Abitur 2013 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{3x+9}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Teilaufgabe Teil 1 1a (3 BE)

Bestimmen Sie D und geben Sie die Nullstelle von g an.

Teilaufgabe Teil 1 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(0|3)$.

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

Teilaufgabe Teil 1 2a (2 BE)

$W = [2; +\infty[$

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

$W = [-2; 2]$

Teilaufgabe Teil 1 3 (3 BE)

Geben Sie für $x \in \mathbb{R}^+$ die Lösungen der folgenden Gleichung an:

$$(\ln x - 1) \cdot (e^x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

Teilaufgabe Teil 1 4 (6 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

Skizzieren Sie in Abbildung 1 den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktion $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

Berücksichtigen Sie dabei mit jeweils angemessener Genauigkeit insbesondere die Nullstellen und Extremstellen von F sowie $F(0)$.

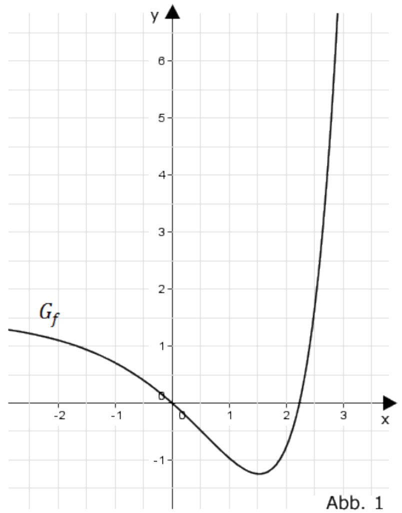


Abb. 1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot e^{-0{,}5x^2}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

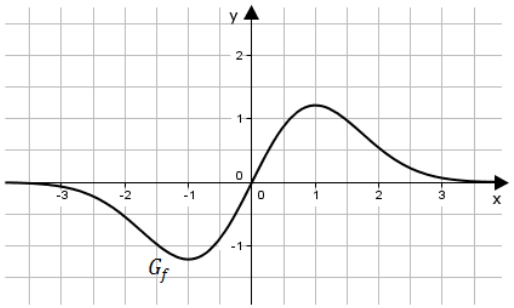


Abb. 2

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und machen Sie anhand des Funktionsterms von f plausibel, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ gilt.

Teilaufgabe Teil 2 1b (6 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = 2e^{-0{,}5x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)$ *; y-Koordinate des Hochpunkts:* $\frac{2}{\sqrt{e}}$)

Teilaufgabe Teil 2 1c (4 BE)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate m_S von f im Intervall $[-0{,}5; 0{,}5]$ sowie die lokale Änderungsrate m_T von f an der Stelle $x = 0$. Berechnen Sie, um wie viel Prozent m_S von m_T abweicht.

Teilaufgabe Teil 2 1d (6 BE)

Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}^+$ schließen für $0 \leq x \leq u$ ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein.
Zeigen Sie, dass $A(u) = 2 - 2e^{-0{,}5u^2}$ gilt. Geben Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$ an und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Teilaufgabe Teil 2 1e (6 BE)

Die Ursprungsgerade h mit der Gleichung $y = \frac{2}{e^2} \cdot x$ schließt mit G_f für $x \geq 0$ ein Flächenstück mit dem Inhalt B vollständig ein.
Berechnen Sie die x-Koordinaten der drei Schnittpunkte der Geraden h mit G_f und zeichnen Sie die Gerade in Abbildung 2 ein. Berechnen Sie B.

(Teilergebnis: x-Koordinate eines Schnittpunkts: 2)

Im Folgenden wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_c: x \mapsto f(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Teilaufgabe Teil 2 2a (2 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von c ohne weitere Rechnung die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von g_c sowie das Verhalten von g_c für $x \to +\infty$ an.

Teilaufgabe Teil 2 2b (3 BE)

Die Anzahl der Nullstellen von g_c hängt von c ab. Geben Sie jeweils einen möglichen Wert von c an, sodass gilt:

$\alpha)$ g_c hat keine Nullstelle.

$\beta)$ g_c hat genau eine Nullstelle.

$\gamma)$ g_c hat genau zwei Nullstellen.

Teilaufgabe Teil 2 2c (2 BE)

Begründen Sie für $c > 0$ anhand einer geeigneten Skizze, dass $\int_0^3 g_c(x)\mathrm{dx} = \int_0^3 f(x)\mathrm{dx} + 3c$ gilt.

Die Anzahl der Kinder, die eine Frau im Laufe ihres Lebens durchschnittlich zur Welt bringt, wird durch eine sogenannte Geburtenziffer angegeben, die jedes Jahr statistisch ermittelt wird.

Die Funktion $g_{1,4}: x \mapsto 2x \cdot e^{-0{,}5x^2} + 1{,}4$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Geburtenziffer in einem europäischen Land. Dabei ist x die seit dem Jahr 1955 vergangene Zeit in Jahrzehnten (d. h. $x = 1$ entspricht dem Jahr 1965) und $g_{1,4}(x)$ die Geburtenziffer. Damit die Bevölkerungszahl in diesem Land langfristig näherungsweise konstant bleibt, ist dort eine Geburtenziffer von etwa $2{,}1$ erforderlich.

