Abitur 2013 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil 1 1 (5 BE)

Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = \ln(2013 - x)$ den maximalen Definitionsbereich D, das Verhalten von f an den Grenzen von D sowie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an.

Teilaufgabe Teil 1 2 (4 BE)

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto x \cdot \sin x$ verläuft durch den Koordinatenursprung. Berechnen Sie $f''(0)$ und geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f in unmittelbarer Nähe des Koordinatenursprungs an.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g : x \mapsto e^{-x}$ und $h : x \mapsto x^3$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, dass die Graphen von g und h genau einen Schnittpunkt haben.

Teilaufgabe Teil 1 3b (4 BE)

Bestimmen Sie einen Näherungswert x_1 für die x-Koordinate dieses Schnittpunkts, indem Sie für die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $d : x \mapsto g(x) - h(x)$ den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$ durchführen.

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit Definitionsbereich $[-2; 2]$. Der Graph besteht aus zwei Halbkreisen, die die Mittelpunkte $(-1|0)$ bzw. $(1|0)$ sowie jeweils den Radius 1 besitzen. Betrachtet wird die in $[-2; 2]$ definierten Integralfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

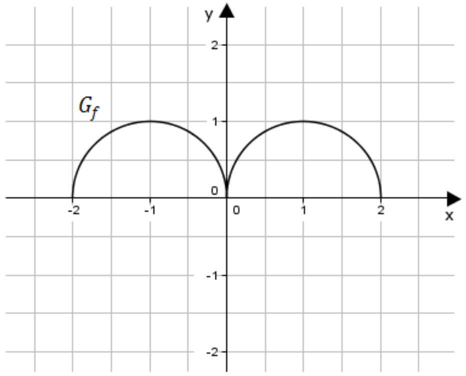


Abb. 1

Teilaufgabe Teil 1 4a (3 BE)

Geben Sie $F(0)$, $F(2)$ und $F(-2)$ an.

Teilaufgabe Teil 1 4b (2 BE)

Skizzieren Sie den Graphen von F in Abbildung 1.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

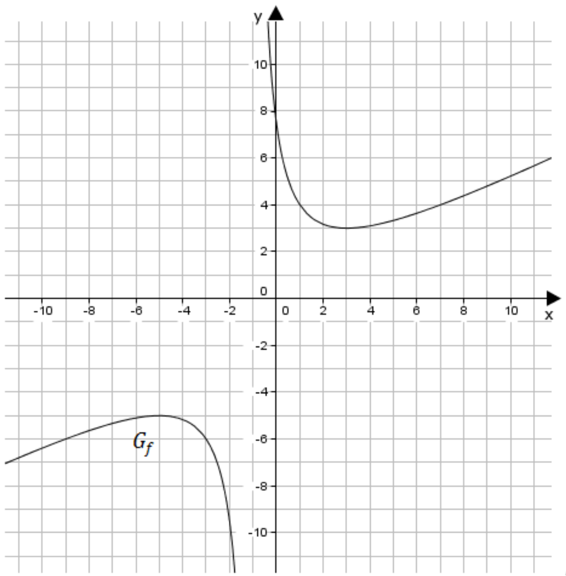


Abb. 2

Teilaufgabe Teil 2 1a (6 BE)

Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an und zeigen Sie rechnerisch, dass G_f seine schräge Asymptote nicht schneidet. Zeichnen Sie die Asymptoten in Abbildung 2 ein.

Teilaufgabe Teil 2 1b (8 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

Abbildung 2 legt die Vermutung nahe, dass G_f bezüglich des Schnittpunkts $P(-1|-1)$ seiner Asymptoten symmetrisch ist. Zum Nachweis dieser Symmetrie von G_f kann die Funktion g betrachtet werden, deren Graph aus G_f durch Verschiebung um 1 in positive x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung hervorgeht.

Teilaufgabe Teil 2 2a (6 BE)

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. Weisen Sie anschließend die Punktsymmetrie von G_f nach, indem Sie zeigen, dass der Graph von g punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

(Teilergebnis: $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$)

Teilaufgabe Teil 2 2b (8 BE)

Zeigen Sie, dass $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{dx} = 2 + 8 \cdot \ln 5$ gilt.

