Fachabitur 2013 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ berührt die x-Achse bei $x = -1$ und schneidet die y-Achse bei $y = 2$.
Die Tangente an den Graphen G_f für $x = 2$ hat die Steigung $m = -9$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Begründen Sie, dass die zugehörige ganzrationale Funktion nicht 2. Grades sein kann.

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der ganzrationalen Funktion f dritten Grades.
[Ergebnis: $f(x) = -x^3 + 3x + 2$]

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Weisen Sie durch entsprechende Berechnungen nach, dass die Gerade G_g mit $g(x) = 4$ Tangente an den Graphen G_f im Hochpunkt von G_f ist und ermitteln Sie die Koordinaten des weiteren gemeinsamen Punktes von G_g und G_f.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Gerade G_g im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_1, welches der Graph G_f und die Gerade G_g mit der y-Achse im II. Quadranten einschließen.

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_2, welches der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt. Vergleichen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von F_1 und F_2.
Welche Vermutung legt das Ergebnis bezüglich des Punktes $P(0|2)$ nahe?

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t(x) = -(x+1)^2(x-t)$; $D_{f_t} = \mathbb{R}$; $t \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t, sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von t.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Argumentieren Sie mithilfe der bisher bekannten Eigenschaften, dass die Funktion f aus Aufgabe 1 zur Funktionenschar f_t gehört.

Teilaufgabe 3. (7 BE)

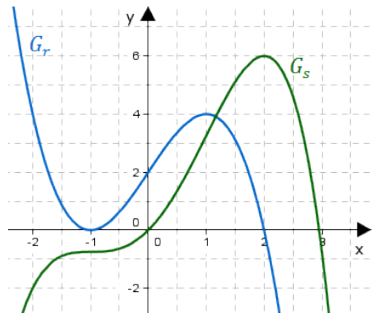
Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \\ -0,5(x-1)^2 + 2,5 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } f(x) \text{ aus 1.2.}$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion h an der Nahtstelle stetig ist. Untersuchen Sie anschließend rechnerisch, ob der Graph von h an dieser Stelle „ohne Knick“ verläuft.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

Die folgende Darstellung zeigt den Graphen G_r der ganzrationalen Funktion r und den Graphen G_s der ganzrationalen Funktion s.



Begründen Sie:
Die Funktion s kann eine Stammfunktion der Funktion r sein.

Eine Schule veranstaltet eine Projektwoche zum Thema „Work-Life-Balance“.
Zum Abschluss erhalten alle Teilnehmer je einen Relax-Ball, der in einer zylinderförmigen Schachtel verpackt ist. Von dieser ist bekannt, dass sie eine Oberfläche von $180\,\text{cm}^2$ besitzt.
Bei der Rechnung wird auf Einheiten verzichtet.

Teilaufgabe 5.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit vom Zylinderradius r gilt: $V(r) = -\pi \cdot r^3 + 90r$

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)

Nach Informationen des Verbraucherschutzes kann eine Verpackung dann als unzulässig deklariert werden, wenn die Füllmenge vom Fassungsvermögen einer Verpackung um mehr als 30% abweicht.
Prüfen Sie, ob eine Verpackung dieser Anforderung gerecht wird, wenn die Schachtel mit $r = 3,1\,\text{cm}$ einen Ball mit dem Durchmesser von $60\,\text{mm}$ enthält. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Lösung

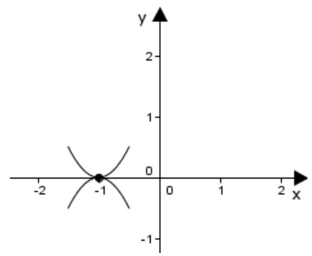
Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ berührt die x-Achse bei $x = -1$ und schneidet die y-Achse bei $y = 2$.
Die Tangente an den Graphen G_f für $x = 2$ hat die Steigung $m = -9$.