Teilaufgabe Teil 2 3a (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von $g_{1,4}$ in Abbildung 2 ein und ermitteln Sie graphisch mit angemessener Genauigkeit, in welchem Zeitraum die Geburtenziffer mindestens $2,1$ beträgt.

Teilaufgabe Teil 2 3b (2 BE)

Welche künftige Entwicklung der Bevölkerungszahl ist auf der Grundlage des Modells zu erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe Teil 2 3c (3 BE)

Im betrachteten Zeitraum gibt es ein Jahr, in dem die Geburtenziffer am stärksten abnimmt. Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für dieses Jahr an. Beschreiben Sie, wie man auf der Grundlage des Modells rechnerisch nachweisen könnte, dass die Abnahme der Geburtenziffer von diesem Jahr an kontinuierlich schwächer wird.

Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{3x+9}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Bestimmen Sie D und geben Sie die Nullstelle von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1a

Definitionsmenge einer Funktion

$g(x) = \sqrt{3x+9}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$g(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $3x+9$, muss größer oder gleich Null sein.

$3x + 9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3$

$\Rightarrow \quad D = [-3; \infty[$

Nullstellen einer Funktion

Ansatz:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion g mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$g(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$g(x) = 0$

$\sqrt{3x+9} = 0$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$g(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $3x+9$, muss gleich Null sein.

$3x+9=0 \quad \Rightarrow \quad x^N=-3$

Teilaufgabe Teil 1 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(0|3)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1b

Tangentengleichung ermitteln

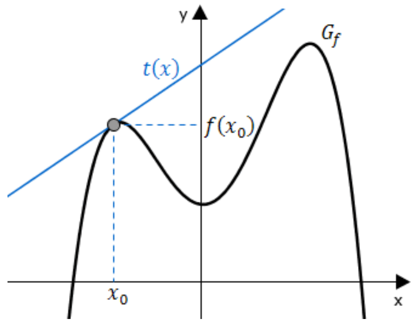
$g(x)=\sqrt{3x+9}$

Tangentengleichung t im Punkt $P(0|3)$:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x)=(x-x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)$



Hier ist $x_0=0$.

$t: y=(x-x_0)\cdot g'\,(x_0)+g\,(x_0)$

$t: y=(x-0)\cdot g'\,(0)+g\,(0)$

Nebenrechnungen:

$g(0)=\sqrt{9}=3$

$g'(x)=\left(\sqrt{3x+9}\right)'$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

(kann auch in der Merkhilfe Mathematik nachgelesen werden)

$g'(x)=\left[(3x+9)^{\frac{1}{2}}\right]'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $u(x) = (\ldots)^{\frac{1}{2}}$ und $v(x) = 3x + 9$.
Dann ist $u'(x) = \frac{1}{2}(\ldots)^{-\frac{1}{2}}$ und $v'(x) = 3$.

$$g'(x) = \frac{1}{2}(3x+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

(kann auch in der Merkhilfe Mathematik nachgelesen werden)

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+9}}$$

$$g'(0) = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad t: y = \frac{1}{2}x + 3$$

Teilaufgabe Teil 1 2a (2 BE)

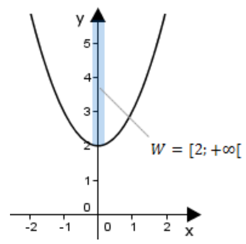
Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

$W = [2; +\infty[$

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2a

Wertemenge einer Funktion

Zum Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$



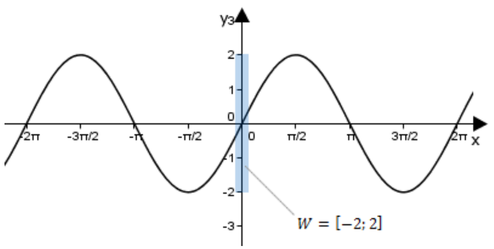
Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

$W = [-2; 2]$

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2b

Wertemenge einer Funktion

Zum Beispiel: $f(x) = 2 \cdot \sin x$



Teilaufgabe Teil 1 3 (3 BE)

Geben Sie für $x \in \mathbb{R}^+$ die Lösungen der folgenden Gleichung an:

$$(\ln x - 1) \cdot (e^x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3

Nullstellen einer Funktion

$$(\ln x - 1) \cdot (e^x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $a \cdot b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

