Fachabitur 2012 Mathematik T Infinitesimalrechnung A II

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 + a\,x}{2x - 4}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Geben Sie D an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Lage und Anzahl der Nullstellen von f_a.

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Anzahl, Abszissenwerte und Art der Extrempunkte von G_a.

[mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2a}{2 \cdot (x-2)^2}$]

Für $a = -5$ erhält man die Funktion $f_{-5} : x \mapsto \frac{x^2 - 5x}{2x - 4}$, $x \in D$.

Teilaufgabe 1.4.1 (4 BE)

Bestimmen Sie Gleichungen aller Asymptoten von G_{-5} und geben Sie die Nullstellen von f_{-5} an.

Teilaufgabe 1.4.2 (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_{-5}.

Teilaufgabe 1.4.3 (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade h mit der Gleichung $y = \frac{7}{12}x - \frac{2}{3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ Tangente an dem Graphen G_{-5} ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P.
[Teilergebnis: $P(-4; -3)$]

Teilaufgabe 1.4.4 (6 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_{-5} mit seinen Asymptoten und der Tangente aus 1.4.3 für $-6 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\,\mathrm{LE} = 1\,\mathrm{cm}$

Teilaufgabe 1.4.5 (3 BE)

Bestimmen Sie mittels Integration eine Stammfunktion F_{-5} der Funktion f_{-5}.

[mögliches Teilergebnis: $F_{-5}(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right)$]

Teilaufgabe 1.4.6 (9 BE)

Der Graph G_{-5} schließt zusammen mit der Tangente h aus 1.4.3 und der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses im Schaubild der Aufgabe 1.4.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Nach der Einnahme eines Medikaments kann man dessen Konzentration im Blut des Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden nach der Einnahme beschreibt die Funktion g mit dem Funktionsterm $g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$ die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit der Einnahme), wobei auf das Mitführen der Einheiten verzichtet wird. Nach 6 Stunden seit der Einnahme erfolgt der weitere Abbau des Medikaments dann linear.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten und den Zeitpunkt, zu dem diese vorliegt.
[Teilergebnisse: $\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = (10 - 5t) \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$
maximale Konzentration $\approx 7{,}36 \left(\frac{\mathrm{mg}}{\ell}\right)$]

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am schnellsten abgebaut wird.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente s an den Graphen von g im Punkt $P(6; g(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente s und berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $k : t \mapsto k(t)$, die die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten innerhalb der ersten 9 Stunden nach der Einnahme beschreibt.

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren den Zeitpunkt, zu dem sich die Konzentration des Medikaments im Blut auf die Hälfte der maximalen Konzentration reduziert hat. Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 5$ und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \dfrac{x^2 + a\,x}{2x - 4}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

Geben Sie D an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke in Abhängigkeit von a.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Definitionsbereich bestimmen

$$f_a(x) = \frac{x^2 + a\,x}{2x - 4}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f_a(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $2x - 4$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$\Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Art der Definitionslücke bestimmen

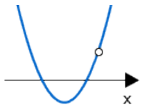
$$f_a(x) = \frac{x^2 + a\,x}{2x - 4} = \frac{x(x + a)}{2(x - 2)}$$

Fallunterscheidung:

Erläuterung: *Art der Definitionslücke*

Die Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ sind die Nullstellen der Nennerfunktion $h(x)$.

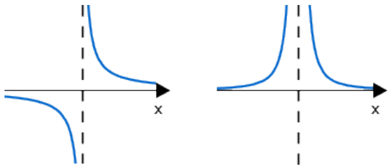
Ist x_0 gleichzeitig Nullstelle der Zähler- und der Nennerfunktion mit gleicher Vielfachheit, so ist die Definitionslücke hebbar („Loch" im Graphen).



hebbare Definitionslücke

Ist x_0 gleichzeitig Nullstelle der Zähler- und der Nennerfunktion, deren Vielfachheit im Nenner größer ist als im Zähler, oder ist x_0 nur Nullstelle der Nennerfunktion, so ist die Definitionslücke ein Pol.

Die Vielfachheit einer Nennernullstelle <u>nach</u> dem Kürzen (wenn möglich) ist gleich der Ordnung des Pols.



Pol 1. Ordnung   Pol 2. Ordnung

Beispiel:

$f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)^3}$ hat einen Pol an der Stelle $x = 1$.