Bestimmen Sie nun ohne weitere Integration den Wert des Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x)\,\mathrm{dx}$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 2.

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm.

Die bisher betrachtete Funktion f gibt für $0 \leq x \leq 15$ die Höhe von S über dem Dosenboden in Zentimetern an; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern (vgl. Abbildung 3).

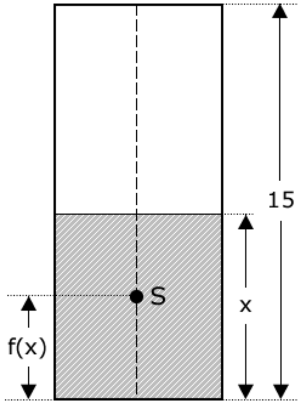


Abb. 3

Teilaufgabe Teil 2 3a (3 BE)

Berechnen Sie $f(0)$ und $f(15)$. Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil 2 3b (3 BE)

Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.
Welche Bedeutung im Sachzusammenhang hat die Tatsache, dass x-Koordinate und y-Koordinate des Tiefpunkts von G_f übereinstimmen?

Teilaufgabe Teil 2 3c (6 BE)

Für welche Füllhöhen x liegt der Schwerpunkt S höchstens 5 cm hoch?
Beantworten Sie diese Frage zunächst näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 und anschließend durch Rechnung.

Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1 (5 BE)

Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = \ln(2013 - x)$ den maximalen Definitionsbereich D, das Verhalten von f an den Grenzen von D sowie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \ln(2013 - x)$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> $f(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(g(x))$.
>
> Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
> Somit gilt für die Argumentfunktion: $g(x) > 0$.
>
> In diesem Fall: $2013 - x > 0$

$2013 - x > 0$

> Erläuterung: *Rechenweg*
>
> $2013 - x > 0$
>
> $-x > -2013 \qquad | \cdot(-1)$
>
> (da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)
>
> $x < 2013$

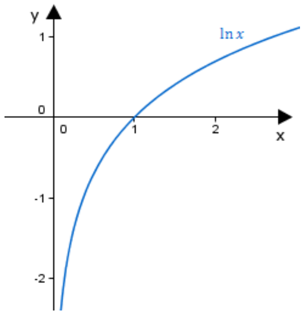
$x < 2013$

$\Rightarrow \qquad D_f =]-\infty; 2013[$

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(\underbrace{2013 - x}_{\to +\infty}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2013} \ln(\underbrace{2013 - x}_{\to 0}) = -\infty$

> Erläuterung: *ln-Funktion*
>
> Graph der ln-Funktion:
>
> 
>
>
> Am Graphen der ln-Funktion lassen sich die Grenzwerte ablesen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der y-Achse: $\quad (0|\ln(2013))$

> Erläuterung: *Rechenweg*
>
> $\ln(2013 - x) = 0$
>
> $\ln(2013 - x) = \ln 1 \qquad (\text{da } \ln 1 = 0)$
>
> $2013 - x = 1$
>
> $x = 2012$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $\quad (2012|0)$

Teilaufgabe Teil 1 2 (4 BE)

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto x \cdot \sin x$ verläuft durch den Koordinatenursprung. Berechnen Sie $f''(0)$ und geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f in unmittelbarer Nähe des Koordinatenursprungs an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2

Erste und zweite Ableitung einer Funktion ermitteln

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = \sin x$.

Für die Sinusfunktion gilt: $(\sin x)' = \cos x$

$$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$$

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = \cos x$.

Für die Kosinusfunktion gilt: $(\cos x)' = -\sin x$

$$f''(x) = \cos x + (\cos x + x \cdot (-\sin x))$$

$$f''(x) = 2\cos x - x \cdot \sin x$$

Krümmungsverhalten einer Funktion

Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$:

$$f''(0) = 2\underbrace{\cos(0)}_{1} - 0 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{0} = 2$$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

Da $f''(0) > 0$ ist, ist der Graph G_f in der Nähe des Ursprungs linksgekrümmt.