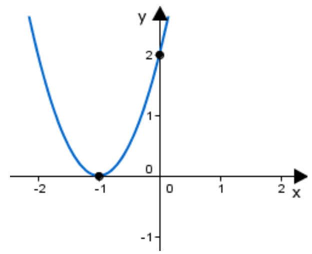
Begründen Sie, dass die zugehörige ganzrationale Funktion nicht 2. Grades sein kann.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Eigenschaften einer Funktion

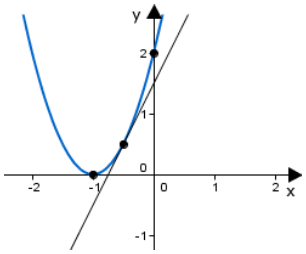


Wenn der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades die x-Achse berührt, dann hat sie dort ihren Scheitelpunkt.



© Abiturloesung.de

Soll der Graph weiterhin die positive y-Achse schneiden, so muss es sich beim Scheitelpunkt um ein Minimum handeln.



Die Tangenten an den Graphen haben somit für $x > -1$ positive Steigung. Die Funktion kann nicht zweiten Grades sein.

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der ganzrationalen Funktion f dritten Grades.
[Ergebnis: $f(x) = -x^3 + 3x + 2$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Steckbriefaufgaben

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$

„Der Graph G_f berührt die x-Achse bei $x = -1$“ .

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{array}$$

„Der Graph G_f schneidet die y-Achse bei $y = 2$“ .

$$\Rightarrow \quad f(0) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad d = 2$$

„Die Tangente an den Graphen G_f für $x = 2$ hat die Steigung $m = -9$“

$$\Rightarrow \quad f'(2) = -9 \quad \Longleftrightarrow \quad 12a + 4b + c = -9$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 3a - 2b + c = 0 \\ \text{II.} & -a + b - c + d = 0 \\ \text{III.} & d = 2 \\ \text{IV.} & 12a + 4b + c = -9 \end{array}$$

$d = 2$ in II. einsetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 3a - 2b + c = 0 \\ \text{II.} & -a + b - c = -2 \\ \text{IV.} & 12a + 4b + c = -9 \end{array}$$

II. auf I. und auf IV. addieren:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 2a - b = -2 \\ \text{II.} & -a + b - c = -2 \\ \text{IV.} & 11a + 5b = -11 \end{array}$$

5-mal die I. auf IV. addieren:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 2a - b = -2 \\ \text{II.} & -a + b - c = -2 \\ \text{IV.} & 21a = -21 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \end{array}$$

$a = -1$ in I. und II. einsetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & -2 - b = -2 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \\ \text{II.} & 1 + b - c = -2 \end{array}$$

$b = 0$ in II. einsetzen: $c = 3$

Einsetzen von $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ und $d = 2$ in die allgemeine Funktionsgleichung:

$f(x) = -x^3 + 3x + 2$

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Weisen Sie durch entsprechende Berechnungen nach, dass die Gerade G_g mit $g(x) = 4$ Tangente an den Graphen G_f im Hochpunkt von G_f ist und ermitteln Sie die Koordinaten des weiteren gemeinsamen Punktes von G_g und G_f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = -x^3 + 3x + 2$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = -3x^2 + 3$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$-3x^2 + 3 = 0$
$-3x^2 = -3$
$x^2 = 1$

$\Rightarrow \quad x_1 = -1;\ x_2 = 1$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$f''(x) = -6x$

> Erläuterung: *Art eines Extremums*
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den möglichen Extremstellen untersuchen:

$f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (1|4)$ ist Hochpunkt

(Da HOP bestimmt, keine weiteren Berechnungen notwendig.)

Nachweis einer Tangente

$g(x) = 4$ ist Tangente im Hochpunkt $(1|4)$, da $(1|4)$ auf G_g liegt und $g'(1) = 0 = f'(1)$.

