

Abitur 2013 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil 1 1 (5 BE)

Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = \ln(2013 - x)$ den maximalen Definitionsbereich D , das Verhalten von f an den Grenzen von D sowie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an.

Teilaufgabe Teil 1 2 (4 BE)

Der Graph der in \mathbb{R} definierten Funktion $f : x \mapsto x \cdot \sin x$ verläuft durch den Koordinatenursprung. Berechnen Sie $f''(0)$ und geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f in unmittelbarer Nähe des Koordinatenursprungs an.

Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen $g : x \mapsto e^{-x}$ und $h : x \mapsto x^3$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, dass die Graphen von g und h genau einen Schnittpunkt haben.

Teilaufgabe Teil 1 3b (4 BE)

Bestimmen Sie einen Näherungswert x_1 für die x -Koordinate dieses Schnittpunkts, indem Sie für die in \mathbb{R} definierte Funktion $d : x \mapsto g(x) - h(x)$ den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$ durchführen.

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit Definitionsbereich $[-2; 2]$. Der Graph besteht aus zwei Halbkreisen, die die Mittelpunkte $(-1|0)$ bzw. $(1|0)$ sowie jeweils den Radius

1 besitzen. Betrachtet wird die in $[-2; 2]$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

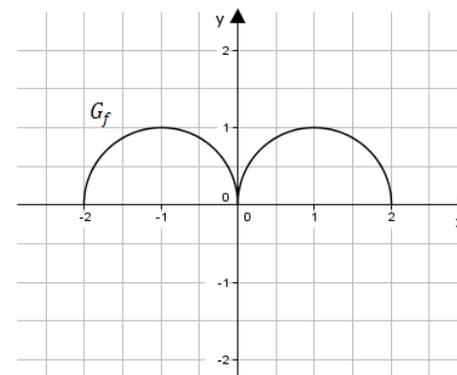


Abb. 1

Teilaufgabe Teil 1 4a (3 BE)

Geben Sie $F(0)$, $F(2)$ und $F(-2)$ an.

Teilaufgabe Teil 1 4b (2 BE)

Skizzieren Sie den Graphen von F in Abbildung 1.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .

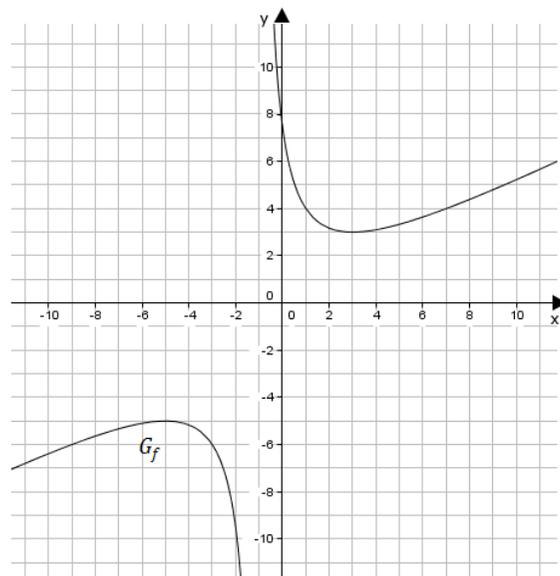


Abb.2

Teilaufgabe Teil 2 1a (6 BE)

Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an und zeigen Sie rechnerisch, dass G_f seine schräge Asymptote nicht schneidet. Zeichnen Sie die Asymptoten in Abbildung 2 ein.

Teilaufgabe Teil 2 1b (8 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f .

Abbildung 2 legt die Vermutung nahe, dass G_f bezüglich des Schnittpunkts $P(-1 | -1)$ seiner Asymptoten symmetrisch ist. Zum Nachweis dieser Symmetrie von G_f kann die Funktion g betrachtet werden, deren Graph aus G_f durch Verschiebung um 1 in positive x -Richtung und um 1 in positive y -Richtung hervorgeht.

Teilaufgabe Teil 2 2a (6 BE)

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g . Weisen Sie anschließend die Punktsymmetrie von G_f nach, indem Sie zeigen, dass der Graph von g punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

$$(\text{Teilergebnis: } g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x})$$

Teilaufgabe Teil 2 2b (8 BE)

Zeigen Sie, dass $\int_0^4 f(x) dx = 2 + 8 \cdot \ln 5$ gilt.