1) $\ln x - 1 = 0$

$\ln x = 1 \qquad |e^x$

$e^{\ln x} = e^1$

$\Rightarrow \qquad x_1 = e$

2) $e^x - 2 = 0$

$e^x = 2 \qquad |\ln x$

$\ln e^x = \ln 2$

$\Rightarrow \qquad x_2 = \ln 2$

3) $\frac{1}{x} - 3 = 0$

$\frac{1}{x} = 3 \qquad | \cdot x$

$3x = 1$

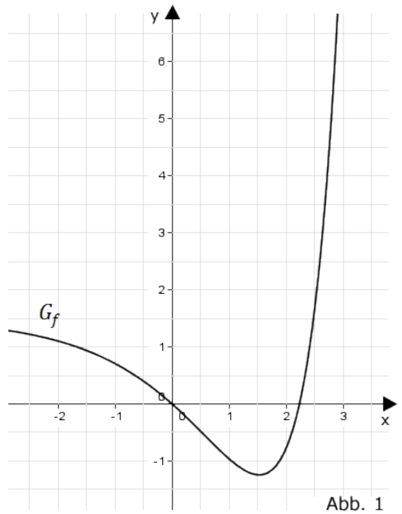
$\Rightarrow \qquad x_3 = \frac{1}{3}$

Teilaufgabe Teil 1 4 (6 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

Skizzieren Sie in Abbildung 1 den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktion $F : x \mapsto \int\limits_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

Berücksichtigen Sie dabei mit jeweils angemessener Genauigkeit insbesondere die Nullstellen und Extremstellen von F sowie $F(0)$.



Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4

Eigenschaften der Integralfunktion

Nullstellen von F:

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

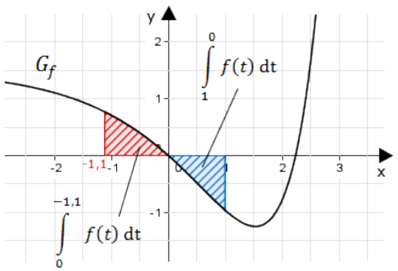
Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int\limits_a^a f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Hier also: $\int\limits_1^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$

$x_1^N = 1$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Die y-Werte der Integralfunktion F sind Flächenstücke, welche die Integrandenfunktion f mit der x-Achse einschließt.

Z.B.: $\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t$ entspricht der Fläche, die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 1 einschließt. Da der Integrationsweg negativ ist und die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert des Integrals positiv (blaue schraffierte Fläche im Bild).

Ist $x < 0$, so entspricht $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ der Summe der Flächen, die G_f mit der x-Achse zwischen x und 1 einschließt. Die Fläche zwischen 0 und 1 ist, wie im Beispiel bereits erklärt, positiv. Die Fläche zwischen x und 0 ist negativ, da der Integrationsweg negativ ist und die Fläche oberhalb der x-Achse liegt (rote schraffierte Fläche im Bild).

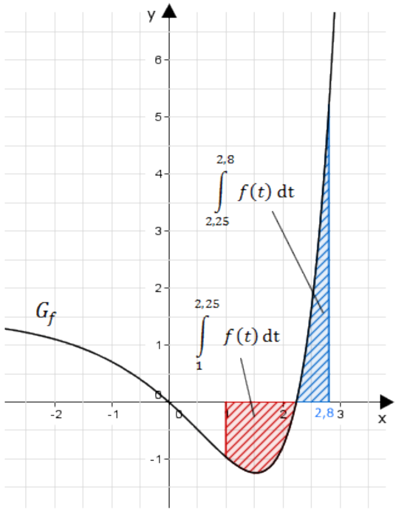
Wenn beide Flächen gleichgroß sind, dann hebt sich ihre Summe zu Null auf.

Gesucht ist also der x-Wert, für welchen gilt: $\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)dt$.

In Abbildung 1 ließt man den Wert $x \approx -1,1$ ab.
(Die Flächeninhalte werden durch Abzählen der Kästchen abgeschätzt.)

$x_2^N \approx -1,1$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Die y-Werte der Integralfunktion F sind Flächenstücke, welche die Integrandenfunktion f mit der x-Achse einschließt.

Z.B.: $\displaystyle\int_1^{2,25} f(t)\mathrm{d}t$ entspricht der Fläche, die G_f mit der x-Achse zwischen 1 und dem Schnittpunkt an der Stelle $x \approx 2,25$ einschließt. Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert des Integrals negativ (rote schraffierte Fläche im Bild).

Ist $x > 2,25$, so entspricht $\displaystyle\int_1^{x} f(t)\mathrm{d}t$ der Summe der Flächen, die G_f mit der x-Achse zwischen 1 und x einschließt. Die Fläche zwischen 1 und 2,25 ist, wie im Beispiel bereits erklärt, negativ. Die Fläche zwischen 2,25 und x ist positiv, da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt (blaue schraffierte Fläche im Bild).

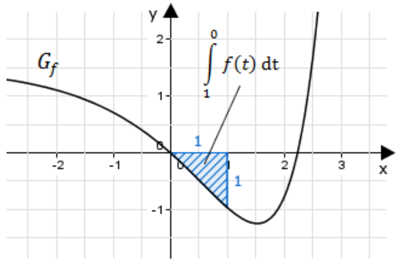
Wenn beide Flächen gleichgroß sind, dann hebt sich ihre Summe zu Null auf.