Kürzen: $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)^3} = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

f hat an der Stelle $x = 1$ einen Pol zweiter Ordnung.

1. Fall: $a = -2 \quad \Rightarrow \quad f_{-2}(x) = \dfrac{x(x-2)}{2(x-2)}$

$\Rightarrow$ hebbare Definitionslücke an der Stelle $x = 2$

2. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$\Rightarrow$ Pol erster Ordnung an der Stelle $x = 2$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Lage und Anzahl der Nullstellen von f_a.

<u>Lösung zu Teilaufgabe 1.2</u>

Nullstellen einer Funktion

$$f_a(x) = \frac{x^2 + a\,x}{2x - 4}$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f_a(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2 + a\,x}{2x - 4} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$x^2 + a\,x = 0$

$x(x + a) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.
Jeder Faktor wird untersucht.

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = 0$

$x + a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^N = -a$

Fallunterscheidung:

Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Der Faktor $(x + a)$ verändert sich für verschiedene Werte von a.
Spezialfälle sind $a = 0$ (hier nimmt der Faktor die Form eines anderen Faktors an, der in der Funktionsgleichung vorkommt) und $a = -2$ (hier hat der Funktionsgraph eine hebbare Definitionslücke; siehe Aufgabe 1.1).

1. Fall: $a = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0(x) = \dfrac{x^2}{2x-4}$

$\Rightarrow \quad x^N = 0$ ist einzige Nullstelle (doppelte)

2. Fall: $a = -2 \quad \Rightarrow \quad f_{-2}(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{2x-4} = \dfrac{x(x-2)}{2(x-2)}$

(hebbare Lücke; siehe Aufgabe 1.1)

$\Rightarrow \quad x^N = 0$ ist einzige Nullstelle (einfache)

3. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\} \quad \Rightarrow \quad f_0(x) = \dfrac{x(x+a)}{2x-4}$

$\Rightarrow \quad f_a$ hat zwei einfache Nullstellen: $x_1^N = 0$ und $x_2^N = -a$

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Anzahl, Abszissenwerte und Art der Extrempunkte von G_a.

[mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 2a}{2 \cdot (x-2)^2}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Art von Extrempunkten ermitteln

$$f_a(x) = \frac{x^2 + a\,x}{2x - 4}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = x^2 + a\,x$ und $v(x) = 2x - 4$.
Dann ist $u'(x) = 2x + a$ und $v'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{(2x+a)(2x-4) - (x^2 + a\,x) \cdot 2}{(2x-4)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x + 2a\,x - 4a - 2x^2 - 2a\,x}{(2(x-2))^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x - 4a}{4(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 2a}{2(x-2)^2} \end{aligned}$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$$f_a'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 2a}{2(x-2)^2} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$x^2 - 4x - 2a = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$$x^E_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8a}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4(4 + 2a)}}{2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{4 + 2a}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 + 2a}$$

$x^E_1 = 2 + \sqrt{4 + 2a}$

$x^E_2 = 2 - \sqrt{4 + 2a}$

Fallunterscheidung:

Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Unter der Wurzel darf keine negative Zahl stehen.
Der Radikand $4 + 2a$ ist negativ für $a < -2$, Null für $a = -2$ und positiv für $a > -2$.
Man unterscheidet also drei Fälle:

1. Fall: $a < -2$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Extremstellen

2. Fall: $a = -2 \quad \Rightarrow \quad x^E = 2 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (siehe Teilaufgabe 1.1)

$\Rightarrow$ Es gibt keine Extremstellen

3. Fall: $a > -2$

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Extremstellen

$x^E_1 = 2 + \sqrt{4 + 2a} \quad$ und $\quad x^E_2 = 2 - \sqrt{4 + 2a}$

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$$\frac{x^2 - 4x - 2a}{2(x-2)^2} > 0$$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

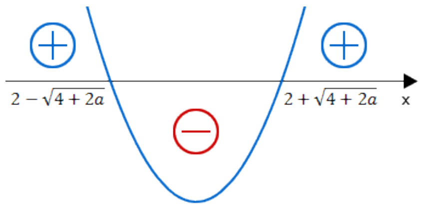
Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\dfrac{3}{5} > 0$ oder $\dfrac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\dfrac{-3}{5} < 0$ oder $\dfrac{3}{-5} < 0$)

Da $2(x-2)^2 > 0$ für alle $x \in D$ genügt es den Zähler zu betrachten.