Bestimmen Sie nun ohne weitere Integration den Wert des Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x) dx$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 2.

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm.

Die bisher betrachtete Funktion f gibt für $0 \leq x \leq 15$ die Höhe von S über dem Dosenboden in Zentimetern an; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern (vgl. Abbildung 3).

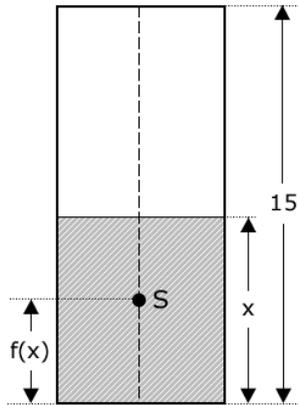


Abb.3

Teilaufgabe Teil 2 3a (3 BE)

Berechnen Sie $f(0)$ und $f(15)$. Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil 2 3b (3 BE)

Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.

Welche Bedeutung im Sachzusammenhang hat die Tatsache, dass x -Koordinate und y -Koordinate des Tiefpunkts von G_f übereinstimmen?

Teilaufgabe Teil 2 3c (6 BE)

Für welche Füllhöhen x liegt der Schwerpunkt S höchstens 5 cm hoch?

Beantworten Sie diese Frage zunächst näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 und anschließend durch Rechnung.

Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1 (5 BE)

Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = \ln(2013 - x)$ den maximalen Definitionsbereich D , das Verhalten von f an den Grenzen von D sowie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1**Definitionsbereich bestimmen**

$$f(x) = \ln(2013 - x)$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$f(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(g(x))$.

Die \ln -Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert. Somit gilt für die Argumentfunktion: $g(x) > 0$.

In diesem Fall: $2013 - x > 0$

$$2013 - x > 0$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$2013 - x > 0$$

$$-x > -2013 \quad | \cdot (-1)$$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$$x < 2013$$

$$x < 2013$$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty; 2013[$$

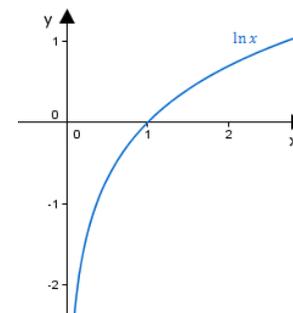
Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\ln(2013 - x)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2013} \underbrace{\ln(2013 - x)}_{\rightarrow 0} = -\infty$$

Erläuterung: *ln-Funktion*

Graph der \ln -Funktion:



Am Graphen der \ln -Funktion lassen sich die Grenzwerte ablesen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0 | \ln(2013))$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\ln(2013 - x) = 0$$

$$\ln(2013 - x) = \ln 1 \quad (\text{da } \ln 1 = 0)$$

$$2013 - x = 1$$

$$x = 2012$$

Schnittpunkt mit der x -Achse: $(2012 | 0)$

Teilaufgabe Teil 1 2 (4 BE)

Der Graph der in \mathbb{R} definierten Funktion $f : x \mapsto x \cdot \sin x$ verläuft durch den Koordinatenursprung. Berechnen Sie $f''(0)$ und geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f in unmittelbarer Nähe des Koordinatenursprungs an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2**Erste und zweite Ableitung einer Funktion ermitteln**

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = \sin x$.

Für die Sinusfunktion gilt: $(\sin x)' = \cos x$

$$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$$

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = \cos x$.

Für die Kosinusfunktion gilt: $(\cos x)' = -\sin x$

$$f''(x) = \cos x + (\cos x + x \cdot (-\sin x))$$

$$f''(x) = 2 \cos x - x \cdot \sin x$$

Krümmungsverhalten einer Funktion

Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$:

$$f''(0) = 2 \underbrace{\cos(0)}_1 - 0 \cdot \underbrace{\sin(0)}_0 = 2$$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a, b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a, b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W , d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

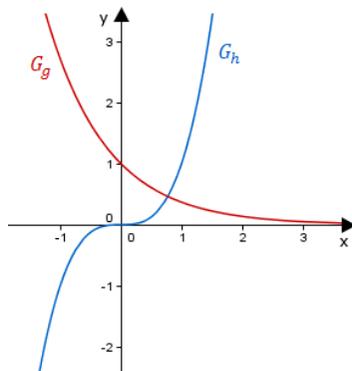
Da $f''(0) > 0$ ist, ist der Graph G_f in der Nähe des Ursprungs linksgekrümmt.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen $g : x \mapsto e^{-x}$ und $h : x \mapsto x^3$.

Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, dass die Graphen von g und h genau einen Schnittpunkt haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3a**Skizze**

**Teilaufgabe Teil 1 3b** (4 BE)

Bestimmen Sie einen Näherungswert x_1 für die x -Koordinate dieses Schnittpunkts, indem Sie für die in \mathbb{R} definierte Funktion $d : x \mapsto g(x) - h(x)$ den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$ durchführen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3b**Newton-Verfahren**

$$d(x) = e^{-x} - x^3$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$$v(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = -x$.

$$d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$$

Näherungswert x_1 bestimmen:

Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0 , gilt somit: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_1 = x_0 - \frac{d(x_0)}{d'(x_0)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{e^{-1} - 1}{-e^{-1} - 3}$$

$$x_1 \approx 0,81$$

Teilaufgabe Teil 1 4a (3 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit Definitionsbereich $[-2; 2]$. Der Graph besteht aus zwei Halbkreisen, die die Mittelpunkte $(-1|0)$ bzw. $(1|0)$ sowie jeweils den Radius 1 besitzen. Betrachtet wird die in $[-2; 2]$ definierte Integralfunktion

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt.$$

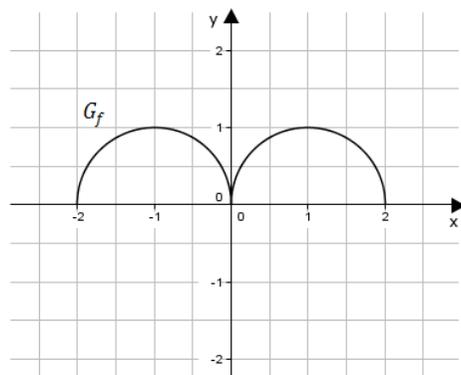


Abb. 1

Geben Sie $F(0)$, $F(2)$ und $F(-2)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4a

Funktionswerte der Integralfunktion angeben

Funktionswerte bestimmen:

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

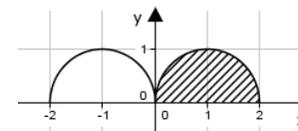
Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int_a^a f(t) dt = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$F(0) = 0$$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int_0^2 f(x) dx$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x -Achse zwischen 0 und 2 einschließt.



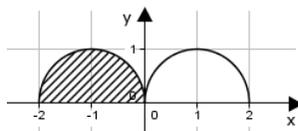
Diese Fläche entspricht wiederum der eines halben Kreises mit Radius 1:

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$F(2) = \frac{\pi}{2}$$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int_0^{-2} f(x) dx$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x -Achse zwischen -2 und 0 einschließt.



Da die Integrationsrichtung hier umgekehrt ist (von 0 bis -2) und der Graph G_f achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse ist, gilt:

$$\int_0^{-2} f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -\frac{\pi}{2}$$

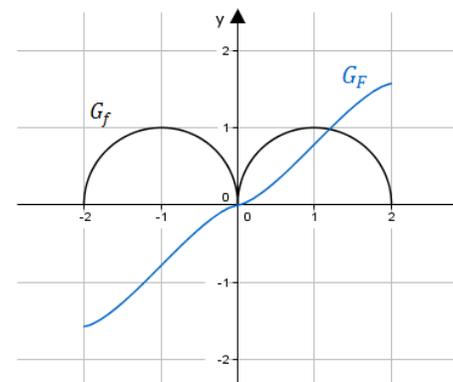
$$F(-2) = -\frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe Teil 1 4b (2 BE)

Skizzieren Sie den Graphen von F in Abbildung 1.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4b

Skizze



Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f ...	ist F ...
oberhalb der x -Achse verläuft	streng monoton steigend
unterhalb der x -Achse verläuft	streng monoton fallend
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit VZW +/-	Maximum / Hochpunkt
eine Nullstelle mit VZW -/+	Minimum / Tiefpunkt
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil 2 1a (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .

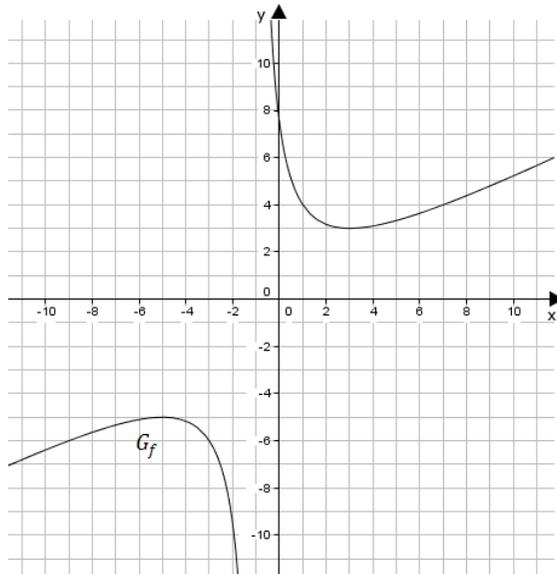


Abb. 2

Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an und zeigen Sie rechnerisch, dass G_f seine schräge Asymptote nicht schneidet. Zeichnen Sie die Asymptoten in Abbildung 2 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a**Asymptoten bestimmen**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{senkrechte Asymptote}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{schräge Asymptote}$$

Da $\frac{8}{x+1}$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, verhält sich die Funktion wie $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ für große x -Werte.

Schnittpunkt zweier Funktionen

Schnittpunkt zwischen $f(x)$ und der schrägen Asymptote bestimmen:

Erläuterung: *Gleichsetzen, Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y) , einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

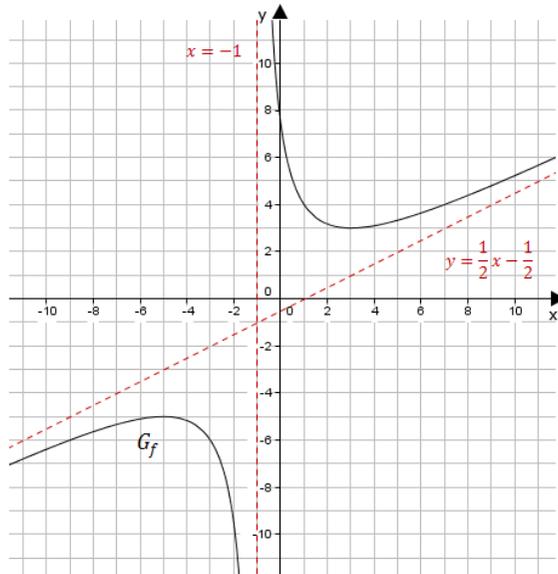
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{8}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

Die schräge Asymptote schneidet nicht den Graphen der Funktion f .

Skizze

**Teilaufgabe Teil 2 1b** (8 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f .

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b**Lage von Extrempunkten ermitteln**

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 8$ und $v(x) = x + 1$.

Dann ist $u'(x) = 0$ und $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{0 \cdot (x+1) - 8 \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$$f'(x^E) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f'(x) = 0$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2}$$

$$\frac{8}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(x+1)^2 = 16 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x+1 = \pm 4$$

$$x+1 = 4 \Rightarrow x_1^E = 3$$

$$x+1 = -4 \Rightarrow x_2^E = -5$$

Lage der möglichen Extrempunkte ermitteln:

$$y_1^E = f(x_1^E) = f(3) = 3 \Rightarrow E_1(3|3)$$

$$y_2^E = f(x_2^E) = f(-5) = -5 \Rightarrow E_2(-5|-5)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 8$ und $v(x) = (x+1)^2$.
Dann ist $u'(x) = 0$ und $v'(x) = 2(x+1)$

$$f''(x) = 0 - \frac{0 \cdot (x+1)^2 - 8 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{-16(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'(x^E) = 0$ und $f''(x^E) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und $f''(x^E) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Extremstellen untersuchen:

$$f''(3) = \frac{16}{64} > 0 \Rightarrow E_1(3|3) \text{ Tiefpunkt}$$

$$f''(-5) = \frac{16}{-64} < 0 \Rightarrow E_2(-5|-5) \text{ Hochpunkt}$$

Teilaufgabe Teil 2 2a (6 BE)

