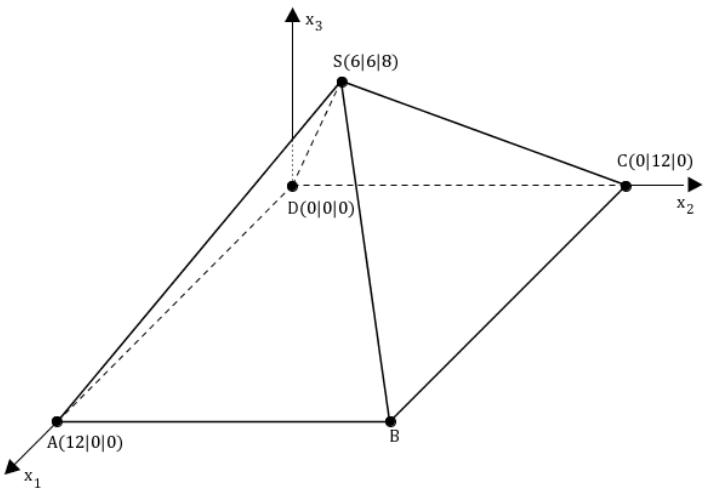
Abitur 2013 Mathematik Geometrie VI

Die Abbildung zeigt modellhaft einen Ausstellungspavillon, der die Form einer geraden vierseitigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat und auf einer horizontalen Fläche steht. Das Dreieck BCS beschreibt im Modell die südliche Außenwand des Pavillons. Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m, d. h. die Grundfläche des Pavillons hat eine Seitenlänge von 12 m.



Teilaufgabe 1a (3 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Punkts B an und bestimmen Sie das Volumen des Pavillons.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Die südliche Außenwand des Pavillons liegt im Modell in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$)

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Der Innenausbau des Pavillons erfordert eine möglichst kurze, dünne Strebe zwischen dem Mittelpunkt der Grundfläche und der südlichen Außenwand. Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Grundfläche die Strebe an der Außenwand befestigt ist.

An einem Teil der südlichen Außenwand sind Solarmodule flächenbündig montiert. Die Solarmodule bedecken im Modell eine dreieckige Fläche, deren Eckpunkte die Spitze S sowie die Mittelpunkte der Kanten $[SB]$ und $[SC]$ sind.

Teilaufgabe 1d (4 BE)

Ermitteln Sie den Inhalt der von den Solarmodulen bedeckten Fläche.

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Die von Solarmodulen abgegebene elektrische Leistung hängt unter anderem von der Größe ihres Neigungswinkels gegen die Horizontale ab. Die Tabelle gibt den Anteil der abgegebenen Leistung an der maximal möglichen Leistung in Abhängigkeit von der Größe des Neigungswinkels an. Schätzen Sie diesen Anteil für die Solarmodule des Pavillons - nach Berechnung des Neigungswinkels - unter Verwendung der Tabelle ab.

Neigungswinkel	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Anteil an der maximalen Leistung	87 %	93 %	97 %	100 %	100 %	98 %	94 %	88 %	80 %	69 %

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, gegeben. Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt T.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

(Ergebnis: $T(2|-1|3)$)

Teilaufgabe 2b (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten zweier Punkte P und Q an, die auf g liegen und von T gleich weit entfernt sind.

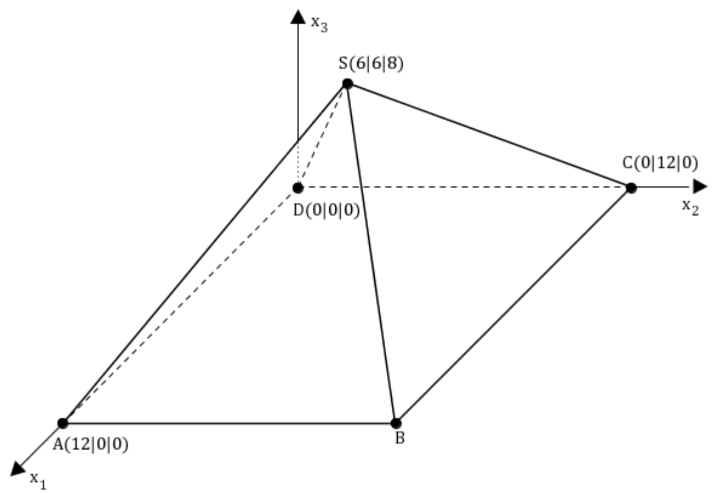
Teilaufgabe 2c (4 BE)

Zwei Punkte U und V der Geraden h bilden zusammen mit P und Q das Rechteck $PUQV$. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten von U und V.

