Fachabitur 2013 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{12}\left(x^3 - 2a\,x^2 + a^2\,x\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.2 (9 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Art und Koordinaten der Punkte des Graphen von f_a mit waagrechter Tangente.

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 6$: $\quad f_6(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$

f_6 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_f.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Gegeben ist weiterhin die Ursprungsgerade G_g, welche den Graphen G_f im Hochpunkt HP $(2|y_{HP})$ schneidet. Zeichnen Sie die Gerade in das vorhandene Koordinatensystem ein und bestimmen Sie ihre Gleichung.

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)

Die Gerade G_g, die x-Achse und der Graph von f schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Markieren Sie diese Fläche im vorhandenen Koordinatensystem und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl.

Teilaufgabe 1.7 (6 BE)

Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \{ \begin{array}{ll} \frac{4}{3}x & \text{für} \quad x < 3 \\ f(x) & \text{für} \quad x \geq 3 \end{array}$$

Markieren Sie G_h im vorhandenen Diagramm mit Farbe. Treffen Sie mithilfe des Graphen G_h eine Aussage über Stetigkeit und Differenzierbarkeit von h an der Nahtstelle. Belegen Sie anschließend Ihr Ergebnis rechnerisch.

Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ ist Folgendes bekannt:

$k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -2[$ sowie für $x \in]0; \infty[$

$k''(x) < 0$ für $x \in]-2; 0[$

$k'(0) = 0 \,\wedge\, k''(0) = 0 \,\wedge\, k'''(0) \neq 0$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion k den Grad 4 hat.

Bei einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a wird von der Ecke D ausgehend je eine Strecke der Länge x mit $0 < x < a$ in Richtung A bis zum Punkt E und in Richtung C bis zum Punkt F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so gefaltet, dass das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke D bildet mit den Punkten A, B, C, F und E eine Pyramide mit fünfeckiger Grundfläche.

Teilaufgabe 3.1 (2 BE)

Fertigen Sie eine Skizze des Quadrates $ABCD$ mit den zuvor gegebenen Punkten und Strecken an.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Stellen Sie das Volumen $V_a(x)$ der entstehenden Pyramide in Abhängigkeit von x dar. Die Höhe der Pyramide h ist gegeben durch $h = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

[Mögliches Ergebnis: $V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(2a^2\,x - x^3\right)$]

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Pyramide den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall und mit $a = 3$ Volumen und Höhe der Pyramide.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{12}\left(x^3 - 2a\,x^2 + a^2\,x\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$$f_a(x) = \frac{1}{12}\left(x^3 - 2a\,x^2 + a^2\,x\right)$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

Ansatz: $f_a(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{12}\left(x^3 - 2a\,x^2 + a^2\,x\right)$$

$$0 = \frac{1}{12}x\left(x^2 - 2a\,x + a^2\right)$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$x_1^N = 0$

$x^2 - 2a\,x + a^2 = 0$

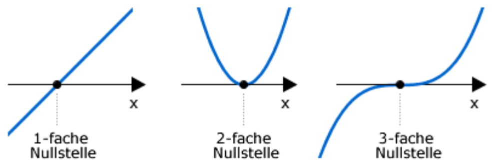
> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:
>
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{2,3}^N = \frac{-(-2a) \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^2}}{2} = \frac{2a \pm 0}{2}$$

$x_{2,3}^N = a$

Vielfachheit von Nullstellen

1. Fall: $a = 0$

> Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*
>
> Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.
>
> 
>
>
> 1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
> 2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
> 3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt/Terrassenpunkt.
>
> $(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist doppelte Nullstelle
> $(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5) \quad \Rightarrow \quad x = -5$ ist dreifache Nullstelle
>
> Im diesem Fall hat der Graph von $f_0(x)$ einen Terrassenpunkt an der Stelle $x = 0$.

$x = 0$ ist dreifache Nullstelle $\quad \Rightarrow \quad$ TP

2. Fall: $a > 0$

$x = 0$ ist einfache Nullstelle
$x = a$ ist zweifache Nullstelle

Teilaufgabe 1.2 (9 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Art und Koordinaten der Punkte des Graphen von f_a mit waagrechter Tangente.