Gesucht ist also der x-Wert, für welchen gilt: $\displaystyle\int_1^{2,25} f(t)\mathrm{d}t = \int_{2,25}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

In Abbildung 1 ließt man den Wert $x \approx 2,8$ ab.
(Die Flächeninhalte werden durch Abzählen der Kästchen abgeschätzt.)

$x_3^N \approx 2,8$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Das bestimmte Integral $\displaystyle\int_1^{0} f(t)\mathrm{d}t$ entspricht der Fläche, die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 1 einschließt.

Da der Integrationsweg negativ ist und die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert des Integrals positiv (blaue schraffierte Fläche im Bild).

Der Flächeninhalt kann durch Abzählen der Kästchen abgeschätzt werden. In diesem Fall sogar durch die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks.

$F(0) \approx \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

Wert von F für $x = 0$: $\quad F(0) \approx \dfrac{1}{2}$

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Die Extremstellen von F entsprechen den Nullstellen von f.

Extremstellen von F: $\quad x = 0$ und $x \approx 2,25$

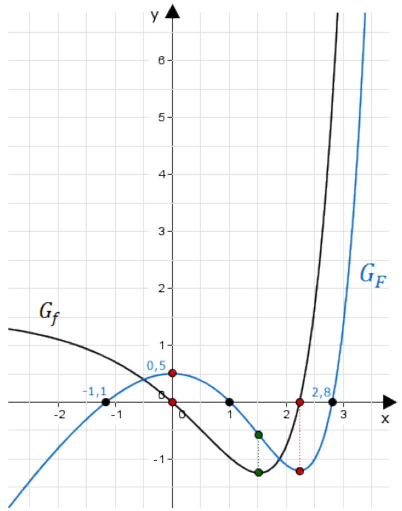
Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Um G_F skizzieren zu können, ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt



Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2x \cdot e^{-0{,}5x^2}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

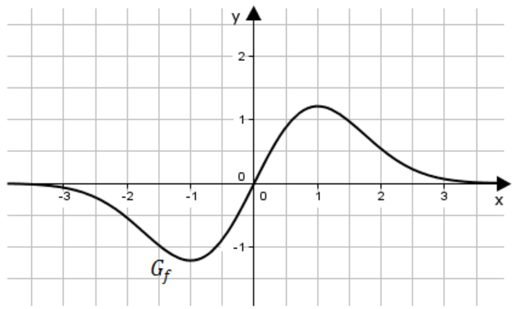


Abb. 2

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und machen Sie anhand des Funktionsterms von f plausibel, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ gilt.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a]

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f(x) = 2x \cdot e^{-0,5x^2}$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\cdot(-x)\cdot e^{-0,5(-x)^2} \\ &= -2x\cdot e^{-0,5x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{2x}_{x\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x^2}}_{x\to 0}$$

Erläuterung: *Grenzwert*

Der Ausdruck “ $0\cdot\infty$“ bzw. “ $\infty\cdot 0$“ ist unbestimmt, d.h. es kann keine Aussage über das Grenzverhalten der Funktion getroffen werden.

Durch umformen des Produkts in einen Bruch, wird das Grenzverhalten auf das einer bekannten Funktion zurückgeführt.

Aus der Merkhilfe für das G8 Abitur: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \quad (r > 0)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{0,5x^2}} = 0$$

Alternative Lösung

Da die e-Funktion schneller wächst als die Funktion $2x$, kann letztere bei der Grenzwertbildung vernachlässigt werden:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{e^{0,5x^2}}_{\to\infty}} = 0$$

Teilaufgabe Teil 2 1b (6 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = 2e^{-0,5x^2}\cdot\left(1 - x^2\right)$; *y-Koordinate des Hochpunkts:* $\frac{2}{\sqrt{e}}$)

[Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b]

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = 2x \cdot e^{-0,5x^2}$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = e^{-0,5x^2}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$v(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^{g(x)}\cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -0,5x^2$.

$$f'(x) = 2\cdot\left[e^{-0,5x^2} + x\cdot e^{-0,5x^2}\cdot(-x)\right]$$

$$f'(x) = 2\cdot e^{-0,5x^2} - 2x^2\cdot e^{-0,5x^2}$$

$f'(x) = 2e^{-0,5x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0,$ daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$0 = 2\underbrace{e^{-0,5x^2}}_{>0} \cdot \left(1 - x^2\right)$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0$ und/oder $b = 0$

Da $e^{-0,5x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $1 - x^2$ untersucht werden.

$1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$\Rightarrow \quad x_1 = -1 \;;\; x_2 = 1$

Lage der möglichen Extrempunkte:

$y_1 = f(x_1) = f(-1) = -2e^{-0,5} = \dfrac{-2}{\sqrt{e}} \quad \Rightarrow \quad E_1\left(-1|\dfrac{-2}{\sqrt{e}}\right)$

$y_2 = f(x_2) = f(1) = 2e^{-0,5} = \dfrac{2}{\sqrt{e}} \quad \Rightarrow \quad E_2\left(1|\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung:

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = e^{-0,5x^2}$ und $v(x) = 1 - x^2$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$u(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -0,5x^2$.