Lösung

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Die Abbildung zeigt modellhaft einen Ausstellungspavillon, der die Form einer geraden vierseitigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat und auf einer horizontalen Fläche steht. Das Dreieck BCS beschreibt im Modell die südliche Außenwand des Pavillons. Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m, d. h. die Grundfläche des Pavillons hat eine Seitenlänge von 12 m.



Geben Sie die Koordinaten des Punkts B an und bestimmen Sie das Volumen des Pavillons.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Lage eines Punktes

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(12|12|0)$

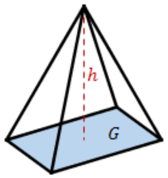
Erläuterung:

Der Punkt B kann auch ohne Berechnung angegeben werden.
Weil die Grundfläche quadratisch ist, liegt der Punkt B auf der gleichen Höhe wie die Punkte A und C.

Volumen einer Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Hier ist die Grundfläche ein Quadrat mit Kantenlänge 12 m.
Die Höhe der Pyramide entspricht der x_3-Koordinate des Punktes S, da die Grundfläche in der $x_1 x_2$-Ebene liegt.

$$V = \frac{1}{3} \cdot (12 \cdot 12) \cdot 8$$

$$V = 384 \text{ m}^3$$

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Die südliche Außenwand des Pavillons liegt im Modell in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Ebene aus drei Punkte

$B(12|12|0)$, $C(0|12|0)$, $S(6|6|8)$

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

B sei der Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 24 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (B ist Aufpunkt):

$$E : \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E : 4x_2 + 3x_3 = 0 + 48 + 0$

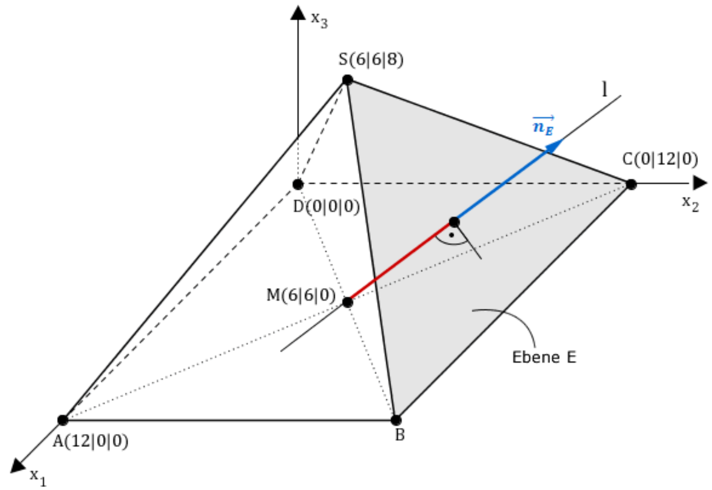
$E : 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Der Innenausbau des Pavillons erfordert eine möglichst kurze, dünne Strebe zwischen dem Mittelpunkt der Grundfläche und der südlichen Außenwand. Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Grundfläche die Strebe an der Außenwand befestigt ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Geradengleichung aufstellen



Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Da die Grundfläche quadratisch ist, liegt der Mittelpunkt auf halber Höhe der Punkte A und C.

Rechnerisch:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12+0 \\ 0+12 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt der Grundfläche: $M(6|6|0)$

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene, Lotgerade auf einer Ebene*

Eine möglichst kurze Strebe bedeutet, dass der Abstand zwischen Mittelpunkt der Grundfläche und Ankerpunkt an der südlichen Außenwand möglichst klein ist.

Dieser Abstand ist gegeben durch $d(M, E)$, also der Abstand vom Punkt M zur Ebene E (die die südlichen Außenwand enthält).