[Lösung zu Teilaufgabe 1.2]

Lage von Extrempunkten ermitteln

Ableitungen bilden:

$$f_a'(x) = \frac{1}{12}\left(3x^2 - 4a\,x + a^2\right)$$
$$f_a''(x) = \frac{1}{12}(6x - 4a)$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0,\quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f_a'(x) = 0$

$3x^2 - 4a\,x + a^2 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4a) \pm \sqrt{(-4a)^2 - 4\cdot 3\cdot a^2}}{2\cdot 3} = \frac{4a \pm 2a}{6}$$
$$x_1 = \frac{4a + 2a}{6} = a$$
$$x_2 = \frac{4a - 2a}{6} = \frac{a}{3}$$

Lage der (möglichen) Extrempunkte:

$y_1 = f_a(a) = 0$

$$y_2 = f_a\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{12}\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 - 2a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{81}a^3$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den (möglichen) Extremstellen untersuchen:

$$f_a''(a) = \frac{1}{12}(6a - 4a) = \frac{1}{6}a$$
$$f_a''\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{6}a$$

Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Da a unterschiedliche Werte annehmen kann, muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

1 Fall: $a > 0$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$f_a''(a) = \frac{1}{6}a > 0 \quad\Rightarrow\quad$ Min $(a|0)$

$f_a''\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{6}a < 0 \quad\Rightarrow\quad$ Max $\left(\frac{a}{3}|\frac{1}{81}a^3\right)$

2. Fall: $a = 0$

Erläuterung: *Terrassenpunkt/Sattelpunkt*

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Ein Terrassenpunkt an der Stelle x^{TP} liegt vor, wenn gilt:

$f'\left(x^{\text{TP}}\right) = f''\left(x^{\text{TP}}\right) = 0$ und $f'''\left(x^{\text{TP}}\right) \neq 0$

$f''(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad$ kein Extrempunkt, TP$(0|0)$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 6:$ $\quad f_6(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$

f_6 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet.

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Krümmungsverhalten einer Funktion

$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$

Ableitungen bilden:

$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

$f''(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Mögliche Wendestelle(n) bestimmen:

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:
>
> $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$x^{\text{WP}} = 4$

Vorzeichen der zweiten Ableitung untersuchen:

> Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*
>
> Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.
>
> Es gilt:
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ rechtsgekrümmt.
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ linksgekrümmt.

$f''(x) > 0$

$\frac{1}{2}x - 2 > 0$

$\frac{1}{2}x > 2 \qquad | \cdot 2$

$x > 4$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist linksgekrümmt für $x \in [4; \infty[$

$f''(x) < 0$

$\frac{1}{2}x - 2 < 0$

$x < 4$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 4]$

Wendepunkt ermitteln

Lage des Wendepunkts bestimmen:

$y^{\text{WP}} = f\left(x^{\text{WP}}\right) = f(4) = \frac{4}{3}$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ändert sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f an einer Stelle x^{WP}, so besitzt die Funktion an dieser Stelle einen Wendepunkt.

Da sich an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ das Krümmungsverhalten ändert, ist WP $\left(4|\frac{4}{3}\right)$ ein Wendepunkt.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem.

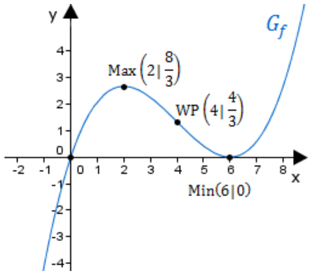
Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze

Aus Teilaufgabe 1.1: $x = 0$, $x = 6$ Nullstellen

Aus Teilaufgabe 1.2: Min(6|0), Max $\left(2|\frac{8}{3}\right)$

Aus Teilaufgabe 1.3: WP $\left(4|\frac{4}{3}\right)$



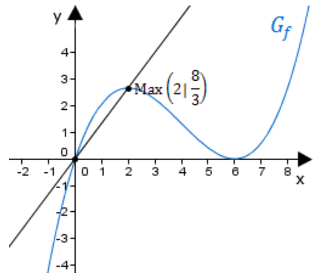
Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Gegeben ist weiterhin die Ursprungsgerade G_g, welche den Graphen G_f im Hochpunkt HP $(2|y_{HP})$ schneidet. Zeichnen Sie die Gerade in das vorhandene Koordinatensystem ein und bestimmen Sie ihre Gleichung.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Skizze

Max $\left(2|\frac{8}{3}\right)$



Geradengleichung aufstellen

Gleichung der Geraden g aufstellen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $y = m \cdot x + t$

m gibt die Steigung der Geraden an.
t entspricht dem y-Achsenabschnitt.

$g: y = m\,x + t$

Erläuterung: *y-Achsenabschnitt*

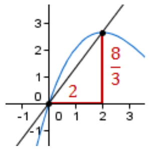
g ist eine Ursprungsgerade und schneidet somit die y-Achse an der Stelle 0.

$t = 0$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden gibt an, wie steil die Gerade verläuft. Genauer gesagt ist m das Seitenverhältnis $m = \dfrac{y}{x}$ im Steigungsdreieck.