Abbildung 2 legt die Vermutung nahe, dass G_f bezüglich des Schnittpunkts $P(-1|-1)$ seiner Asymptoten symmetrisch ist. Zum Nachweis dieser Symmetrie von G_f kann die Funktion g betrachtet werden, deren Graph aus G_f durch Verschiebung um 1 in positive x -Richtung und um 1 in positive y -Richtung hervorgeht.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g . Weisen Sie anschließend die Punktsymmetrie von G_f nach, indem Sie zeigen, dass der Graph von g punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

$$(\text{Teilergebnis: } g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x})$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Verschiebung entlang der x -Achse um a Einheiten:

$$\text{nach rechts (positive } x\text{-Richtung): } f(x) \rightarrow f(x-a)$$

$$\text{nach links (negative } x\text{-Richtung): } f(x) \rightarrow f(x+a)$$

$$\text{In diesem Fall ist } a = 1: f(x) \rightarrow f(x-1)$$

Verschiebung entlang der y -Achse um b Einheiten:

$$\text{nach oben (positive } y\text{-Richtung): } f(x) \rightarrow f(x) + b$$

$$\text{nach unten (negative } y\text{-Richtung): } f(x) \rightarrow f(x) - b$$

$$\text{In diesem Fall ist } b = 1: f(x) \rightarrow f(x) + 1$$

$$\text{Beide Verschiebungen hintereinander: } f(x) \rightarrow f(x-1) \rightarrow f(x-1) + 1$$

$$g(x) = f(x-1) + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{x-1+1} + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$$

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$g(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \frac{8}{-x}$$

$$g(-x) = -\frac{1}{2}x - \frac{8}{x}$$

$$g(-x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\right) = -g(x)$$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $g(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_g ist achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse, wenn gilt: $g(-x) = g(x)$

G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $g(-x) = -g(x)$

⇒ G_g ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

⇒ G_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(-1|-1)$.

Teilaufgabe Teil 2 2b (8 BE)

Zeigen Sie, dass $\int_0^4 f(x) dx = 2 + 8 \cdot \ln 5$ gilt.

Bestimmen Sie nun ohne weitere Integration den Wert des Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x) dx$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 2.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b**Bestimmtes Integral**

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \right) dx$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{0+1}}{0+1} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{8}{x+1}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{8}{x+1} dx = 8 \cdot \int \frac{1}{x+1} dx = 8 \ln|x+1|$$

Hier ist die Nennerfunktion $g(x) = x+1$. Abgeleitet ergibt sie die Zählerfunktion 1.

$$\int_0^4 f(x) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 8 \ln|x+1| \right]_0^4$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

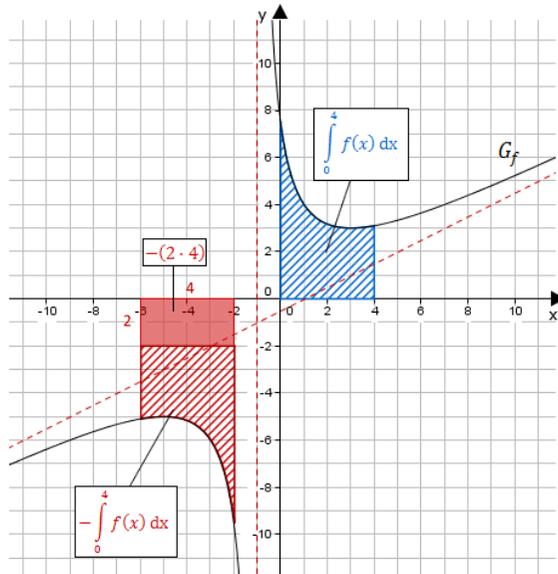
Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^4 f(x) dx = (4 - 2 + 8 \ln 5) - (0 - 0 + 8 \underbrace{\ln 1}_0)$$

$$\int_0^4 f(x) dx = 2 + 8 \ln 5$$

Abschätzen eines Integrals durch Flächen



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das Integral $\int_{-6}^{-2} f(x) dx$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x -Achse zwischen -6 und -2 einschließt.