Man stelle also eine Gerade auf, die durch den Punkt M und senkrecht zur Ebene verläuft (Lotgerade). Der Schnittpunkt zwischen der Geraden und der Ebene ist der gesuchte Ankerpunkt.

Gleichung der Lotgerade l, die durch M und senkrecht zur Ebene E verläuft, aufstellen:

Erläuterung: *Richtungsvektor, Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

Der Richtungsvektor der Geraden l ist der Normalenvektor der Ebene E, da dieser senkrecht darauf steht.

$$l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}}$$

Schnitt Ebene und Gerade

$E: 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$

Ebene E und Gerade l schneiden: $\quad E \cap l$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade, Einsetzen*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

$$\begin{aligned} E \cap l: \quad 4 \cdot (6 + 4\lambda) + 3 \cdot (0 + 3\lambda) - 48 &= 0 \\ 24 + 16\lambda + 9\lambda - 48 &= 0 \\ 25\lambda &= 24 \\ \lambda &= \tfrac{24}{25} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wird der gefundene λ-Wert in die Geradengleichung eingesetzt.

Da hier nur die Höhe des Schnittpunktes verlangt ist, reicht es die x_3-Koordinate des Schnittpunktes zu berechnen.

Höhe bestimmen:

$$h = 3 \cdot \lambda = 3 \cdot \frac{24}{25} = 2,88 \text{ m}$$

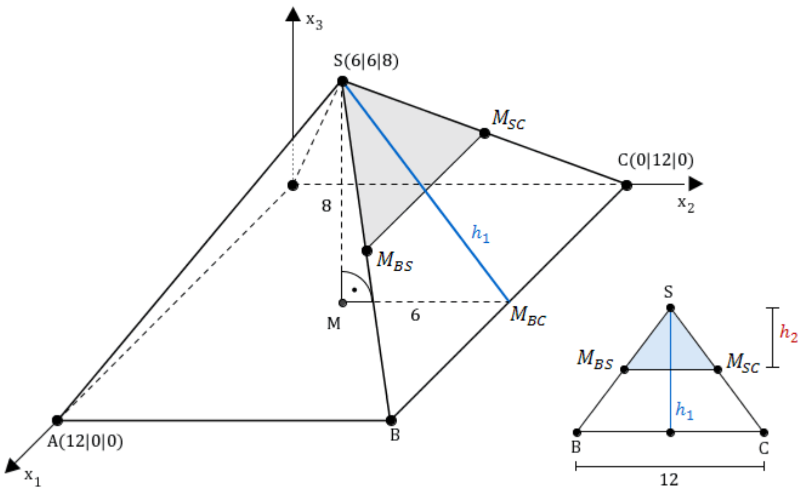
Teilaufgabe 1d (4 BE)

An einem Teil der südlichen Außenwand sind Solarmodule flächenbündig montiert. Die Solarmodule bedecken im Modell eine dreieckige Fläche, deren Eckpunkte die Spitze S sowie die Mittelpunkte der Kanten $[SB]$ und $[SC]$ sind.

Ermitteln Sie den Inhalt der von den Solarmodulen bedeckten Fläche.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

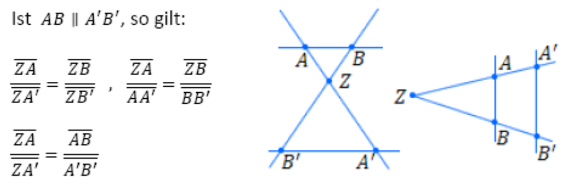
Flächeninhalt eines Dreiecks



Betrachtet wird das Dreieck BCS mit den Mittelpunkten M_{BS}, M_{SC} und M_{BC} der jeweiligen Kanten und der Höhe h_1. Die Höhe des Dreiecks $M_{BS}M_{SC}S$ ist mit h_2 gekennzeichnet. Mit den Strahlensatz gilt:

Erläuterung: *Strahlensatz*

Aus der Merkhilfe Mathematik:



Im Dreieck BCS gilt also: $\dfrac{\overline{SM_{SC}}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{M_{BS}M_{SC}}}{\overline{BC}}$ und $\dfrac{\overline{SM_{SC}}}{\overline{SC}} = \dfrac{h_2}{h_1}$