Schnittpunkt zweier Funktionen

Gemeinsamen Punkt bestimmen:

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.
>
> Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$f(x) = g(x)$

$-x^3 + 3x + 2 = 4$

$-x^3 + 3x - 2 = 0$

© Abiturloesung.de

> Erläuterung: *Lösen einer Gleichung dritten Grades*
>
> Das Lösen einer Gleichung dritten Grades (auf der rechten Seite muss die Null stehen) setzt voraus, dass bereits eine Lösung bekannt ist. Ist dies nicht der Fall, so muss eine Lösung durch Ausprobieren geraten werden (für x werden die Werte ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, etc. eingesetzt).
>
> Hat man eine Lösung gefunden, so teilt man mittels Polynomdivision den Term links des Gleichheitszeichens durch die bekannte Lösung.

Erste Nullstelle: $x_1 = 1$

Polynomdivision durchführen: $\left(-x^3 + 3x - 2\right) : (x - 1)$

> Erläuterung: *Polynomdivision*
>
> Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ beispielsweise lässt sich in Faktoren folgendermaßen schreiben:
>
> $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$
>
> $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.
>
> Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision.
>
> $$\begin{array}{l} (x^2 \quad +x \quad -2\ ) : (x-1) = x + 2 \\ \underline{-(x^2 \quad -x)} \\ \qquad\quad 2x \quad -2 \\ \qquad \underline{-(2x \quad -2)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (-x^3 \qquad\qquad +3x \quad -2) : (x-1) = -x^2 - x + 2 \\ \underline{-(-x^3 \quad +x^2)} \\ \qquad\qquad -x^2 \quad +3x \\ \qquad \underline{-(-x^2 \quad +x)} \\ \qquad\qquad\qquad 2x \quad -2 \\ \qquad\qquad \underline{-(2x \quad -2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$-x^2 - x + 2 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2}$$

$x_2 = -2$
$x_3 = x_1 = 1$

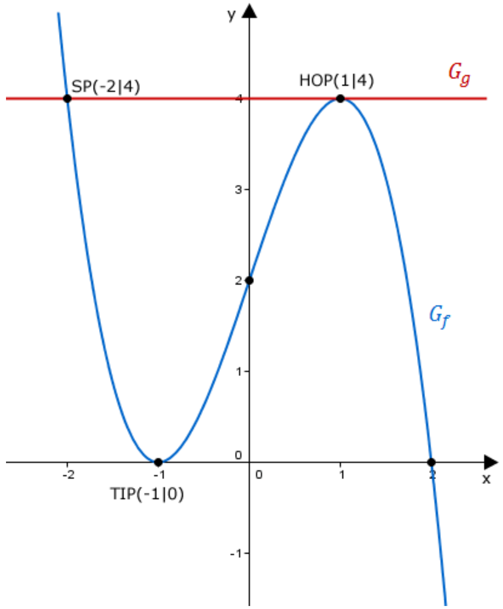
$\Rightarrow$ SP$(-2|4)$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Gerade G_g im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze

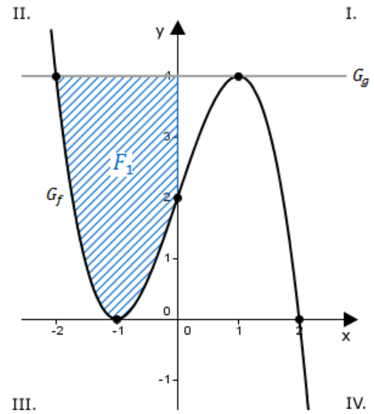


Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_1, welches der Graph G_f und die Gerade G_g mit der y-Achse im II. Quadranten einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\ \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$F_1 = \int_{-2}^{0} \left(g(x) - f(x)\right)\ \mathrm{dx}$$

$$F_1 = \int_{-2}^{0} \left(4 - \left(-x^3 + 3x + 2\right)\right)\ \mathrm{dx}$$

$$F_1 = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 3x + 2\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $x^3 - 3x + 2$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(x^3 - 3x + 2\right) \, \mathrm{dx} = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1} = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$

$$F_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{0}$$

Erläuterung:

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = \left[\, F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F_1 = 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{3}{2} \cdot 4 - 4\right)$$

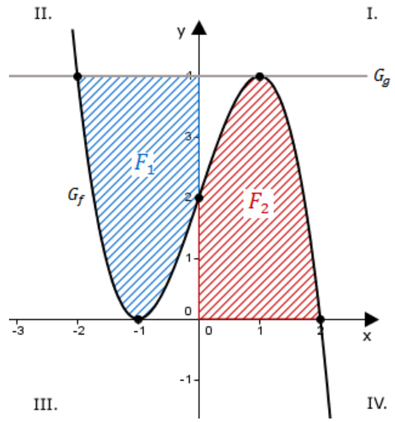
$$F_1 = 6$$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_2, welches der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt. Vergleichen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von F_1 und F_2.
Welche Vermutung legt das Ergebnis bezüglich des Punktes $P(0|2)$ nahe?

Lösung zu Teilaufgabe 1.6

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 2 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$F_2 = \int\limits_0^2 f(x) \, \mathrm{dx}$$

$$F_2 = \int_0^2 f(x) d\,x$$

$$F_2 = \int_0^2 \left(-x^3 + 3x + 2\right) \, \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $-x^3 + 3x + 2$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-x^3 + 3x + 2\right) \, \mathrm{dx} = -\frac{x^{3+1}}{3+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1} = -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x$$

$$F_2 = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^2$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F_2 = \left(-\frac{1}{4}\cdot 16 + \frac{3}{2}\cdot 4 + 4\right) - 0$$

$F_2 = 6$

$\Rightarrow \quad F_1 = F_2$

$\Rightarrow$ Vermutung: G_f ist punktsymetrisch zu $P(0|2)$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t(x) = -(x+1)^2(x-t);\ D_{f_t} = \mathbb{R};\ t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t, sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von t.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Nullstellen einer Funktion

$f_t(x) = -(x+1)^2(x-t)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -(x+1)^2(x-t) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $(x+1)^2 = 0$
   $\Rightarrow \quad x_{1,2} = -1$

2. $x - t = 0$
   $\Rightarrow \quad x_3 = t$

Vielfachheit von Nullstellen

Fallunterscheidung:

Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Der Wert der Nullstelle x_3 ändert sich in Abhängigkeit von t.

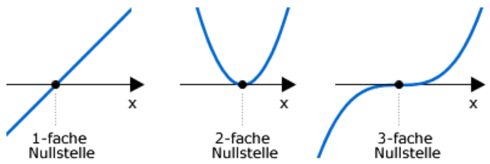
Spezialfall ist $t = -1$. Die Nullstellen $x_{1,2}$ und x_3 haben dann den gleichen Wert.

1. Fall: $\quad t = -1$

$\Rightarrow \quad x = -1$ ist dreifache Nullstelle.

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt/Terrassenpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5) \quad \Rightarrow \quad x = -5$ ist dreifache Nullstelle

$\Rightarrow$ Terrassenpunkt bei $x = -1$.

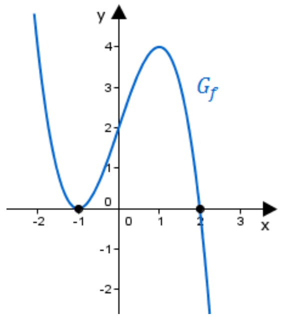
2. Fall: $t \neq -1$
$\Rightarrow$ $x = -1$ zweifache Nullstelle.
$\Rightarrow$ $x = t$ einfache Nullstelle.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Argumentieren Sie mithilfe der bisher bekannten Eigenschaften, dass die Funktion f aus Aufgabe 1 zur Funktionenschar f_t gehört.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

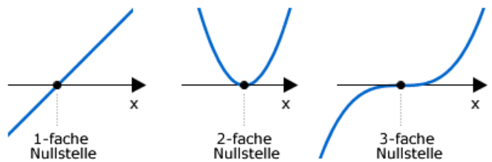
Eigenschaften einer Funktion



Am Graphen G_f (siehe Teilaufgabe 1.4) erkennt man:

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt/Terrassenpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5) \quad \Rightarrow \quad x = -5$ ist dreifache Nullstelle

1. $x = -1$ ist doppelte Nullstelle.

