:

Gewicht m	≤ 20	$20 < m \leq 22$	$22 < m \leq 24$	$24 < m \leq 26$	$26 < m \leq 28$
Wahrsch.	0,7	0,05	0,12	0,08	0,05

Die Zufallsgröße X gibt die anfallenden Gepäckkosten pro Person an. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form und geeignet graphisch dar.

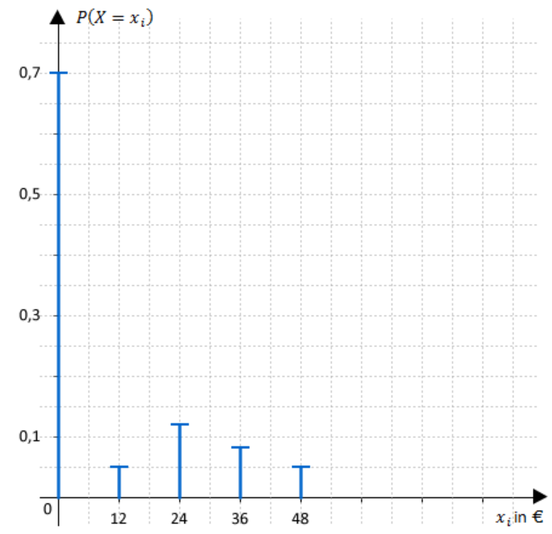
Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Tabelle:

x_i in €	0	12	24	36	48	Σ
$P(X = x_i)$	0,7	0,05	0,12	0,08	0,05	1

Stabdiagramm:



Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Untersuchen Sie, ob die Kosten für ein Gepäckstück mit $m = 24$ noch innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

x_i in €	0	12	24	36	48	Σ
$P(X = x_i)$	0,7	0,05	0,12	0,08	0,05	1

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$\mu = E(X) = 0 \cdot 0,7 + 12 \cdot 0,05 + 24 \cdot 0,12 + 36 \cdot 0,08 + 48 \cdot 0,05 = 8,76$

Standardabweichung einer Zufallsgröße

Varianz bestimmen:

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für die Varianz dieser Zufallsgröße:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \qquad (\mu = E(X) = \text{Erwartungswert von } X)$$

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$Var(X) = (0 - 8,76)^2 \cdot 0,7 + (12 - 8,76)^2 \cdot 0,05 + (24 - 8,76)^2 \cdot 0,12 + (36 - 8,76)^2 \cdot 0,08 + (48 - 8,76)^2 \cdot 0,05$$

$Var(X) \approx 218,46$

Alternative Berechnung der Varianz über die Verschiebungsregel:

$E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot 0,7 + 12^2 \cdot 0,05 + 24^2 \cdot 0,12 + 36^2 \cdot 0,08 + 48^2 \cdot 0,05 = 295,2$

$Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 = 295,2 - 8,76^2 = 218,46$

Standardabweichung bestimmen: $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{218,46} \approx 14,78$

Nachweis eines Sachverhaltes

Kosten überprüfen:

Erläuterung:

„innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert“ $= |X - \mu| < \sigma$

Die Ungleichung $|X - \mu| < \sigma$ ist gleichbedeutend zu $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$.

$|X - \mu| < \sigma$

$\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$

$-6,02 < X < 23,54$

für $m = 24$ fallen Gepäckkosten von $X = 24$ an

$X = 24$ liegt nicht innerhalb der einfachen Standardabweichnung um dem Extremwert.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Bei einem bestimmten Flug sind 100 Plätze besetzt. Beim Essen können die Passagiere zwischen einem Fleischgericht und einem vegetarischen Gericht wählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 65% für das Fleischgericht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3: „Es werden höchstens 40 vegetarische Gerichte gewählt.“

E_4: „Es werden mindestens 30 vegetarische Gerichte gewählt.“
$E_5 = E_3 \cap E_4$

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Binomialverteilung

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 100$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(\text{„vegetarisches Gericht“}) = 1 - 0,65 = 0,35$ angesehen werden.