In diesem Fall: $m = \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$



$m = \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$

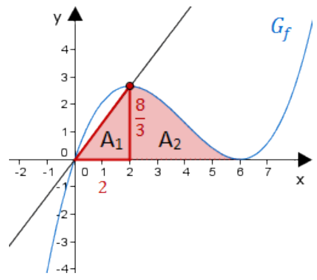
$g : y = \dfrac{4}{3}x$

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)

Die Gerade G_g, die x-Achse und der Graph von f schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Markieren Sie diese Fläche im vorhandenen Koordinatensystem und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6

Flächenberechnung



$A = A_1 + A_2$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{8}{3} + A_2$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche, die G_f mit der x-Achse zwischen 2 und 6 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A_2 = \int_2^6 f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \frac{8}{3} + \int_2^6 f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \frac{8}{3} + \int_2^6 \left(\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right) \,\mathrm{dx} = \frac{1}{12}\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1}$$

$$A = \frac{8}{3} + \left[\frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_2^6$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \frac{8}{3} + \frac{1}{48} \cdot 6^4 - \frac{1}{3} \cdot 6^3 + \frac{3}{2} \cdot 6^2 - \left(\frac{1}{48} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2\right)$$

$$A = \frac{8}{3} + \frac{16}{3}$$

$$A = 8$$

Teilaufgabe 1.7 (6 BE)

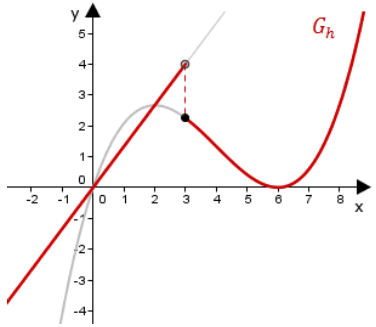
Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x & \text{für} \quad x < 3 \\ f(x) & \text{für} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Markieren Sie G_h im vorhandenen Diagramm mit Farbe. Treffen Sie mithilfe des Graphen G_h eine Aussage über Stetigkeit und Differenzierbarkeit von h an der Nahtstelle. Belegen Sie anschließend Ihr Ergebnis rechnerisch.

Lösung zu Teilaufgabe 1.7

Stetigkeit einer Funktion



Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn der Funktionswert an dieser Stelle sowohl mit dem links- als auch mit dem rechtsseitigem Grenzwert identisch ist, d.h. wenn gilt:

$$f\,(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x_0 keinen Sprung.

Sprung bei $x = 3 \quad \Rightarrow \quad$ nicht stetig

Rechnerische Überprüfung:

$$\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right) = 2,25$$

$$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{4}{3}x\right) = 4$$

$2,25 \neq 4 \quad \Rightarrow \quad$ nicht stetig

Differenzierbarkeit einer Funktion

Da h an der Stelle $x = 3$ nicht stetig ist, ist h auch dort nicht differenzierbar.

Erläuterung: *Differenzierbarkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es an dieser Stelle eine eindeutige Tangente an den Graphen gibt.
Dies ist nur der Fall, wenn der Graph an dieser Stelle weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ ist Folgendes bekannt:

$k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -2[$ sowie für $x \in]0; \infty[$

$k''(x) < 0$ für $x \in]-2; 0[$

$k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \neq 0$

Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Krümmungsverhalten einer Funktion

1. $k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -2[\cup]0; \infty[$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ linksgekrümmt.

$\Rightarrow$ $\quad G_k$ ist linksgekrümmt für $x \in]-\infty; -2] \cup [0; \infty[$

2. $k'' < 0$ für $x \in]-2; 0[$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ linksgekrümmt.

$\Rightarrow$ $\quad G_k$ ist rechtsgekrümmt für $x \in [-2; 0]$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ändert sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f an einer Stelle x^{WP}, so besitzt die Funktion an dieser Stelle einen Wendepunkt.

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = -2$ und $x = 0$

3. $k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \neq 0$

Erläuterung: *Terrassenpunkt/Sattelpunkt*

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Ein Terrassenpunkt an der Stelle x^{TP} liegt vor, wenn gilt:

$f'\left(x^{\text{TP}}\right) = f''\left(x^{\text{TP}}\right) = 0$ und $f'''\left(x^{\text{TP}}\right) \neq 0$

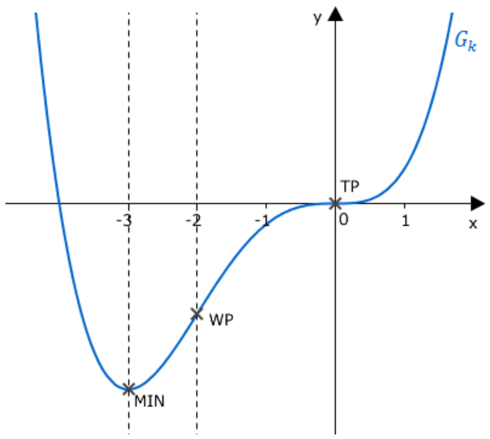
$\Rightarrow$ Terrassenpunkt/Sattelpunkt bei $x = 0$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion k den Grad 4 hat.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Skizze



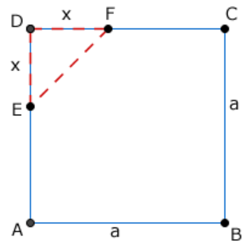
Teilaufgabe 3.1 (2 BE)

Bei einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a wird von der Ecke D ausgehend je eine Strecke der Länge x mit $0 < x < a$ in Richtung A bis zum Punkt E und in Richtung C bis zum Punkt F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so gefaltet, dass das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke D bildet mit den Punkten A, B, C, F und E eine Pyramide mit fünfeckiger Grundfläche.