$f''(x) = 2 \cdot \left[e^{-0,5x^2} \cdot (-x) \cdot \left(1 - x^2\right) + e^{-0,5x^2} \cdot (-2x)\right]$

$f''(x) = -2x\,e^{-0,5x^2} \cdot \left(1 - x^2\right) - 4x\,e^{-0,5x^2}$

$f''(x) = -2x\,e^{-0,5x^2} \cdot \left(3 - x^2\right)$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Extremstellen untersuchen:

$f''(-1) = 4e^{-0,5} > 0 \quad \Rightarrow \quad E_1\left(-1|\dfrac{-2}{\sqrt{e}}\right)$ Tiefpunkt

$f''(1) = -4e^{-0,5} < 0 \quad \Rightarrow \quad E_2\left(1|\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$ Hochpunkt

Alternative Lösung

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen: $f'(x) > 0$

$\underbrace{2e^{-0,5x^2}}_{>0} \cdot \left(1 - x^2\right) > 0$

$1 - x^2 > 0 \quad$ für $x \in]-1; 1[$

$1 - x^2 < 0 \quad$ für $x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{für} \quad x \in &]-1;1[\\ f'(x) < 0 & \text{für} \quad x \in &]-\infty;-1[\cup]1;\infty[\end{array}$$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$\Rightarrow \quad E_1 \left(-1 | \dfrac{-2}{\sqrt{e}}\right)$ Tiefpunkt

$\Rightarrow \quad E_2 \left(1 | \dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$ Hochpunkt

Teilaufgabe Teil 2 1c (4 BE)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate m_S von f im Intervall $[-0,5; 0,5]$ sowie die lokale Änderungsrate m_T von f an der Stelle $x = 0$. Berechnen Sie, um wie viel Prozent m_S von m_T abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1c

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate

$f(x) = 2x \cdot e^{-0,5x^2}$

$$m_S = \frac{f(0,5) - f(-0,5)}{0,5 - (-0,5)} = \frac{e^{-0,5^3} - \left(-e^{-0,5^3}\right)}{1} = 2e^{-0,5^3} \approx 1,76$$

Funktionswert berechnen

$f'(x) = 2e^{-0,5x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)$

$m_T = f'(0) = 2e^0 \cdot (1 - 0) = 2$

Prozentrechnung

Prozentuale Abweichung:

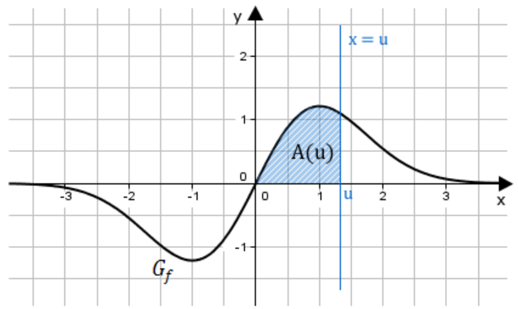
$$\frac{m_T - m_S}{m_T} \approx \frac{2 - 1,76}{2} = 0,12 \qquad \Rightarrow \qquad 0,12 \cdot 100 = 12\%$$

Teilaufgabe Teil 2 1d (6 BE)

Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}^+$ schließen für $0 \leq x \leq u$ ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein.
Zeigen Sie, dass $A(u) = 2 - 2e^{-0,5u^2}$ gilt. Geben Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$ an und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1d

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und u einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_0^u f(x)\mathrm{dx}$$

$$A(u) = \int_0^u f(x)\mathrm{dx}$$

$$A(u) = \int_0^u 2x \cdot e^{-0{,}5x^2}\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

-2 wird aus dem Integral ausgeklammert, damit im Integral eine Funktion der Form $g'(x) \cdot e^{g(x)}$ stehen bleibt.

$$\underbrace{\left(-0,5x^2\right)}_{g(x)}{}' = \underbrace{-x}_{g'(x)}$$

$$A(u) = -2 \cdot \int_0^u (-x) \cdot e^{-0{,}5x^2}\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $(-x) \cdot e^{-0{,}5x^2}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int g'(x) \cdot e^{g(x)}\,\mathrm{dx} = e^{g(x)} + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int (-x) \cdot e^{-0{,}5x^2}\,\mathrm{dx} = e^{-0{,}5x^2}$$

Hier ist $g(x) = -0,5x^2$ und $g'(x) = -x$.

$$A(u) = -2 \cdot \left[e^{-0{,}5x^2}\right]_0^u$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A(u) = -2 \cdot \left(e^{-0{,}5u^2} - e^0\right)$$

$$A(u) = -2 \cdot \left(e^{-0{,}5u^2} - 1\right)$$

$$A(u) = 2 - 2e^{-0{,}5u^2}$$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{u\to+\infty} A(u) = \lim_{u\to+\infty} 2 - 2\underbrace{e^{-0{,}5u^2}}_{\to 0} = 2$$

Das sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück hat den Inhalt 2.