Erläuterung: *Linearfaktorzerlegung*

Die Linearfaktorzerlegung einer Polynomfunktion dritten Grades mit den Nullstellen x_1, x_2 und x_3 lautet:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

a stellt den Leitkoeffizienten dar.

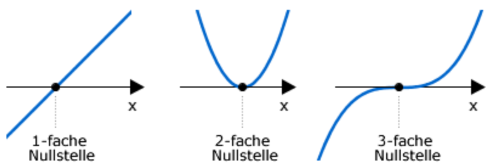
Im Falle, dass eine doppelte Nullstelle (z.B. $x_1 = x_3$) vorliegt:

$f(x) = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)$

$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 \cdot \ldots$

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt/Terrassenpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5) \quad \Rightarrow \quad x = -5$ ist dreifache Nullstelle

2. $x = 2$ ist einfache Nullstelle.

Erläuterung: *Linearfaktorzerlegung*

Die Linearfaktorzerlegung einer Polynomfunktion dritten Grades mit den Nullstellen x_1, x_2 und x_3 lautet:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

a stellt den Leitkoeffizienten dar.

Im Falle, dass eine doppelte Nullstelle (z.B. $x_1 = x_3$) vorliegt:

$f(x) = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)$

$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot ...$

3. Der charakteristische Verlauf ist von „links oben nach rechts unten“.

Erläuterung: *Leitkoeffizient*

Der charakteristische Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Term mit dem höchsten Exponenten bestimmt.

Bei einer Polynomfunktion dritten Grades $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ ist es der Term $a\,x^3$.
a wird als Leitkoeffizient bezeichnet.

Für den Verlauf einer Polynomfunktion dritten Grades, gilt:

Ist a positiv, so verläuft der Graph der Funktion von „links unten nach rechts oben“.

Ist a negativ, so verläuft der Graph der Funktion von „links oben nach rechts unten“.

$\Rightarrow \quad f(x) = -(x+1)^2 \cdot (x-2)$

$\Rightarrow \quad f(x)$ entspricht der Funktion $f_2(x)$ aus der Schar f_t für $t = 2$.

Teilaufgabe 3. (7 BE)

Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x < 0 \\ -0,5(x-1)^2 + 2,5 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } f(x) \text{ aus 1.2.}$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion h an der Nahtstelle stetig ist. Untersuchen Sie anschließend rechnerisch, ob der Graph von h an dieser Stelle „ohne Knick“ verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe 3.

Stetigkeit einer Funktion

$$h(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 2 & \text{für} \quad x < 0 \\ -0,5(x-1)^2 + 2,5 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Prüfen, ob $h(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig ist:

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man eine Funktion $h(x)$ auf Stetigkeit an der Stelle x_0, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} h(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} h(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von rechts.
Ist $h(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x > x_0$ definiert ist.

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von links.
Ist $h(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x < x_0$ definiert ist.

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} -0,5(x-1)^2 + 2,5 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^3 + 3x + 2 = 2$$

$$h(0) = -0,5(0-1)^2 + 2,5 = 2$$

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn der Funktionswert an dieser Stelle sowohl mit dem links- als auch mit dem rechtsseitigem Grenzwert identisch ist, d.h. wenn gilt:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x_0 keinen Sprung.