$x^2 - 4x - 2a > 0$

$x^2 - 4x - 2a$ kann als eine nach oben geöffnete Parabel aufgefasst werden mit Nullstellen bei $2 + \sqrt{4 + 2a}$ und $2 - \sqrt{4 + 2a}$.



An der Stelle $2+\sqrt{4+2a}$ findet ein Vorzeichenwechsel von $(-)$ nach $(+)$ statt.

$\Rightarrow$ Minimum an der Stelle $x_1^E = 2+\sqrt{4+2a}$

An der Stelle $2-\sqrt{4+2a}$ findet ein Vorzeichenwechsel von $(+)$ nach $(-)$ statt.

$\Rightarrow$ Maximum an der Stelle $x_2^E = 2-\sqrt{4+2a}$

Teilaufgabe 1.4.1 (4 BE)

Für $a=-5$ erhält man die Funktion $f_{-5}: x \mapsto \dfrac{x^2-5x}{2x-4}$, $x \in D$.

Bestimmen Sie Gleichungen aller Asymptoten von G_{-5} und geben Sie die Nullstellen von f_{-5} an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4.1

Asymptoten bestimmen

$$f_{-5}(x) = \frac{x^2-5x}{2x-4}$$

Pol erster Ordnung an der Stelle $x=2$. (siehe Aufgabe 1.1)

$\Rightarrow$ Senkrechte Asymptote: $x=2$

Schräge Asymptote bestimmen mittels Polynomdivision:

Erläuterung: *Polynomdivision*

Eine Polynomdivision ist ein Verfahren zur Berechnung der Summenschreibweise gebrochenrationaler Funktionen.

Um beispielsweise den Term $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ als Summe zu schreiben, wird folgende Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{l}
(x^2 \quad +x \ -2\ ) : (x-1) = x+2 \\
\underline{-(x^2 \quad -x)} \\
\qquad\quad 2x \ -2 \\
\qquad \underline{-(2x \ -2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(x^2 \quad -5x) \quad : (2x-4) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{6}{2x-4} \\
\underline{-(x^2 \quad -2x)} \\
\qquad\quad -3x \\
\qquad \underline{-(-3x \ +6)} \\
\qquad\qquad -6
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Schräge Asymptote: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

Nullstellen einer Funktion

Nullstellen bei $x_1^N = 0$ und $x_2^N = -a$ (siehe Teilaufgabe 1.2)

Für $a=-5$ sind dann die Nullstellen $x_1^N = 0$ und $x_2^N = 5$

Teilaufgabe 1.4.2 (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_{-5}.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4.2

Monotonieverhalten einer Funktion

$f'_a(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 2a}{2(x-2)^2}$ (siehe Aufgabe 1.3)

$f'_{-5}(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 10}{2(x-2)^2}$

> Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*
>
> Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.
>
> Es gilt:
>
> $f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.
>
> $f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\dfrac{x^2 - 4x + 10}{2(x-2)^2} > 0$

> Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*
>
> Die erste Ableitung ist ein Bruch.
>
> Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\dfrac{3}{5} > 0$ oder $\dfrac{-3}{-5} > 0$).
>
> Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\dfrac{-3}{5} < 0$ oder $\dfrac{3}{-5} < 0$)
>
> Da $2(x-2)^2 > 0$ für alle $x \in D$, genügt es den Zähler zu betrachten.

$x^2 - 4x + 10 > 0$

$x^2 - 4x + 10$ kann als eine nach oben geöffnete Parabel ohne Nullstellen angesehen werden.

> Erläuterung:
>
> $x^2 - 4x - 2a$ hat Nullstellen bei $x^E_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 2a}$ (siehe Aufgabe 1.3).
>
> Setzt man für $a = -5$ ein, erhält man $x^E_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 2 \cdot (-5)} = 2 \pm \sqrt{-6}$.
> Unter der Wurzel darf keine negative Zahl stehen.
>
> $x^2 - 4x + 10$ hat also keine Nullstellen.