Fertigen Sie eine Skizze des Quadrates $ABCD$ mit den zuvor gegebenen Punkten und Strecken an.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Skizze

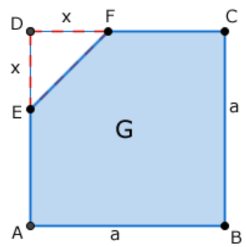


Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Stellen Sie das Volumen $V_a(x)$ der entstehenden Pyramide in Abhängigkeit von x dar.
Die Höhe der Pyramide h ist gegeben durch $h = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.
[Mögliches Ergebnis: $V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(2a^2\,x - x^3\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Volumen einer Pyramide



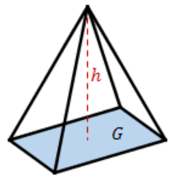
Grundfläche G der Pyramide bestimmen:

$$G = A_{\text{Quadrat}} - A_{\text{Dreieck}}$$

$$G = a^2 - \frac{1}{2}\cdot x^2$$

Volumen der Pyramide bestimmen (s. auch Merkhilfe):

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$$

$$V_a(x) = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$$

$$V_a(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(a^2 - \frac{1}{2}\cdot x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{6}a^2\,x - \frac{\sqrt{2}}{12}x^3$$

$$V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\left(2a^2\,x - x^3\right)$$

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Pyramide den absolut größten Wert annimmt.
Berechnen Sie für diesen Fall und mit $a = 3$ Volumen und Höhe der Pyramide.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Extremwertaufgabe

$$V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\left(2a^2\,x - x^3\right)\,, \qquad 0 < x < a$$

Erste Ableitung bilden:

$V_a'(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2a^2 - 3x^2\right)$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $V_a'(x) = 0$

$0 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2a^2 - 3x^2\right)$

$0 = 2a^2 - 3x^2$

$x^2 = \frac{2}{3}a^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Erläuterung: *Definitionsbereich einer Funktion*

Die Nullstelle $x = -a\sqrt{\frac{2}{3}}$ wird ausgeschlossen, da x im Bereich $0 < x < a$ definiert ist.

$\Rightarrow \quad x^E = a\sqrt{\frac{2}{3}} \quad$ (da $0 < x < a$)

Zweite Ableitung bilden:

$V_a''(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot (-6x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Extremstelle x^E untersuchen:

$V_a''\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \underbrace{-\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}}}_{>0}}_{<0} < 0 \quad$ (da a positiv ist)

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

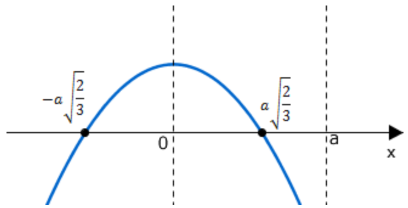
Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$\Rightarrow \quad$ relatives Maximum für $x^E = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Erläuterung:

Der Graph von V' ist eine nach unten geöffnete Parabel (zu erkennen am Term $-3x^2$) mit den Nullstellen $-a\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Skizze von V':



Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Im Bereich $0 < x < a$ schneidet der Graph von V' nur ein einziges Mal die x-Achse. $x^E = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist die einzige Nullstellen der Funktion. V' und das Monotonieverhalten von V ändert sich nur bei $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Das relative Maximum ist in diesem Bereich auch ein absolutes Maximum.

$\Rightarrow$ absolutes Maximum $x^E = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Funktionswert berechnen

$V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2a^2\,x - x^3\right)$; $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x$; $x^E = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

$a = 3$ in x^E einsetzen:

Erläuterung: *Rechenweg*

$$x^E = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

$$x^E = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{\text{TR}}{=} \sqrt{6}$$

x^E in h einsetzen:

Erläuterung: *Rechenweg*

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} \overset{\text{TR}}{=} \sqrt{3}$$

$a = 3$ und x^E in $V_a(x)$ einsetzen:

Erläuterung: *Rechenweg*

$$V_3(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{6} - (\sqrt{6})^3\right)$$

$$V_3(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(18\sqrt{6} - 6\sqrt{6}\right)$$

$$V_3(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 12\sqrt{6}$$

$$V_3(\sqrt{6}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$V_3(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{6} - (\sqrt{6})^3\right) \overset{\text{TR}}{=} 2\sqrt{3}$$