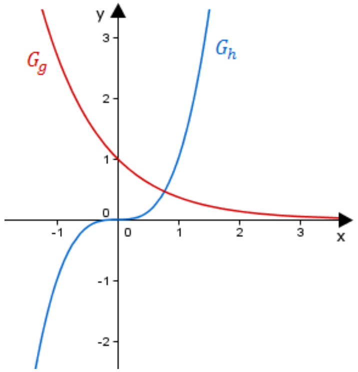
Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g : x \mapsto e^{-x}$ und $h : x \mapsto x^3$.

Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, dass die Graphen von g und h genau einen Schnittpunkt haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3a

Skizze



Teilaufgabe Teil 1 3b (4 BE)

Bestimmen Sie einen Näherungswert x_1 für die x-Koordinate dieses Schnittpunkts, indem Sie für die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $d : x \mapsto g(x) - h(x)$ den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$ durchführen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3b

Newton-Verfahren

$d(x) = e^{-x} - x^3$

Erste Ableitung bilden:

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel für Exponentialfunktionen:
>
> $v(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
>
> In diesem Fall ist $u(x) = -x$.

$d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$

Näherungswert x_1 bestimmen:

> Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*
>
> Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:
>
> $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
>
> Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0 , gilt somit: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

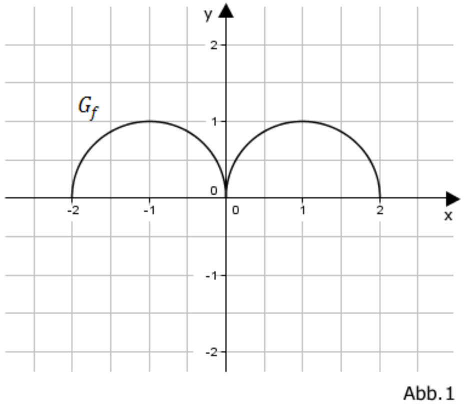
$x_1 = x_0 - \dfrac{d\ (x_0)}{d'\ (x_0)}$

$x_1 = 1 - \dfrac{e^{-1} - 1}{-e^{-1} - 3}$

$x_1 \approx 0,81$

Teilaufgabe Teil 1 4a (3 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit Definitionsbereich $[-2; 2]$. Der Graph besteht aus zwei Halbkreisen, die die Mittelpunkte $(-1|0)$ bzw. $(1|0)$ sowie jeweils den Radius 1 besitzen. Betrachtet wird die in $[-2; 2]$ definierten Integralfunktion $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\text{dt}$.



Geben Sie $F(0)$, $F(2)$ und $F(-2)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4a

Funktionswerte der Integralfunktion angeben

Funktionswerte bestimmen:

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

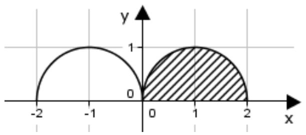
Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\text{dt}$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int\limits_a^a f(t)\text{dt} = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$F(0) = 0$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int\limits_0^2 f(x)\text{dx}$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 2 einschließt.



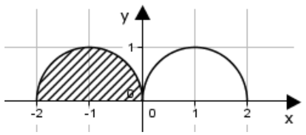
Diese Fläche entspricht wiederum der eines halben Kreises mit Radius 1:

$$\int\limits_0^2 f(x)\text{dx} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$F(2) = \dfrac{\pi}{2}$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int_0^{-2} f(x)\mathrm{d}x$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -2 und 0 einschließt.



Da die Integrationsrichtung hier umgekehrt ist (von 0 bis -2) und der Graph G_f achsensysmmetrisch bezüglich der y-Achse ist, gilt:

$$\int_0^{-2} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{2} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}$$

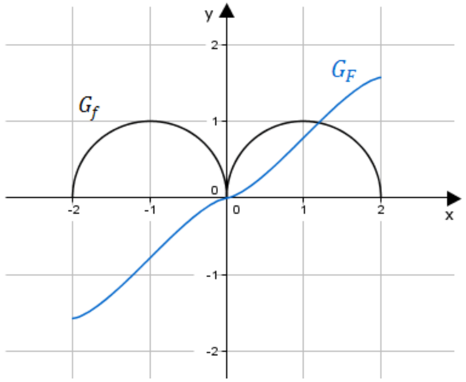
$$F(-2) = -\frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe Teil 1 4b (2 BE)

Skizzieren Sie den Graphen von F in Abbildung 1.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4b

Skizze



Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil 2 1a (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