$x^2 - 4x + 10 > 0$ für alle $x \in D$

$\Rightarrow$ f_{-5} ist auf ganz D streng monoton steigend

Teilaufgabe 1.4.3 (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade h mit der Gleichung $y = \dfrac{7}{12}x - \dfrac{2}{3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ Tangente an dem Graphen G_{-5} ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P.
[Teilergebnis: $P(-4; -3)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.4.3

Tangentengleichung ermitteln

$f_{-5}(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{2x - 4}$

$h(x) = \dfrac{7}{12}x - \dfrac{2}{3}$

Berührpunkt berechnen:

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.
>
> Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$h(x) = f_{-5}(x)$

$\frac{7}{12}x - \frac{2}{3} = \frac{x^2 - 5x}{2x - 4}$

$\left(\frac{7}{12}x - \frac{2}{3}\right)(2x - 4) = x^2 - 5x$

$\frac{7}{6}x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} - x^2 + 5x = 0$

$\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = 0$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x + 4)^2 = 0$

$x = -4$ (doppelte Lösung)

Erläuterung: *Berührpunkt*

Ist das Ergebnis eines Schnittproblems eine doppelte Lösung, so handelt es sich um einen Berührpunkt.

$\Rightarrow$ $h(x)$ ist Tangente zu $f_{-5}(x)$.

$x = -4$ in $h(x)$ (oder $f_{-5}(x)$) einsetzen und y-Koordinate berechnen:

$y = \frac{7}{12} \cdot (-4) - \frac{2}{3} = -3$

$\Rightarrow$ Berührpunkt $P(-4| - 3)$

Teilaufgabe 1.4.4 (6 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_{-5} mit seinen Asymptoten und der Tangente aus 1.4.3 für $-6 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$

Lösung zu Teilaufgabe 1.4.4

Skizze

$f_{-5}(x) = \frac{x^2 - 5x}{2x - 4}$

Nullstellen: (siehe Aufgabe 1.4.1)

$x_1^N = 0$

$x_2^N = 5$

Monotonie: (siehe Aufgabe 1.4.2)

f_{-5} ist auf ganz D streng monoton steigend

Asymptoten: (Siehe Aufgabe 1.4.1)

Senkrechte Asymptote: $x = 2$

Schräge Asymptote: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

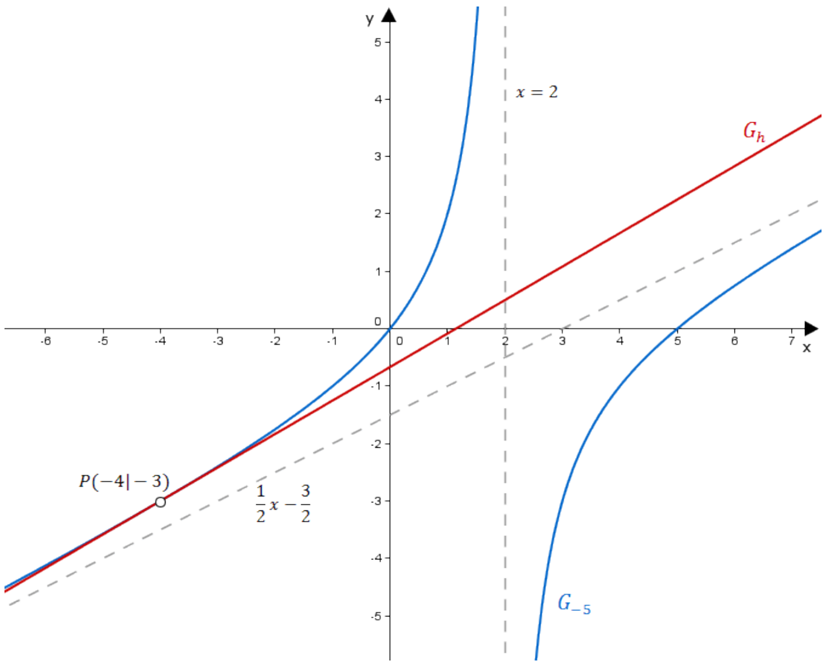
Tangente im Punkt $(-4| - 3)$: (siehe Aufgabe 1.4.3)

$h(x) = \frac{7}{12}x - \frac{2}{3}$

Wertetabelle (nicht erforderlich):

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	3	4	5	6
$f(x)$	−4,13	−3,57	−3	−2,4	−1,75	−1	0	2	−3	−1	0	0,75

Skizze:



Teilaufgabe 1.4.5 (3 BE)

Bestimmen Sie mittels Integration eine Stammfunktion F_{-5} der Funktion f_{-5}.

