Fachabitur 2012 Mathematik T Infinitesimalrechnung A I

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ in der maximalen Definitionsmenge D_f.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Zeigen Sie, dass gilt: $D_f =]-2;0[\cup]0;2[$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to 0$, für $x \to -2$ und für $x \to 2$.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Geben Sie die Wertemenge der Funktion f sowie die Art und die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

Teilaufgabe 1.6 (7 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f.

Teilaufgabe 1.7 (7 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f.

Teilaufgabe 1.8 (4 BE)

Zeichnen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Graphen von f mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$

Teilaufgabe 1.9 (9 BE)

Gegeben sei nun die Funktion $F : x \mapsto 2 \cdot \ln(2-x) - 2 \cdot \ln(2+x) + x \cdot \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist. Markieren Sie das von der x-Achse, der Geraden mit der Gleichung $x = 0,5$ und dem Graphen von f eingeschlossene, endliche Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.8 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

Die Halbwertszeit T_A eines radioaktiven Elements A, also die Zeit, nach der die Hälfte der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen $N_{A_0} = 1,75 \cdot 10^{16}$ Atome zerfallen ist, beträgt $134\,\text{s}$. Für die Anzahl $N_A(t)$ der zur Zeit t nicht zerfallenen Atome gilt das Zerfallsgesetz:

$$N_A(t) = N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t}$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Berechnen Sie die sog. „mittlere Lebensdauer“ τ, d.h. die Zeit τ, für die gilt:

$$N_A(\tau) = \frac{N_{A_0}}{e}$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Zeigen Sie ausgehend vom Zerfallsgesetz, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)} = -\frac{\ln 2}{T_A}$$

$\dot{N}_A(t)$ bedeutet dabei die Ableitung von $N_A(t)$ nach der Zeit t.

© Abiturloesung.de

Für ein Stoffgemisch zweier radioaktiver Elemente B und C mit den Halbwertszeiten T_B bzw. T_C gelten die folgenden Beziehungen:

- $N_{B\,C}(t) = N_B(t) + N_C(t)$
- Zur Zeit $t = 0$ ist die Anzahl N_{C_0} der vorhandenen Atome des Elements C doppelt so groß wie die Anzahl N_{B_0} der vorhandenen Atome des Elements B.
- Die Halbwertszeit des Elements B ist nur halb so groß wie die des Elements C.
- Beim Zerfall des Elements B entsteht nicht das Element C und beim Zerfall des Elements C entsteht auch nicht das Element B.

Teilaufgabe 2.3.1 (6 BE)

Zeigen Sie, dass für den Zeitpunkt t^* mit $N_{B\,C}\,(t^*) = \frac{1}{2} \cdot N_{B\,C}(0)$ folgende Gleichung gilt:

$e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = 1,5$

Teilaufgabe 2.3.2 (7 BE)

Berechnen Sie den Wert $\frac{t^*}{T_C}$ auf zwei Nachkommastellen genau.

[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $u = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$]

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \ln \frac{-2x^2}{x^2 - 4}$ in der maximalen Definitionsmenge D_f.

Zeigen Sie, dass gilt: $D_f =]-2; 0[\cup]0; 2[$

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2 - 4}$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$f(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(g(x))$.

Die $\ln$-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
Somit gilt für die Argumentfunktion $g(x) > 0$.

In diesem Fall: $\frac{-2x^2}{x^2 - 4} > 0$

$\frac{-2x^2}{x^2 - 4} > 0$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

Da $-2x^2 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kommt nur der Fall „Zähler und Nenner negativ“ in Betracht.