Erläuterung:

höchstens 40 $\quad\Longleftrightarrow\quad T \leq 40$

$P\ (E_3) = P_{0,35}^{100}(T \leq 40) = 0,8750 \qquad$ (s. Tafelwerk)

Erläuterung:

mindestens 30 $\quad\Longleftrightarrow\quad T \geq 30$

$P\ (E_4) = P_{0,35}^{100}(T \geq 30)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(\text{„mindestens } k \text{ Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens } k-1 \text{ Treffer“})$

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

$P\ (E_4) = 1 - P_{0,35}^{100}(T \leq 29) = 1 - 0,1236 = 0,8764 \qquad$ (s. Tafelwerk)

Erläuterung: *Ereignis*

$E_5 = E_3 \cap E_4$

E_5: „Es werden mindestens 30 und höchsten 40 vegetarische Gerichte gewählt.“

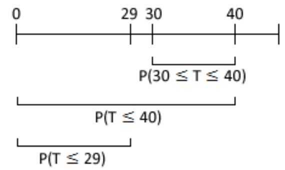
$P\ (E_5) = P(30 \leq T \leq 40)$

Erläuterung:

Wenn die Zufallsgröße T zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a - 1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$P\ (E_5) = P(T \leq 40) - P(T \leq 29) = 0,8750 - 0,1236 = 0,7514 \qquad$ (s. Tafelwerk)

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Bestimmen Sie, wie viele Fleischgerichte mindestens mitgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% jeder der 100 Passagiere, der ein Fleischgericht wünscht, dieses bekommen kann.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Binomialverteilung

$p = P(\text{„Fleischgericht“}) = 0,65$

$k =$ Anzahl der mitgeführten Fleischgerichte

$P_{0,65}^{100}(T \leq k) \geq 0,99$

$k \geq 76 \qquad$ (s. Tafelwerk)

Es müssen mindestens 76 Fleischgerichte mitgeführt werden.

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Erfahrungsgemäß treten $12,5\%$ der Passagiere, die Tickets gekauft haben, den Flug nicht an. Damit die Flugzeuge möglichst voll besetzt sind, werden die Maschinen überbucht.

Für einen Flug mit 183 Sitzplätzen werden 200 Tickets verkauft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht mehr Passagiere den Flug antreten als tatsächlich in der Maschine Platz finden.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Binomialverteilung

$p_1 = P(\text{„treten nicht an"}) = 0,125$

$p_2 = P(\text{„treten an"}) = 1 - 0,125 = 0,875$

Gesucht: $P^{200}_{0,875}(T \leq 183)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Da es für $p_2 = 0,875$ keine Einträge im Tafelwerk gibt, wird hier das Gegenereignis betrachtet.

Ereignis: „Höchstens 183 Passagiere treten an"

Gegenereignis: „Mindestens 200 - 183 = 17 Passagiere treten nicht an"

$p_1 = P(\text{„treten nicht an"}) = 0,125$

$P^{200}_{0,875}(T \leq 183) = P^{200}_{0,125}(T \geq 17)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(\text{„mindestens } k \text{ Treffer"}) = 1 - P(\text{„höchstens } k-1 \text{ Treffer"})$

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$P^{200}_{0,875}(T \leq 183) = 1 - P^{200}_{0,125}(T \leq 16) = 0,9708$ (s. Tafelwerk)

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)

Man vermutet, dass inzwischen mehr als $12,5\%$ der Buchungen nicht wahrgenommen werden (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test an Hand von 200 Buchungen durchgeführt.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Erläutern Sie, wie man entscheiden wird, wenn 170 den Flug antreten.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

T: Anzahl nicht wahrgenommenen Buchungen von 200

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,125$

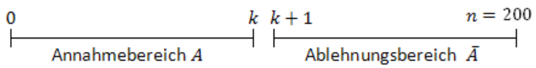
Gegenhypothese: $H_1 : p_1 > 0,125$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Erläuterung: *Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese " $p_1 > 0,125$" bzw. " **mehr** als 12,5% der Buchungen werden nicht wahrgenommen" lautet, liegt der Annahmebereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Annahmebereich von H_0: $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k+1, 200]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art" , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($T \geq k+1$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P^{200}_{0,125}(T \geq k+1) \leq 0,05$

$P^{200}_{0,125}(T \geq k+1) \leq 0,05$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(„mindestens $k+1$ Treffer") $= 1 - P$(„höchstens k Treffer")

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k+1) = 1 - P(X \leq k)$

$1 - P^{200}_{0,125}(T \leq k) \leq 0,05$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - P^{200}_{0,125}(T \leq k) \leq 0,05 \quad | -1$

$-P^{200}_{0,125}(T \leq k) \leq -0,95 \quad | \cdot(-1)$

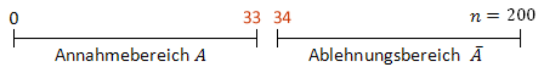
(Das Relationszeichen dreht sich, da mit einer negativen Zahl multipliziert wird.)

$P^{200}_{0,125}(T \leq k) \geq 0,95$

$P^{200}_{0,125}(T \leq k) \geq 0,95$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \geq 33$

Entscheidungsregel:



Max. Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{34, \ldots, 200\}$

170 treten an $\iff$ 30 treten nicht an $\Rightarrow 30 \in A \Rightarrow H_0$ wird nicht abgelehnt