[mögliches Teilergebnis: $F_{-5}(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.4.5

Stammfunktion bestimmen

$f_{-5}(x) = \frac{x^2 - 5x}{2x - 4} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{6}{2x - 4}$ (siehe Aufgabe 1.4.1)

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$.

$$\begin{aligned} F_{-5}(x) &= \int f_{-5}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{6}{2x-4}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{3}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 \cdot \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Erläuterung: *Logarithmisches Integrieren*

Ist f eine Funktion der Form $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, so gilt:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|g(x)|$$

Hier ist $g(x) = x - 2$ und $g'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 \cdot \ln|x-2| \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - 2 \cdot \ln|x-2|\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Teilaufgabe 1.4.6 (9 BE)

Der Graph G_{-5} schließt zusammen mit der Tangente h aus 1.4.3 und der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses im Schaubild der Aufgabe 1.4.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet.

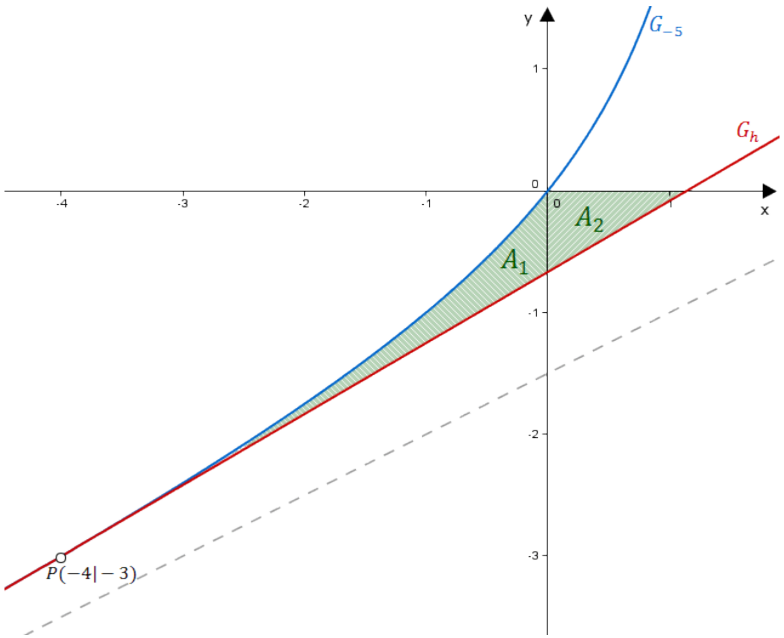
Lösung zu Teilaufgabe 1.4.6

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

$f_{-5}(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{2x - 4}$

$h(x) = \dfrac{7}{12}x - \dfrac{2}{3}$

Skizze:



$A = A_1 + A_2$

Fläche A_1 bestimmen:

Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\, \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$A_1 = \int_{-4}^{0} f_{-5}(x) - h(x)\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(\frac{x^2 - 5x}{2x - 4} - \left(\frac{7}{12}x - \frac{2}{3}\right)\right)\, \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In Teilaufgabe 1.4.5 wurde gezeigt, dass $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right)$ eine Stammfunktion von f_{-5} ist

$$= \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right) - \left(\frac{7}{24}x^2 - \frac{2}{3}x\right)\right]_{-4}^{0}$$

$$= \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\cdot 0^2 - 0 - \ln\left((0-2)^2\right)\right) - \left(\frac{7}{24}\cdot 0^2 - \frac{2}{3}\cdot 0\right)\right]$$

$$- \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\cdot(-4)^2 - (-4) - \ln\left((-4-2)^2\right)\right) - \left(\frac{7}{24}\cdot(-4)^2 - \frac{2}{3}\cdot(-4)\right)\right]$$