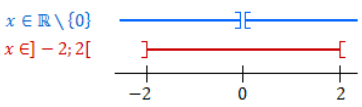
© Abiturloesung.de

$-2x^2 < 0$ und $x^2 - 4 < 0$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \in]-2; 2[$

Erläuterung:

Veranschaulichung der Bedingungen am Zahlenstrahl:



Beide Bedingungen müssen zutreffen. Es ergibt sich also:

$x \in]-2; 0[\cap]0; 2[$

$\frac{-2x^2}{x^2-4} > 0$ gilt für $x \in]-2; 0[\cap]0; 2[$

$\Rightarrow \quad D_f =]-2; 0[\cap]0; 2[$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \ln \frac{-2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} = f(x)$$

$\Rightarrow$ der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Nullstellen einer Funktion

$$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} = 0$$

Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*

Da $\ln 1 = 0$, nimmt die Logarithmusfunktion $\ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ den Wert Null an, wenn das Argument $\frac{-2x^2}{x^2-4} = 1$ ist.

$$\frac{-2x^2}{x^2-4} = 1$$

$$-2x^2 = x^2 - 4$$

$$-3x^2 = -4$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1^N = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$x_2^N = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to 0$, für $x \to -2$ und für $x \to 2$.

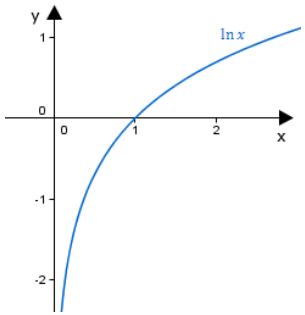
Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Grenzwert bestimmen

$$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$$

Erläuterung: *Eigenschaften der ln-Funktion*

Der Graph der Funktion $f(x) = \ln x$ ist für Werte im Bereich $]0;\infty[$ definiert.



Die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs sind:

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\ln \underbrace{\frac{\overbrace{-2x^2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-4}_{\to -4}}}_{\to 0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \underbrace{\ln \underbrace{\frac{\overbrace{-2x^2}^{\to -8}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^-}}}_{\to\infty}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \underbrace{\ln \underbrace{\frac{\overbrace{-2x^2}^{\to -8}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^-}}}_{\to\infty}} = \infty$$

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Geben Sie die Wertemenge der Funktion f sowie die Art und die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Wertemenge einer Funktion

$$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$$

f ist im Bereich $]0;2[$ stetig mit den Grenzwerten $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ (siehe Aufgabe 1.4).

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion ist in einem Bereich stetig, wenn man sie dort ohne abzusetzen zeichnen kann.

Ist eine Funktion f auf einem Intervall $]a;b[$ stetig und sind die Grenzwerte der Funktion an den Intervallgrenzen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y_a$ und $\lim\limits_{x\to b} f(x) = y_b$, so nimmt die Funktion f auf dem Intervall $]a;b[$ alle Werte zwischen y_a und y_b an.

Hier ist das Intervall $]0;2[$ und die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$.

Die Funktion f nimmt also auf dem Intervall $]0;2[$ alle Werte zwischen $-\infty$ und ∞ an.

$\Rightarrow$ Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}$

(Bemerkung: Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse gilt die gleiche Überlegung für das Intervall $]-2;0[$.)

Asymptoten einer Funktion

Grenzwerte: (siehe Aufgabe 1.4)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = 0$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = -2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = 2$

Teilaufgabe 1.6 (7 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6

Monotonieverhalten einer Funktion

$$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$$

Erste Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Kettenregel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2-4}$.

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{-2x^2} \cdot \left(\frac{-2x^2}{x^2-4}\right)'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = -2x^2$ und $v(x) = x^2 - 4$.
Dann ist $u'(x) = -4x$ und $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^2-4}{-2x^2} \cdot \frac{-4x \cdot \left(x^2-4\right) - \left(-2x^2\right) \cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} \\
&= \frac{x^2-4}{-2x^2} \cdot \frac{-4x^3+16x+4x^3}{\left(x^2-4\right)^2} \\
&= \frac{x^2-4}{-2x^2} \cdot \frac{16x}{\left(x^2-4\right)^2} \\
&= \frac{16x}{-2x^2 \cdot \left(x^2-4\right)} \\
&= \frac{-8}{x \cdot \left(x^2-4\right)} \\
&= \frac{-8}{x^3-4x}
\end{aligned}$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$

$\frac{-8}{x^3-4x} < 0$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

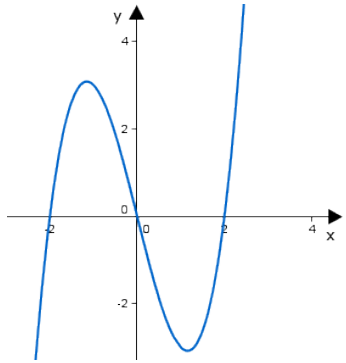
Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

Da $-8 < 0$, betrachtet man nur den Fall „Zähler negativ und Nenner positiv“.