$\Rightarrow \quad h$ ist an der Stelle $x = 0$ stetig

Differenzierbarkeit einer Funktion

„Zweite“ Funktion ausmultiplizieren:

$$h(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 2 & \text{für} \quad x < 0 \\ -0,5x^2 + x + 2 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Erste Ableitung $h'(x)$ bestimmen:

Erläuterung: *Ableitung einer abschnittsweise definierten Funktion*

Eine abschnittsweise definierte Funktion wird auch abschnittsweise abgeleitet. Man bildet die Ableitungen der Teilfunktionen:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < x_0 \\ g(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x < x_0 \\ g'(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

Ist h an der Stelle x_0 nicht differenzierbar oder ist nicht bekannt, ob h bei x_0 differenzierbar ist, <u>muss</u> x_0 <u>bei der Ableitung ausgeschlossen werden</u>:

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x < x_0 \\ g'(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3 & \text{für} \quad x < 0 \\ -x + 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Prüfen, ob $h(x)$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist:

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man eine Funktion $h(x)$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle x_0, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)

$\lim\limits_{x\to x_0^-} h'(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von rechts.
Ist $h'(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x > x_0$ definiert ist.

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von links.
Ist $h'(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x < x_0$ definiert ist.

$$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} -x+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = \lim_{x\to 0^-} -3x^2+3 = 3$$

Erläuterung: *Differenzierbarkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn gilt:

1. G_f ist in x_0 stetig

2. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

Anders ausgedrückt:

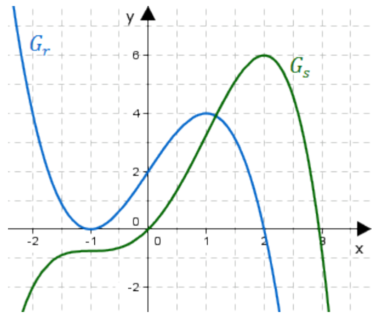
Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es an dieser Stelle eine eindeutige Tangente an den Graphen gibt.
Dies ist nur der Fall, wenn der Graph an dieser Stelle weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

$\Rightarrow$ h ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

$\Rightarrow$ G_h hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

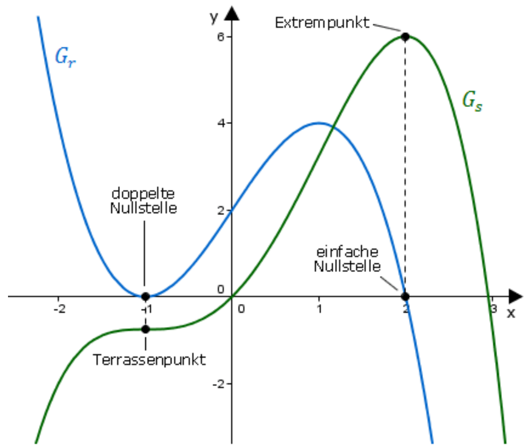
Die folgende Darstellung zeigt den Graphen G_r der ganzrationalen Funktion r und den Graphen G_s der ganzrationalen Funktion s.



Begründen Sie:
Die Funktion s kann eine Stammfunktion der Funktion r sein.

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Stammfunktion



s kann Stammfunktion von r sein, da:

Erläuterung: *Zusammenhang Stammfunktion / Funktion*

Zusammenhang zwischen F und f:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

1. An der Stelle $x = -1$ hat G_r eine zweifache Nullstelle und G_s ein Terrassenpunkt.

2. An der Stelle $x = 2$ hat G_r eine einfache Nullstelle und G_s ein Extrempunkt.

3. G_r verläuft oberhalb der x-Achse für $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 2[$ und G_s ist für $x \in]-\infty; -1] \cup [-1; 2]$ streng monoton steigend.

4. G_r verläuft unterhalb der x-Achse für $x \in]2; \infty[$ und G_s ist für $x \in [2; \infty[$ streng monoton fallend.

Teilaufgabe 5.1 (4 BE)

Eine Schule veranstaltet eine Projektwoche zum Thema „Work-Life-Balance“. Zum Abschluss erhalten alle Teilnehmer je einen Relax-Ball, der in einer zylinderförmigen Schachtel verpackt ist. Von dieser ist bekannt, dass sie eine Oberfläche von $180\,\text{cm}^2$ besitzt. Bei der Rechnung wird auf Einheiten verzichtet.

Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit vom Zylinderradius r gilt: $V(r) = -\pi \cdot r^3 + 90r$

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

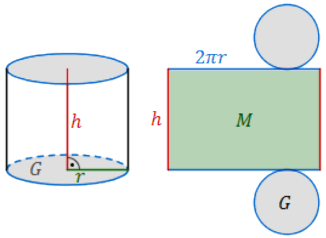
Volumen eines Zylinders

$O = 180$

Erläuterung: *Oberfläche eines Zylinders*

Die Oberfläche eines Zylinders (mit Radius r und Höhe h) setzt sich zusammen aus Grundfläche (G), Deckfläche und Mantelfläche (M):

$O = 2G + M = 2r^2\,\pi + 2\pi\, r\, h$



$180 = 2r^2\,\pi + 2\pi\, r\, h$

Nach h auflösen:

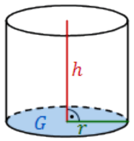
$$\begin{aligned} 180 &= 2r^2\,\pi + 2\pi\, r\, h && \mid -2r^2\,\pi \\ 180 - 2r^2\,\pi &= 2\pi\, r\, h && \mid : (2\pi\, r) \\ \frac{180 - 2r^2\,\pi}{2\pi\, r} &= h \end{aligned}$$

h in die Formel für das Zylindervolumen einsetzen:

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders*

Das Volumen eines Zylinders berechnet sich aus dem Produkt aus Grundfläche und Höhe:

$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = \pi\, r^2 \cdot h$



$V_{\text{Zyl}} = r^2\,\pi\, h$

$V(r) = r^2\,\pi \cdot \dfrac{180 - 2r^2\,\pi}{2\pi\, r}$

$V(r) = r \cdot \dfrac{180 - 2r^2\,\pi}{2} = \dfrac{1}{2} r \cdot \left(180 - 2r^2\,\pi\right)$

$V(r) = 90r - r^3\,\pi$

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)

Nach Informationen des Verbraucherschutzes kann eine Verpackung dann als unzulässig deklariert werden, wenn die Füllmenge vom Fassungsvermögen einer Verpackung um mehr als 30% abweicht.
Prüfen Sie, ob eine Verpackung dieser Anforderung gerecht wird, wenn die Schachtel mit $r = 3{,}1\,\text{cm}$ einen Ball mit dem Durchmesser von $60\,\text{mm}$ enthält. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Lösung zu Teilaufgabe 5.2

Volumen eines Zylinders

$V(r) = 90r - r^3\,\pi$ (s. Teilaufgabe 5.1)

$V(3{,}1) = 90 \cdot 3{,}1 - 3{,}1^3 \cdot \pi \approx 185{,}41$

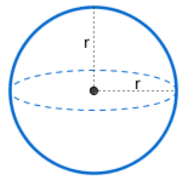
Volumen einer Kugel

$d = 60$ mm $= 6$ cm $\quad\Rightarrow\quad r = 3$ cm

Erläuterung: *Volumen einer Kugel*

Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist gegeben durch:

$V = \dfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$



$V_{\text{Kugel}} = \dfrac{4}{3} r^3\,\pi$

$V_{\text{Ball}} = \dfrac{4}{3} 3^3 \pi \approx 113{,}10$

Prozentrechnung

$V_{\text{Luft}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Ball}} = 185{,}41 - 113{,}10 = 72{,}31$

$\dfrac{V_{\text{Luft}}}{V_{\text{Zylinder}}} = \dfrac{72{,}31}{185{,}41} \approx 0{,}39 = 39\%$

Die Verpackung ist nicht zulässig.

© Abiturloesung.de