Teilaufgabe Teil 2 1e (6 BE)

Die Ursprungsgerade h mit der Gleichung $y = \frac{2}{e^2} \cdot x$ schließt mit G_f für $x \geq 0$ ein Flächenstück mit dem Inhalt B vollständig ein.
Berechnen Sie die x-Koordinaten der drei Schnittpunkte der Geraden h mit G_f und zeichnen Sie die Gerade in Abbildung 2 ein. Berechnen Sie B.

(Teilergebnis: x-Koordinate eines Schnittpunkts: 2)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1e

Schnittpunkt zweier Funktionen

$$f(x) = 2x \cdot e^{-0{,}5x^2}\,; \; h(x) = \frac{2}{e^2} \cdot x = 2e^{-2} \cdot x$$

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$f(x) = h(x)$

$2x \cdot e^{-0{,}5x^2} = 2e^{-2} \cdot x \qquad | \quad -2e^{-2} \cdot x$

$2x \cdot e^{-0{,}5x^2} - 2e^{-2} \cdot x = 0$

$2x \cdot \left(e^{-0{,}5x^2} - e^{-2}\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

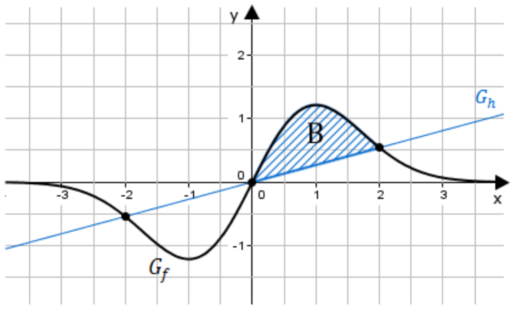
$e^{-0{,}5x^2} - e^{-2} = 0 \qquad | \quad +e^{-2}$

$e^{-0{,}5x^2} = e^{-2}$

$-0,5x^2 = -2$

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3} = \pm 2$

Skizze



Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Flächeninhalt B bestimmen:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche, die G_f mit der Geraden h für $x \geq 0$ einschließt, ist gleich der Fläche, die G_f mit der x-Achse einschließt, minus die Fläche, die G_h mit der x-Achse einschließt.

Man berechnet also das bestimmte Integral von $f(x) - h(x)$.

Die Integrationsgrenzen sind 0 und 2, die x-Koordinaten der Schnittpunkte zwischen G_f und G_h für $x \geq 0$.

$$B = \int_0^2 [f(x) - h(x)] \text{ dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Die Stammfunktion $-2e^{-0{,}5x^2}$ von $f(x)$ wurde in Teil 2 Teilaufgabe 1d bereits bestimmt.

$$B = \left[-2e^{-0{,}5x^2} - 2e^{-2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

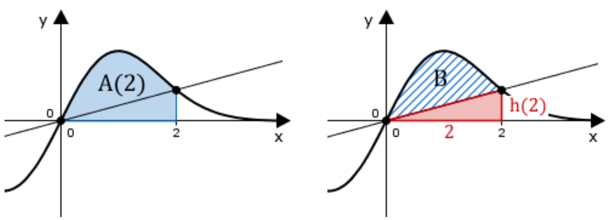
$B = \left(-2e^{-2} - 4e^{-2}\right) - (-2 - 0)$

$B = 2 - 6e^{-2}$

Alternative Lösung

Aus Teil 2 Teilaufgabe 1d ist bekannt: $A(u) = 2 - 2e^{-0{,}5u^2}$

Erläuterung:



B ist gleich $A(2)$ (also A für $u = 2$) minus dem Flächeninhalt des Dreiecks (rot) mit Basis 2 und Höhe $h(2) = 4e^{-2}$.

$B = A(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4e^{-2}$

$B = 2 - 2e^{-2} - 4e^{-2}$

$B = 2 - 6e^{-2}$

Teilaufgabe Teil 2 2a (2 BE)

Im Folgenden wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_c : x \mapsto f(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Geben Sie in Abhängigkeit von c ohne weitere Rechnung die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von g_c sowie das Verhalten von g_c für $x \to +\infty$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a

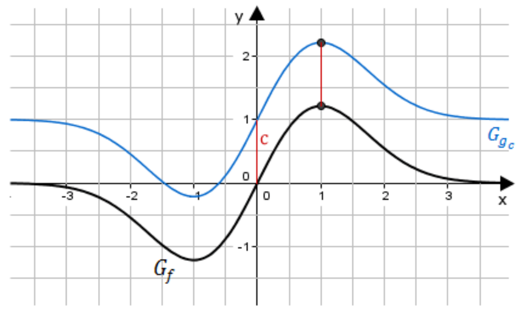
Verschiebung von Funktionsgraphen

Hochpunkt: $HP\left(1 | \frac{2}{\sqrt{e}} + c\right)$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Aus Teil 2 Teilaufgabe 1b ist bekannt, dass der Hochpunkt von G_f die Koordinaten $\left(1 | \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ hat.