$x^3 - 4x > 0$

$x\left(x^2-4\right) > 0$

$x\left(x^2-4\right)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit Nullstellen bei 0, -2 und 2.



$x\left(x^2-4\right) > 0$ gilt für $-2 < x < 0$ und für $x > 2$.

Der Fall $x > 2$ ist wegen $D_f =]-2;0[\cap]0;2[$ auszuschließen.

Monotonieverhalten:

$f'(x) < 0$ für $-2 < x < 0$

$\Rightarrow$ G_f ist für $x \in]-2;0[$ monoton fallend

$f'(x) > 0$ für $0 < x < 2$

$\Rightarrow$ G_f ist für $x \in]0;2[$ monoton steigend

Teilaufgabe 1.7 (7 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.7

Wendepunkt ermitteln

$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$

$f'(x) = \frac{-8}{x^3-4x}$

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = -8$ und $v(x) = x^3 - 4x$.
Dann ist $u'(x) = 0$ und $v'(x) = 3x^2 - 4$.

$$f''(x) = \frac{0\cdot\left(x^3-4x\right) - (-8)\cdot\left(3x^2-4\right)}{\left(x^3-4x\right)^2}$$
$$= \frac{8\left(3x^2-4\right)}{\left(x^3-4x\right)^2}$$

Erläuterung: *Wendepunkt ermitteln*

Wendepunkte sind Punkte eines Funktionsgraphen, an denen sich die Krümmungsrichtung ändert. Die 2. Ableitung hat an solchen Stellen einen Vorzeichenwechsel, sie ist also zum Beispiel links des Wendepunkts positiv und rechts davon negativ. An der Wendestelle x_W selbst ist die 2. Ableitung Null.
$f''(x_W) = 0$

Um den Vorzeichenwechsel von f'' jedoch garantieren zu können, ist eine zusätzliche Bedingung notwendig. An Wendepunkten ist die 3. Ableitung stets von Null verschieden.

$f'''(x_W) \neq 0$

$f''(x) = 0$

$\frac{8\left(3x^2-4\right)}{\left(x^3-4x\right)^2} = 0$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$8\left(3x^2-4\right) = 0$

$3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x_1^W = \sqrt{\frac{4}{3}}$

$x_2^W = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

Untersuchen, ob an den Stellen $x_1^W = \sqrt{\frac{4}{3}}$ und $x_2^W = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ Vorzeichenwechsel in der zweiten Ableitung vorliegen:

$f''(x) > 0$

$\frac{8\left(3x^2-4\right)}{\left(x^3-4x\right)^2} > 0$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die zweite Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

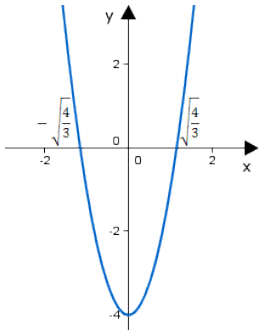
Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

Da $\left(x^3-4x\right)^2 > 0$ genügt es den Fall „Zähler und Nenner positiv“ zu betrachten.

$8\left(3x^2-4\right) > 0$

$3x^2 - 4 > 0$

$3x^2 - 4$ kann als nach oben geöffnete Parabel angesehen werden mit Nullstellen bei $\sqrt{\frac{4}{3}}$ und $-\sqrt{\frac{4}{3}}$.



An beiden Nullstellen finden Vorzeichenwechsel statt.

$\Rightarrow$ f hat Wendestellen bei $x_1^W = \sqrt{\frac{4}{3}}$ und $x_2^W = -\sqrt{\frac{4}{3}}$.