Diese Fläche besteht aus einem Rechteck mit Seitenlängen 4 und 2 und einer Fläche (im Bild rot schraffiert), die wegen der Symmetrie des Graphen G_f am Punkt $(-1 | -1)$, gleich groß ist wie die Fläche (im Bild blau schraffiert), die dem Integral $\int_0^4 f(x) dx$ entspricht.

Da die Fläche sich unterhalb der x -Achse befindet, ist der Wert des Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x) dx$ negativ.

$$\int_{-6}^{-2} f(x) dx = - \left(\int_0^4 f(x) dx + 2 \cdot 4 \right)$$

$$\int_{-6}^{-2} f(x) dx = -(2 + 8 \ln 5 + 8)$$

$$\int_{-6}^{-2} f(x) dx = -10 - 8 \ln 5$$

Teilaufgabe Teil 2 3a (3 BE)

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm.

Die bisher betrachtete Funktion f gibt für $0 \leq x \leq 15$ die Höhe von S über dem Dosenboden in Zentimetern an; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern (vgl. Abbildung 3).

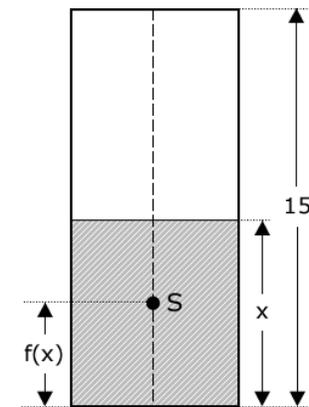


Abb.3

Berechnen Sie $f(0)$ und $f(15)$. Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3a**Anwendungszusammenhang**

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} + 8 = 7,5$$

$$f(15) = 7,5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 7,5$$

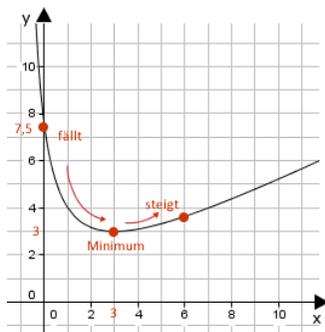
$$\Rightarrow f(0) = f(15)$$

Der Schwerpunkt der leeren Dose ($x = 0$) liegt auf gleicher Höhe wie der Schwerpunkt der vollen Dose ($x = 15$).

Teilaufgabe Teil 2 3b (3 BE)

Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.

Welche Bedeutung im Sachzusammenhang hat die Tatsache, dass x -Koordinate und y -Koordinate des Tiefpunkts von G_f übereinstimmen?

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3b**Anwendungszusammenhang**

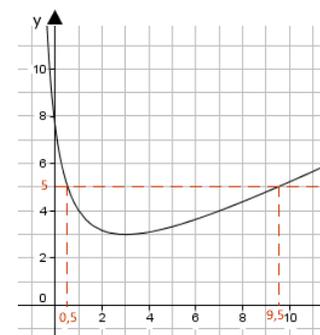
Die Höhe des Schwerpunkts fällt von 7,5 cm auf 3 cm (das Minimum aus Teil 2 Teilaufgabe 1b) und steigt dann wieder an.

Wenn der Schwerpunkt die geringste Höhe erreicht, so liegt er dann auf der Oberfläche der Flüssigkeit.

Teilaufgabe Teil 2 3c (6 BE)

Für welche Füllhöhen x liegt der Schwerpunkt S höchstens 5 cm hoch?

Beantworten Sie diese Frage zunächst näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 und anschließend durch Rechnung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3c**Anwendungszusammenhang**

Der Schwerpunkt liegt höchstens 5 cm hoch für x zwischen 0,5 cm und 9,5 cm.

Ungleichung lösen

$$f(x) \leq 5$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \leq 5$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{8}{x+1} \leq 5,5$$

$$\frac{x(x+1)+16}{2(x+1)} \leq 5,5 \quad | \cdot 2(x+1)$$

$$x^2 + x + 16 \leq 11x + 11$$

$$x^2 - 10x + 5 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,53$$

$$\Rightarrow x_2 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47$$