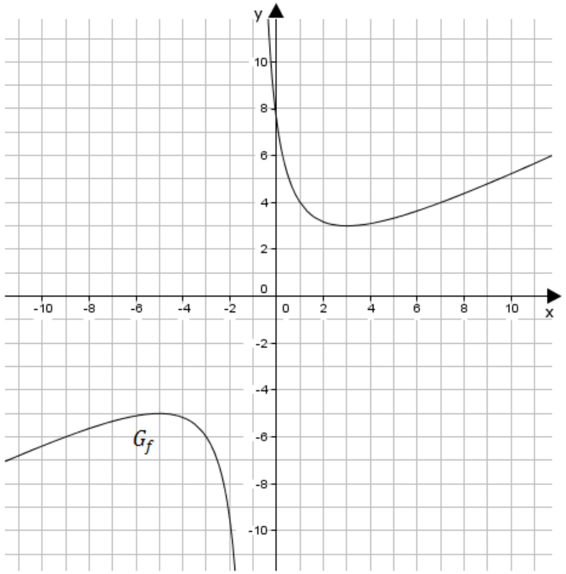


Abb. 2

Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an und zeigen Sie rechnerisch, dass G_f seine schräge Asymptote nicht schneidet. Zeichnen Sie die Asymptoten in Abbildung 2 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a

Asymptoten bestimmen

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{8}{\underbrace{x+1}_{\to 0}}}_{\to \infty} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \qquad \text{senkrechte Asymptote}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{8}{\underbrace{x+1}_{\to \infty}}}_{\to 0} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad \text{schräge Asymptote}$$

Da $\frac{8}{x+1}$ für $x \to \infty$ gegen 0 strebt, verhält sich die Funktion wie $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ für große x-Werte.

Schnittpunkt zweier Funktionen

Schnittpunkt zwischen $f(x)$ und der schrägen Asymptote bestimmen:

Erläuterung: *Gleichsetzen, Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

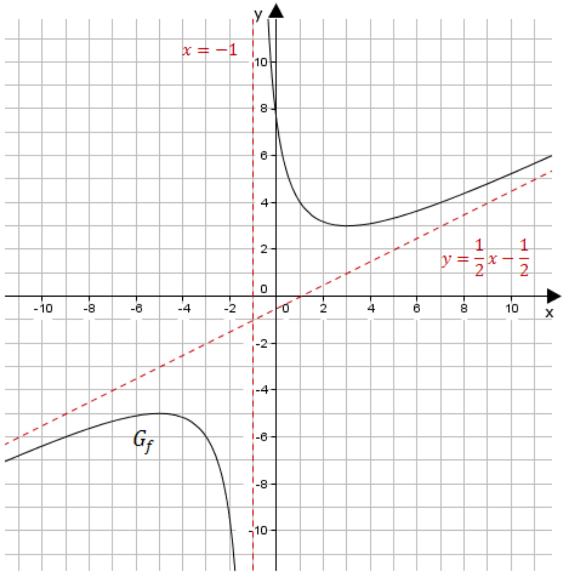
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{8}{x+1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{keine Lösung}$$

Die schräge Asymptote schneidet nicht den Graphen der Funktion f.

Skizze



Teilaufgabe Teil 2 1b (8 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x)=8$ und $v(x)=x+1$.
Dann ist $u'(x)=0$ und $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{0\cdot(x+1)-8\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{8}{(x+1)^2}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right)=0,$ daher immer der Ansatz: $f'(x)=0$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen: $f'(x)=0$

$$0=\frac{1}{2}-\frac{8}{(x+1)^2}$$
$$\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}$$
$$(x+1)^2=16 \quad | \sqrt{}$$
$$x+1=\pm 4$$
$$x+1=4 \quad\Rightarrow\quad x_1^E=3$$
$$x+1=-4 \quad\Rightarrow\quad x_2^E=-5$$