$x_1^W = \sqrt{\frac{4}{3}}$ und $x_2^W = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ sind gleichzeitig Nullstellen von f (siehe Aufgabe 1.3)

$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP_1 \left(\sqrt{\frac{4}{3}}|0\right)$

$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP_2 \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}|0\right)$

Teilaufgabe 1.8 (4 BE)

Zeichnen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Graphen von f mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$

Lösung zu Teilaufgabe 1.8

Skizze

$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2 - 4}$

Nullstellen: (siehe Aufgabe 1.3)

$x_1^N = \sqrt{\frac{4}{3}}$

$x_2^N = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

Wendepunkte: (siehe Aufgabe 1.7)

$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP_1 \left(\sqrt{\frac{4}{3}}|0\right)$

$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP_2 \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}|0\right)$

Senkrechte Asymptoten: (siehe Aufgabe 1.5)

$x = 0$

$x = -2$

$x = 2$

Grenzwerte: (siehe Aufgabe 1.4)

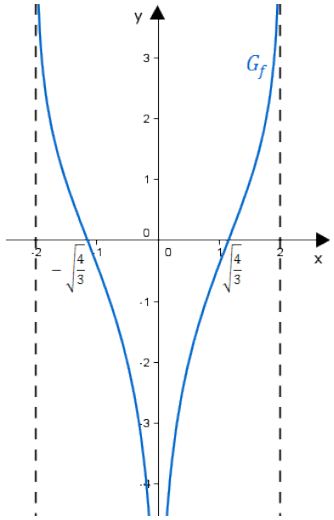
$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	$-1{,}9$	$-1{,}7$	$-1{,}5$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-0{,}7$	$-0{,}5$	$-0{,}3$	$-0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}5$	$0{,}7$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$1{,}5$	$1{,}7$	$1{,}9$
$f(x)$	2,92	1,65	0,94	0	$-1{,}28$	$-2{,}01$	$-3{,}08$	$-5{,}30$	$-5{,}30$	$-3{,}08$	$-2{,}01$	$-1{,}28$	0	0,94	1,65	2,92

Skizze:



Teilaufgabe 1.9 (9 BE)

Gegeben sei nun die Funktion $F: x \mapsto 2 \cdot \ln(2-x) - 2 \cdot \ln(2+x) + x \cdot \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist. Markieren Sie das von der x-Achse, der Geraden mit der Gleichung $x = 0,5$ und dem Graphen von f eingeschlossene, endliche Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.8 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.9

Nachweis einer Stammfunktion

$$F(x) = 2 \cdot \ln(2-x) - 2 \cdot \ln(2+x) + x \cdot \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$.

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

$h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $f(x) = x$ und $g(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$.

$$F'(x) = [2 \cdot \ln(2-x)]' - [2 \cdot \ln(2+x)]' + 1 \cdot \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} + x \cdot \left[\ln \frac{-2x^2}{x^2-4}\right]'$$

Erläuterung:

Die Ableitung von $\ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ wurde bereits in Aufgabe 1.6 berechnet.

$$\left[\ln \frac{-2x^2}{x^2-4}\right]' = \frac{-8}{x^3-4x}$$

Dieses Ergebnis wird hier verwendet ohne die Rechnung noch einmal auszuführen.

$$= [2 \cdot \ln(2-x)]' - [2 \cdot \ln(2+x)]' + 1 \cdot \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} + x \cdot \frac{-8}{x^3-4x}$$

$$= [2 \cdot \ln(2-x)]' - [2 \cdot \ln(2+x)]' + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4}$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

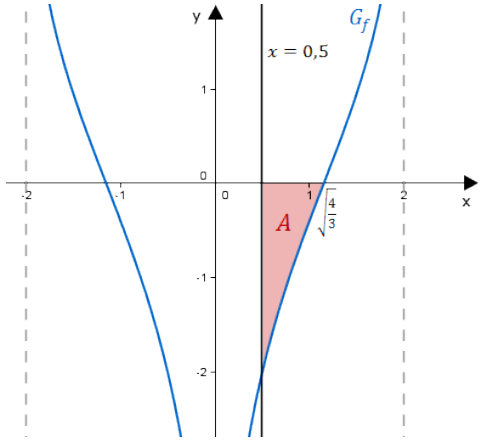
Kettenregel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \frac{1}{2-x} \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{1}{2+x} \cdot 1 + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} \\
&= \frac{-2}{2-x} - \frac{2}{2+x} + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} \\
&= \frac{-2(2+x) - 2(2-x)}{(2-x)(2+x)} + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} \\
&= \frac{-4-2x-4+2x}{4-x^2} + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} \\
&= \frac{-8}{4-x^2} + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} \\
&= \frac{8}{x^2-4} + \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} \\
&= \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} = f(x)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ F ist eine Stammfunktion von f.