Da M_{SC} die Strecke $[SC]$ halbiert, gilt somit: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{M_{BS}M_{SC}}}{12}$ und $\dfrac{1}{2} = \dfrac{h_2}{h_1}$

$$\left|\overrightarrow{M_{BS}M_{SC}}\right| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1$$

Betrachtet wird nun das rechtwinklige Dreieck SMM_{BC}, wobei M der Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide ist. Für die Höhe des Dreiecks BCS gilt:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

Im rechtwinkligen Dreieck SMM_{BC} wird für die Berechnung der Hypotenuse h_1 der Satz des Pythagoras angewendet.

$$h_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad h_2 = 5 \text{ m}$$

Flächeninhalt $A_{M_{BS}M_{SC}S}$ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

$$A_{M_{BS}\,M_{SC}\,S} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{M_{BS}\,M_{SC}}\right| \cdot h_2$$

$$A_{M_{BS}\,M_{SC}\,S} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15 \ \text{m}^2$$

Alternative Lösung

Flächeninhalt des Dreiecks BCS:

$$A_{BCS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{SB}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix}\right| = 60 \ \text{m}^2$$

Mit dem Strahlensatz gilt:

$$A_{M_{BS}\,M_{SC}\,S} = \frac{1}{4}A_{BCS} = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15 \ \text{m}^2$$

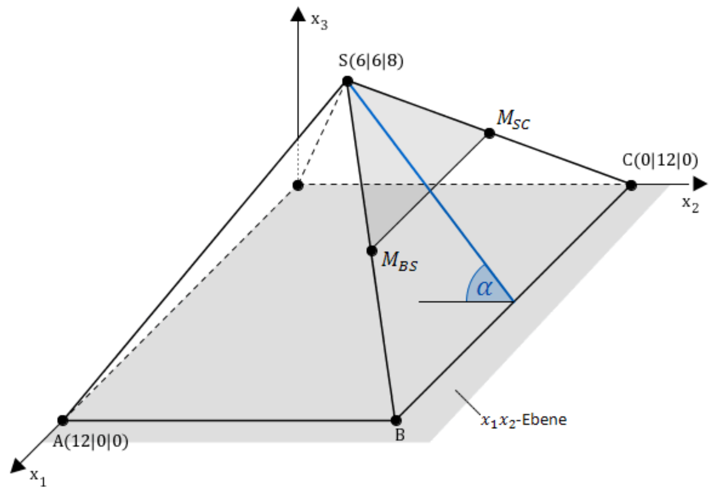
Teilaufgabe 1e (4 BE)

Die von Solarmodulen abgegebene elektrische Leistung hängt unter anderem von der Größe ihres Neigungswinkels gegen die Horizontale ab. Die Tabelle gibt den Anteil der abgegebenen Leistung an der maximal möglichen Leistung in Abhängigkeit von der Größe des Neigungswinkels an. Schätzen Sie diesen Anteil für die Solarmodule des Pavillons - nach Berechnung des Neigungswinkels - unter Verwendung der Tabelle ab.

Neigungswinkel	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Anteil an der maximalen Leistung	87 %	93 %	97 %	100 %	100 %	98 %	94 %	88 %	80 %	69 %

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Winkel zwischen zwei Ebenen

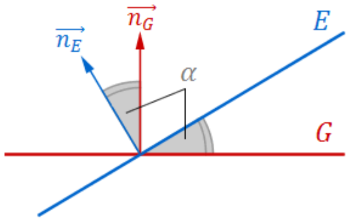


$$E: 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{(Normalenvektor der Ebene } E\text{)}$$

$$x_1\,x_2\text{−Ebene: } x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n}_{x_1\,x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Normalenvektor der Horizontalen)}$$

Neigungswinkel α bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel zwischen den Normalenvektoren bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{0+0+3}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{1}}$$