Da der Graph von g_c aus dem Graphen G_f durch Verschiebung um c-Einheiten entlang der y-Achse hervor geht, hat der Hochpunkt von g_c die gleiche x-Koordinate und die um c-Einheiten erhöhte y-Koordinate, wie der Hochpunkt von G_f.



Grenzwert bestimmen

$\lim_{x\to\infty} g_c(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{f(x)}_{\to 0} + c = c$

Teilaufgabe Teil 2 2b (3 BE)

Die Anzahl der Nullstellen von g_c hängt von c ab. Geben Sie jeweils einen möglichen Wert von c an, sodass gilt:

α) g_c hat keine Nullstelle.

β) g_c hat genau eine Nullstelle.

γ) g_c hat genau zwei Nullstellen.

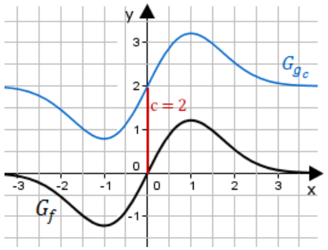
Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b

Verschiebung von Funktionsgraphen

Zum Beispiel:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

g_c hat keine Nullstellen, wenn der Graph von f soweit nach oben/unten entlang der y-Achse verschoben wird, sodass der Tiefpunkt/Hochpunkt von G_f die x-Achse nicht mehr berührt.



α) $c = 2$

Erläuterung:

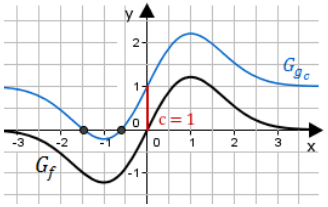
Wenn $c = 0$ ist, dann geht die Funktion g_c in f über.

G_f hat nur eine Nullstelle.

β) $c = 0$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

g_c hat genau zwei Nullstellen, wenn der Graph von f soweit nach oben/unten entlang der y-Achse verschoben wird, sodass G_f die x-Achse zwei Mal schneidet.



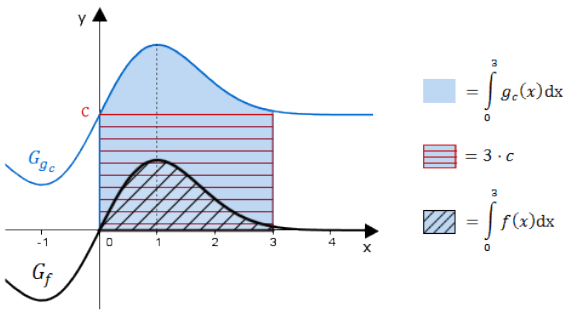
γ) $c = 1$

Teilaufgabe Teil 2 2c (2 BE)

Begründen Sie für $c > 0$ anhand einer geeigneten Skizze, dass $\int_0^3 g_c(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3c$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2c

Abschätzen eines Integrals durch Flächen



Rechnerischer Beweis (nicht verlangt):

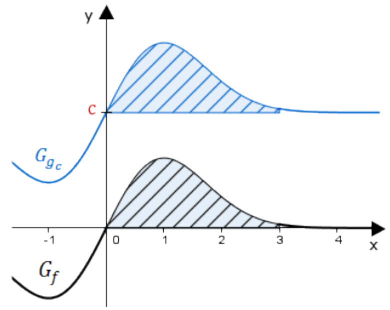
$$\int_0^3 g_c(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 [f(x)+c]\ \mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^3 c\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + [c\,x]_0^3 = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + 3c$$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das Integral $\int_0^3 g_c(x)\mathrm{d}x$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph G_{g_c} mit der x-Achse zwischen 0 und 3 einschließt.

Diese Fläche besteht aus einem Rechteck mit Seitenlängen 3 und c und einer Fläche, die gleich groß ist wie die Fläche, die dem Integral $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ entspricht.

Dies folgt daraus, dass der Graph von G_{g_c} aus dem Graphen von G_f entsteht durch Verschiebung entlang der y-Achse um c-Einheiten.



Teilaufgabe Teil 2 3a (4 BE)

Die Anzahl der Kinder, die eine Frau im Laufe ihres Lebens durchschnittlich zur Welt bringt, wird durch eine sogenannte Geburtenziffer angegeben, die jedes Jahr statistisch ermittelt wird.

Die Funktion $g_{1,4}: x \mapsto 2x \cdot e^{-0,5x^2} + 1,4$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Geburtenziffer in einem europäischen Land. Dabei ist x die seit dem Jahr 1955 vergangene Zeit in Jahrzehnten (d. h. $x = 1$ entspricht dem Jahr 1965) und $g_{1,4}(x)$ die Geburtenziffer. Damit die Bevölkerungszahl in diesem Land langfristig näherungsweise konstant bleibt, ist dort eine Geburtenziffer von etwa $2,1$ erforderlich.