Flächenberechnung



Die Integrationsgrenzen sind $0,5$ und $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen $0,5$ und $\sqrt{\frac{4}{3}}$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \left| \int_{0,5}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} f(x)\mathrm{dx} \right|$$

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_{0,5}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} f(x)\mathrm{dx} \right| \\
&= \left| \int_{0,5}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}\,\mathrm{dx} \right|
\end{aligned}
$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \left[2 \cdot \ln(2-x) - 2 \cdot \ln(2+x) + x \cdot \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} \right]_{0,5}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \right| \\
&= \left| \left(2 \cdot \ln \left(2 - \sqrt{\frac{4}{3}}\right) - 2 \cdot \ln \left(2 + \sqrt{\frac{4}{3}}\right) + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \ln \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - 4} \right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(2 \cdot \ln\,(2-0,5) - 2 \cdot \ln\,(2+0,5) + 0,5 \cdot \ln \frac{-2 \cdot 0,5^2}{0,5^2-4} \right) \right|
\end{aligned}
$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$= |(-0,3361 - 2,2978 + 0) - (0,8109 - 1,8326 + (-1,0075))|$$

$$= |-2,6339 - (-2,0292))|$$

$\approx 0,605\,\text{FE}$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Die Halbwertszeit T_A eines radioaktiven Elements A, also die Zeit, nach der die Hälfte der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen $N_{A_0} = 1,75 \cdot 10^{16}$ Atome zerfallen ist, beträgt $134\,\text{s}$. Für die Anzahl $N_A(t)$ der zur Zeit t nicht zerfallenen Atome gilt das Zerfallsgesetz:

$$N_A(t) = N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t}$$

Berechnen Sie die sog. „mittlere Lebensdauer“ τ, d.h. die Zeit τ, für die gilt:

$$N_A(\tau) = \frac{N_{A_0}}{e}$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Exponentielles Wachstum

$$N_A(\tau) = \frac{N_{A_0}}{e}$$

$$N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau} = \frac{N_{A_0}}{e}$$

Gleichung nach τ auflösen:

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau} = \frac{1}{e}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau} = \frac{1}{e}$ angewendet.

$$\ln\left(e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau}\right) = \ln \frac{1}{e}$$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau = \ln \frac{1}{e}$$

$$-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau = \ln \frac{1}{e}$$

Erläuterung:

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Hier:

$$\ln \frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e$$

Mit $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$ ergibt sich:

$$\ln \frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1$$

$$-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot \tau = -1$$

$$\tau = \frac{T_A}{\ln 2}$$

T_A ist mit $T_A = 134\,\text{s}$ gegeben:

$$\tau = \frac{134\,\text{s}}{\ln 2} \approx 193,3\,\text{s}$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

© Abiturloesung.de

Zeigen Sie ausgehend vom Zerfallsgesetz, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)} = -\frac{\ln 2}{T_A}$$

$\dot{N}_A(t)$ bedeutet dabei die Ableitung von $N_A(t)$ nach der Zeit t.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$$N_A(t) = N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Formel für Exponetialfunktionen:

$$f(x) = e^{v(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$$

Hier ist $v(x) = -\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t.$

Dann ist $v'(x) = -\frac{\ln 2}{T_A}.$

$$\dot{N}_A(t) = \underbrace{N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t}}_{=N_A(t)} \cdot \left(-\frac{\ln 2}{T_A}\right) = -\frac{\ln 2}{T_A} \cdot N_A(t)$$

Berechnen des Quotienten $\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)}$:

$$\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)} = \frac{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot N_A(t)}{N_A(t)} = -\frac{\ln 2}{T_A}$$

Teilaufgabe 2.3.1 (6 BE)

Für ein Stoffgemisch zweier radioaktiver Elemente B und C mit den Halbwertszeiten T_B bzw. T_C gelten die folgenden Beziehungen:

- $N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t)$
- Zur Zeit $t = 0$ ist die Anzahl N_{C_0} der vorhandenen Atome des Elements C doppelt so groß wie die Anzahl N_{B_0} der vorhandenen Atome des Elements B.
- Die Halbwertszeit des Elements B ist nur halb so groß wie die des Elements C.
- Beim Zerfall des Elements B entsteht nicht das Element C und beim Zerfall des Elements C entsteht auch nicht das Element B.