Erläuterung: *Rechenweg*

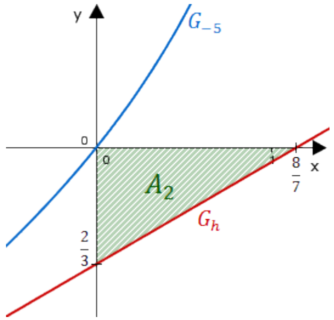
$$= \frac{3}{2}(0-0-\ln 4) - 0 - 0 - \left(\frac{3}{2}\left(\frac{16}{6}+4-\ln 36\right) - \frac{14}{3} - \frac{8}{3}\right)$$
$$= -2{,}079 - \left(\frac{3}{2}\cdot 3{,}083 - \frac{22}{3}\right)$$
$$= -2{,}079 - (-2{,}709)$$

$\approx 0{,}63$

Fläche A_2 bestimmen:

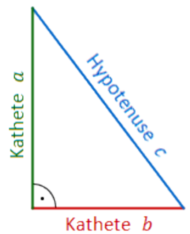
Erläuterung: *Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks*

Die Fläche A_2 ist ein Dreieck.



Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC berechnet sich aus der Hälfte des Produkts aus den beiden Katheten:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}a \cdot b$$



$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{21}$$

$$A = A_1 + A_2 \approx 1{,}01$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Nach der Einnahme eines Medikaments kann man dessen Konzentration im Blut des Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden nach der Einnahme beschreibt die Funktion g mit dem Funktionsterm $g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$ die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit der Einnahme), wobei auf das Mitführen der Einheiten verzichtet wird. Nach 6 Stunden seit der Einnahme erfolgt der weitere Abbau des Medikaments dann linear.

Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten und den Zeitpunkt, zu dem diese vorliegt.

[Teilergebnisse: $\dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = (10 - 5t) \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$

maximale Konzentration $\approx 7{,}36 \left(\frac{\text{mg}}{\ell}\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Extremwertaufgabe

$g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$

Erste Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Alternative Schreibweise*

Hängt eine Funktion $g(t)$ nicht von x sondern von der Zeit t ab, so schreibt man für die erste Ableitung $\dot{g}\,(t)$ statt $g'(t)$.

Analog für die zweite Ableitung: $\ddot{g}\,(t)$

$\dot{g}\,(t) = \left(10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}\right)'$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(t) = 10t$ und $v(t) = e^{-0{,}5 \cdot t}$.

$\dot{g}\,(t) = 10 \cdot e^{-0{,}5t} + 10t \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (-0{,}5) = (10 - 5t) \cdot e^{-0{,}5t}$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$\dot{g}\,(t) = 0$

$(10 - 5t) \cdot e^{-0{,}5t} = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$10 - 5t = 0$

$t^E = 2$

$e^{-0{,}5t}$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv.

Überprüfen, ob bei $t^E = 2$ ein Maximum vorliegt:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$(10 - 5t) \cdot \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{>0} > 0$

$10 - 5t > 0$

$t < 2$

Es findet bei $t^E = 2$ ein Vorzeichenwechsel von $(+)$ nach $(-)$ statt.

$\Rightarrow \quad t^E = 2$ ist Maximum

Berechnen der Maximalkonzentration:

$$g(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \approx 7,36 \frac{\text{mg}}{\ell}$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am schnellsten abgebaut wird.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Wendepunkt ermitteln

$$g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

$$\dot{g}\,(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$$

Zweite Ableitung bestimmen:

> Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*
>
> $f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
>
> In diesem Fall ist $u(t) = 10 - 5t$ und $v(t) = e^{-0,5 \cdot t}$.

$$\ddot{g}\,(t) = -5 \cdot e^{-0,5 \cdot t} + (10 - 5t) \cdot e^{-0,5 \cdot t} \cdot (-0,5)$$

$$= -5 \cdot e^{-0,5 \cdot t} + \left(-5 + \frac{5}{2}t\right) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

$$= \left(-5 - 5 + \frac{5}{2}t\right) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

$$= \left(-10 + \frac{5}{2}t\right) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

> Erläuterung: *Bedingungen für ein Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.
>
> Wendepunkte sind auch die Stellen, an denen die Steigung extremal wird, also am größten oder am kleinsten ist.

$$\ddot{g}\,(t) = 0$$

$$\left(-10 + \frac{5}{2}t\right) \cdot e^{-0,5 \cdot t} = 0$$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$$-10 + \frac{5}{2}t = 0$$

$$t^W = 4$$

$e^{-0,5t}$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv.