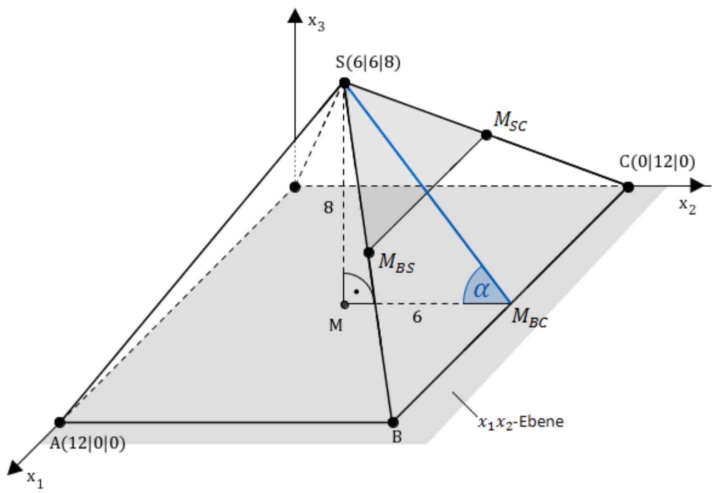
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13^\circ$

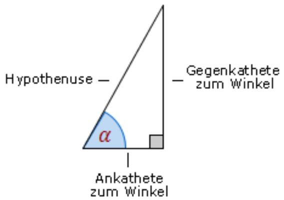
$\Rightarrow$ Anteil Leistung laut Tabelle zwischen 94 % und 98 %.

Alternative Lösung

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $M\,M_{BC}\,S$ aus Teilaufgabe 1d:



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{SM}}{\overline{MM_{BC}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) \approx 53,13^\circ$$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, gegeben. Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt T.

Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

(Ergebnis: $T(2|-1|3)$)

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Schnitt zweier Geraden

Gerade g und h schneiden: $g \cap h$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen werden gleichgesetzt. Es entsteht somit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ wird auf die linke Seite gebracht.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{I.} & 9+3\lambda & = & \mu \\ \text{II.} & -4+\lambda & = & -2\mu \\ \text{III.} & 16+2\lambda & = & 4\mu \end{array}$$

$2 \cdot \text{I} + \text{II}: \quad 14 + 7\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$

$\lambda = -2$ in I: $\quad \mu = 3$

Schnittpunkt T bestimmen:

Erläuterung: *Einsetzen*

$\mu = 3$ wird in die Gerade h eingesetzt.
(oder $\lambda = -2$ in die Gerade g)

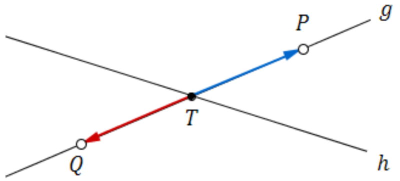
$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(2|-1|3)$$

Teilaufgabe 2b (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten zweier Punkte P und Q an, die auf g liegen und von T gleich weit entfernt sind.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Lage eines Punktes



$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$T(2|-1|3)$

> Erläuterung: *Lage des Punktes*
>
> Dem Punkt T wird einmal der Richtungsvektor aufaddiert und einmal abgezogen. Da der Punkt T auf g liegt, entstehen somit zwei Punkte der Geraden g, die gleich weit vom Punkt T entfernt sind.

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{T} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(5|0|5)$$

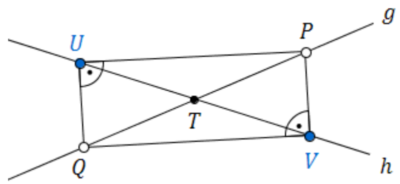
$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{T} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q(-1|-2|1)$$

Teilaufgabe 2c (4 BE)

Zwei Punkte U und V der Geraden h bilden zusammen mit P und Q das Rechteck $PUQV$. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten von U und V.

Lösung zu Teilaufgabe 2c

Koordinaten von Punkten ermitteln



1) Da V auf h liegt, ist $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -1+\mu \\ 5-2\mu \\ -9+4\mu \end{pmatrix}$.

2) $\overrightarrow{VQ} \circ \overrightarrow{VP} = 0$

3) Parameter μ ausrechnen.

4) Parameterwerte in h einsetzen.

Alternative Lösung

1) $d = \left|\overrightarrow{TP}\right|$ bestimmen.

2) Richtungsvektor der Geraden h normieren $\quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V^0} = \dfrac{1}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{T} + d \cdot \overrightarrow{V^0}$

4) $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{T} - d \cdot \overrightarrow{V^0}$