Zeichnen Sie den Graphen von $g_{1,4}$ in Abbildung 2 ein und ermitteln Sie graphisch mit angemessener Genauigkeit, in welchem Zeitraum die Geburtenziffer mindestens $2,1$ beträgt.

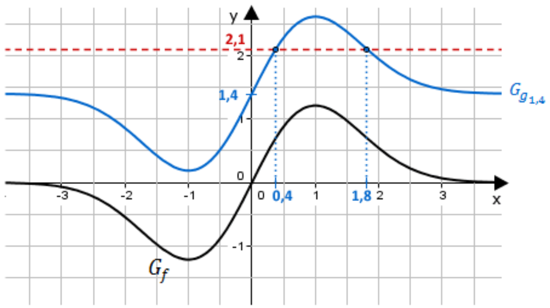
[Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3a]

Werte am Graphen ablesen

Graphen $G_{g_{1,4}}$ in Abbildung 2 eintragen:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Der Graph von $g_{1,4}$ entsteht durch Verschiebung des Graphen von f entlang der y-Achse um $1,4$ Einheiten.



Erläuterung:

Man zeichnet die Gerade $y = 2,1$ ein und ließt die x-Werte der Schnittpunkte mit dem Graphen von $g_{1,4}$ ab.

Da x für die ab 1955 vergangenen Jahrzehnten steht, folgt:

$x_1 \approx 0,4 \quad \Rightarrow \quad 1955 + 0,4 \cdot 10 = 1959$

$x_1 \approx 1,8 \quad \Rightarrow \quad 1955 + 1,8 \cdot 10 = 1973$

Die Geburtenziffer beträgt im Zeitraum von 1959 bis 1973 mindestens $2,1$.

Teilaufgabe Teil 2 3b (2 BE)

Welche künftige Entwicklung der Bevölkerungszahl ist auf der Grundlage des Modells zu erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3b]

Anwendungszusammenhang

Auf der Grundlage des Modells ist die Geburtenziffer vom Jahr 1974 an kleiner als 2,1. Damit ist künftig eine Abnahme der Bevölkerungszahl zu erwarten.

Oder/und:

$\lim\limits_{x\to\infty} g_{1,4} = 1,4$

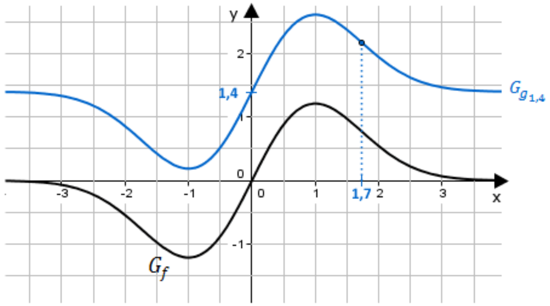
Die Funktion $g_{1,4}$ nähert sich dem Wert 1,4 für immer größer werdendes x.

Teilaufgabe Teil 2 3c (3 BE)

Im betrachteten Zeitraum gibt es ein Jahr, in dem die Geburtenziffer am stärksten abnimmt. Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für dieses Jahr an. Beschreiben Sie, wie man auf der Grundlage des Modells rechnerisch nachweisen könnte, dass die Abnahme der Geburtenziffer von diesem Jahr an kontinuierlich schwächer wird.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3c]

Anwendungsaufgabe



Erläuterung: *Wendepunkt*

Die stärkste Abnahme findet im Wendepunkt statt. Der Wendepunkt ist das Extremum der ersten Ableitung.

Da x für die ab 1955 vergangenen Jahrzehnten steht, folgt:

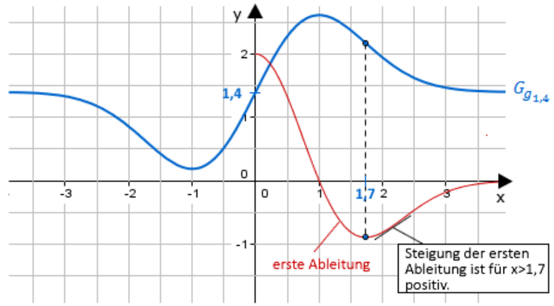
$x^W \approx 1{,}7 \qquad \Rightarrow \qquad 1955 + 1{,}7 \cdot 10 = 1972$

Näherungswert: 1972

Erläuterung: *zweite Ableitung*

Die 2. Ableitung gibt die Änderung der Steigung an. Ist die zweite Ableitung ab einem bestimmten x-Wert an positiv, so bedeutet das, dass die erste Ableitung monoton steigend ist.

Ist die Funktion selbst monoton fallend, bedeutet dies, dass die Funktion immer schwächer fällt



Man müsste für $x > 1{,}7$ zeigen, dass $g''_{1,4}(x) > 0$ gilt.