Lage der möglichen Extrempunkte ermitteln:

$$y_1^E=f\left(x_1^E\right)=f(3)=3 \quad\Rightarrow\quad E_1(3|3)$$
$$y_2^E=f\left(x_2^E\right)=f(-5)=-5 \quad\Rightarrow\quad E_2(-5|-5)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 8$ und $v(x) = (x+1)^2$.
Dann ist $u'(x) = 0$ und $v'(x) = 2(x+1)$

$$f''(x) = 0 - \frac{0\cdot(x+1)^2 - 8\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{-16(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Extremstellen untersuchen:

$$f''(3) = \frac{16}{64} > 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(3|3) \text{ Tiefpunkt}$$

$$f''(-5) = \frac{16}{-64} < 0 \quad \Rightarrow \quad E_2(-5|-5) \text{ Hochpunkt}$$

Teilaufgabe Teil 2 2a (6 BE)

Abbildung 2 legt die Vermutung nahe, dass G_f bezüglich des Schnittpunkts $P(-1|-1)$ seiner Asymptoten symmetrisch ist. Zum Nachweis dieser Symmetrie von G_f kann die Funktion g betrachtet werden, deren Graph aus G_f durch Verschiebung um 1 in positive x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung hervorgeht.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. Weisen Sie anschließend die Punktsymmetrie von G_f nach, indem Sie zeigen, dass der Graph von g punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

(Teilergebnis: $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Verschiebung entlang der x-Achse um a Einheiten:

nach rechts (positive x-Richtung): $f(x) \to f(x-a)$

nach links (negative x-Richtung): $f(x) \to f(x+a)$

In diesem Fall ist $a = 1$: $f(x) \to f(x-1)$

Verschiebung entlang der y-Achse um b Einheiten:

nach oben (positive y-Richtung): $f(x) \to f(x) + b$

nach unten (negative y-Richtung): $f(x) \to f(x) - b$

In diesem Fall ist $b = 1$: $f(x) \to f(x) + 1$

Beide Verschiebungen hintereinander: $f(x) \to f(x-1) \to f(x-1) + 1$

$$g(x) = f(x-1) + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{x-1+1} + 1$$

$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$g(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \frac{8}{-x}$$
$$g(-x) = -\frac{1}{2}x - \frac{8}{x}$$
$$g(-x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\right) = -g(x)$$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $g(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_g ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $g(-x) = g(x)$

G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $g(-x) = -g(x)$

$\Rightarrow$ G_g ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(-1|-1)$.

Teilaufgabe Teil 2 2b (8 BE)

Zeigen Sie, dass $\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = 2 + 8 \cdot \ln 5$ gilt.

Bestimmen Sie nun ohne weitere Integration den Wert des Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x)\mathrm{dx}$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 2.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b

Bestimmtes Integral

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} \quad = \quad \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}\right)\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r\,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$
$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{1}{2}\frac{x^{0+1}}{0+1} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{8}{x+1}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|g(x)| + C$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{8}{x+1}\,\mathrm{dx} = 8 \cdot \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{dx} = 8\ln|x+1|$$

Hier ist die Nennerfunktion $g(x) = x + 1$. Abgeleitet ergibt sie die Zählerfunktion 1.

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} \quad = \quad \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 8\ln|x+1|\right]_0^4$$

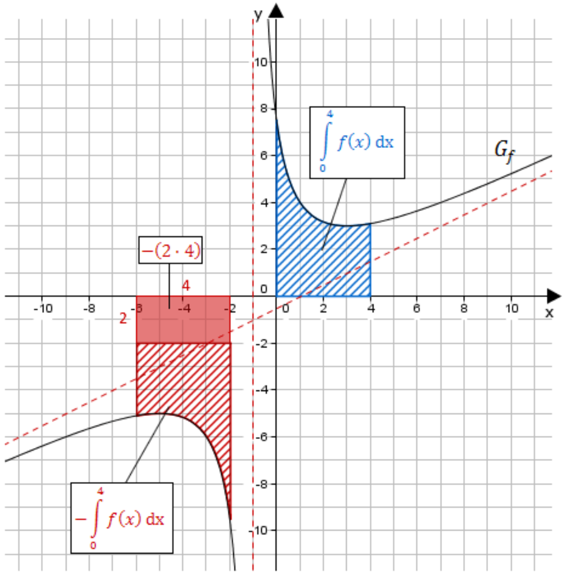
Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} \quad = \quad (4 - 2 + 8\ln 5) - (0 - 0 + 8\underbrace{\ln 1}_{0})$$
$$\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} \quad = \quad 2 + 8\ln 5$$

Abschätzen eines Integrals durch Flächen



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das Integral $\int_{-6}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -6 und -2 einschließt.