Zeigen Sie, dass für den Zeitpunkt t^* mit $N_{BC}(t^*) = \frac{1}{2} \cdot N_{BC}(0)$ folgende Gleichung gilt:

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = 1,5$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.3.1

Nachweis der Gültigkeit einer gegebenen Beziehung

Gegeben:

$$N_B(t) = N_{B_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} \cdot t}$$

$$N_C(t) = N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t}$$

$$N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t)$$

N_{C_0} ist doppelt so groß wie N_{B_0}:

$\Rightarrow \quad N_{B_0} = \frac{1}{2} N_{C_0}$

T_B ist halb so groß wie T_C:

$\Rightarrow \quad T_B = \frac{1}{2} T_C$

Einsetzen von $N_B(t)$ und $N_C(t)$ in $N_{BC}(t)$:

$$N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t) = N_{B_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} \cdot t} + N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t}$$

Einsetzen von $N_{B_0} = \frac{1}{2} N_{C_0}$ und $T_B = \frac{1}{2} T_C$ in $N_{BC}(t)$:

$$N_{B\,C}(t) = \frac{1}{2} N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\frac{1}{2} T_C} \cdot t} + N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t}$$

Zum Zeitpunkt t^* gilt folgende Bedingung:

$$N_{B\,C}\,(t^*) = \frac{1}{2} \cdot N_{B\,C}(0)$$

Einsetzen der bisherigen Ergebnisse und vereinfachen:

$$\frac{1}{2} N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\frac{1}{2} T_C} \cdot t^*} + N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = \frac{1}{2} \cdot N_{B\,C}(0)$$

$$N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = N_{B\,C}(0)$$

$$N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = N_B(0) + N_C(0)$$

$$N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = \frac{1}{2} N_{C_0} + N_{C_0}$$

$$N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = \frac{1}{2} N_{C_0} + N_{C_0}$$

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = 1,5$$

Teilaufgabe 2.3.2 (7 BE)

Berechnen Sie den Wert $\frac{t^*}{T_C}$ auf zwei Nachkommastellen genau.

[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $u = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.3.2

Nullstellen einer Funktion

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^* \cdot 2} + 2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} = 1,5$$

Schreibe als quadratische Gleichung:

$$\left(e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}\right)^2 + 2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} - 1,5 = 0$$

Substitution:

$$u = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$$

Erläuterung: *Substitution*

Durch die Substitution $u = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$ wird die Gleichung zurückgeführt auf eine quadratische Gleichung mit der unbekannten Variable u. Diese kann mittels der Mitternachtsformel gelöst werden.

Sind die Lösungen für die Variable u gefunden, werden durch Resubstitution die Lösungen für die Variable t^* ermittelt.

Beispiel:

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

Substitution: $x^2 = u$

$u^2 - 2u + 1 = 0$

$u_{1,2} = 1$

Resubstitution: $x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$

$$u^2 + 2 \cdot u - 1,5 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung mit der Lösungsformel:

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$$u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1,5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$u_1 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \approx 0,581$$

$$u_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \approx -2,581$$

Resubstitution:

$$u_1 = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$$

$0,581 = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $0,581 = e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*}$ angewendet.

$$\ln 0,581 = \ln \left(e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*} \right)$$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\ln 0,581 = -\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*$$

Erinnerung: Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert!
Da $u_2 \approx -2,581 < 0$, ist nur $u_1 \approx 0,581$ eine mögliche Lösung.

$$\ln 0,581 = -\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t^*$$

$$\frac{t^*}{T_C} = -\frac{\ln 0,581}{\ln 2} \approx 0,78$$