Untersuchen, ob Wendepunkt vorliegt:

$$\left(-10 + \frac{5}{2}t\right) \cdot \underbrace{e^{-0,5 \cdot t}}_{>0} > 0$$

$$-10 + \frac{5}{2}t > 0$$

$$\frac{5}{2}t > 10$$

$$t > 4$$

Es findet bei $t^W = 4$ ein Vorzeichenwechsel von $(-)$ nach $(+)$.

$\Rightarrow \quad t^W = 4$ ist Wendestelle

Zum Zeitpunkt $t^W = 4$ wird das Medikament am schnellsten abgebaut.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente s an den Graphen von g im Punkt $P(6; g(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente s und berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Tangentengleichung ermitteln

$g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$

$\dot{g}\,(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0{,}5t}$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Die Gleichung einer Tangente t an den Graphen einer Funktion f im Punkt $(x_0|f(x_0))$ ist gegeben durch:

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$s(t) = \dot{g}\,(6)(t-6) + g(6)$

$\dot{g}\,(6) = (10 - 5 \cdot 6) \cdot e^{-0{,}5 \cdot 6} \approx -1{,}00$

$g(6) = 10 \cdot 6 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 6} \approx 2{,}99$

Berechnete Werte in die Tangentengleichung einsetzen:

$s(t) = \dot{g}\,(6)(t-6) + g(6)$

$s(t) = -1{,}00 \cdot (t-6) + 2{,}99 = -1{,}00t + 6{,}00 + 2{,}99$

$s(t) = -1{,}00t + 8{,}99$

Nullstellen einer Funktion

Nullstelle der Tangente berechnen:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$s(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1{,}00t + 8{,}99 = 0$

$t^N = 8{,}99$

Das Medikament ist nach knapp 9 Stunden vollständig abgebaut.

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $k : t \mapsto k(t)$, die die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten innerhalb der ersten 9 Stunden nach der Einnahme beschreibt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Skizze

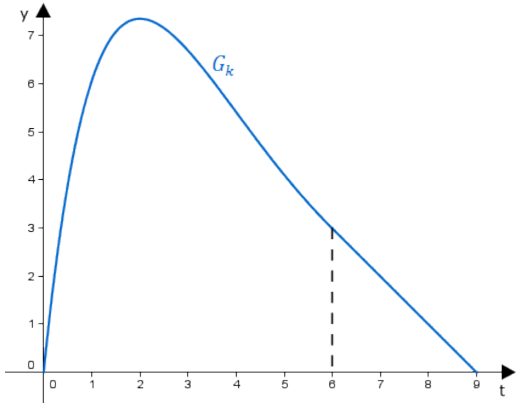
$g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$

$s(t) = -1{,}00t + 8{,}99$

$$k(t) = \begin{cases} g(t) & \text{für} \quad 0 \le t \le 6 \\ s(t) & \text{für} \quad 6 < t \le 9 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 10 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} & \text{für} \quad 0 \le t \le 6 \\ -1{,}00t + 8{,}99 & \text{für} \quad 6 < t \le 9 \end{cases}$$

Skizze:



Teilaufgabe 2.5 (4 BE)

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren den Zeitpunkt, zu dem sich die Konzentration des Medikaments im Blut auf die Hälfte der maximalen Konzentration reduziert hat. Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 5$ und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Lösung zu Teilaufgabe 2.5

Newton-Verfahren

$g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t}$

$\dot{g}\,(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$

Maximale Konzentration: $7,36 \frac{\text{mg}}{\ell}$ (siehe Aufgabe 2.2)

Gesucht ist der Zeitpunkt t, an dem die Hälfte der Maximalkonzentration vorliegt.

$g(t) = \frac{7,36}{2}$

$10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t} = 3,68$

$10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t} - 3,68 = 0$

Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0, gilt somit: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Berechnung des ersten Näherungsschrittes mit dem Startwert $t_0 = 5$:

$$t_1 = t_0 - \frac{10 \cdot t_0 \cdot e^{-0,5 \cdot t_0} - 3,68}{(10 - 5t_0) \cdot e^{-0,5t_0}} = 5 - \frac{10 \cdot 5 \cdot e^{-0,5 \cdot 5} - 3,68}{(10 - 5 \cdot 5) \cdot e^{-0,5 \cdot 5}} \approx 5,34$$

Nach ungefähr $5,34$ Stunden hat der Körper das Medikament zur Hälfte abgebaut.