Diese Fläche besteht aus einem Rechteck mit Seitenlängen 4 und 2 und einer Fläche (im Bild rot schraffiert), die wegen der Symmetrie des Graphen G_f am Punkt $(-1|-1)$, gleich groß ist wie die Fläche (im Bild blau schraffiert), die dem Integral $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ entspricht.

Da die Fläche sich unterhalb der x-Achse befindet, ist der Wert des Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$ negativ.

$$\int_{-6}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = -\left(\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x + 2\cdot 4\right)$$
$$\int_{-6}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = -(2 + 8\ln 5 + 8)$$
$$\int_{-6}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = -10 - 8\ln 5$$

Teilaufgabe Teil 2 3a (3 BE)

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm.

Die bisher betrachtete Funktion f gibt für $0 \leq x \leq 15$ die Höhe von S über dem Dosenboden in Zentimetern an; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern (vgl. Abbildung 3).

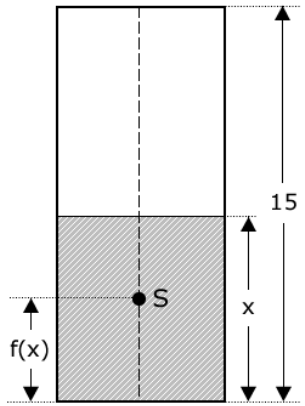


Abb.3

Berechnen Sie $f(0)$ und $f(15)$. Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3a

Anwendungszusammenhang

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$

$f(0) = -\frac{1}{2} + 8 = 7,5$

$f(15) = 7,5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 7,5$

$\Rightarrow \quad f(0) = f(15)$

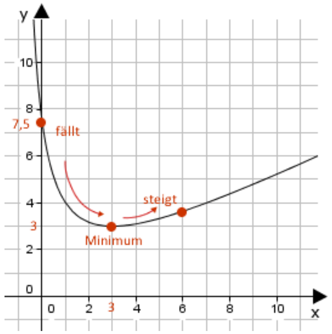
Der Schwerpunkt der leeren Dose ($x = 0$) liegt auf gleicher Höhe wie der Schwerpunkt der vollen Dose ($x = 15$).

Teilaufgabe Teil 2 3b (3 BE)

Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.
Welche Bedeutung im Sachzusammenhang hat die Tatsache, dass x-Koordinate und y-Koordinate des Tiefpunkts von G_f übereinstimmen?

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3b

Anwendungszusammenhang



Die Höhe des Schwerpunkts fällt von 7,5 cm auf 3 cm (das Minimum aus Teil 2 Teilaufgabe 1b) und steigt dann wieder an.

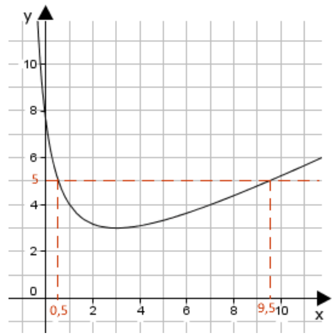
Wenn der Schwerpunkt die geringste Höhe erreicht, so liegt er dann auf der Oberfläche der Flüssigkeit.

Teilaufgabe Teil 2 3c (6 BE)

Für welche Füllhöhen x liegt der Schwerpunkt S höchstens 5 cm hoch?
Beantworten Sie diese Frage zunächst näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 und anschließend durch Rechnung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3c

Anwendungszusammenhang



Der Schwerpunkt liegt höchstens 5 cm hoch für x zwischen 0,5 cm und 9,5 cm.

Lineares Gleichungssystem lösen

$f(x) \leq 5$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \leq 5$

$\frac{1}{2}x + \frac{8}{x+1} \leq 5,5$

$\frac{x(x+1)+16}{2(x+1)} \leq 5,5 \qquad | \cdot 2(x+1)$

$x^2 + x + 16 \leq 11x + 11$

$x^2 - 10x + 5 \leq 0$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-20}}{2}$

$\Rightarrow \qquad x_1 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,53$

$\Rightarrow \qquad x_2 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47$