

Abitur 2012 Mathematik Stochastik IV

Nachdem die Verfilmung eines bekannten Romans erfolgreich in den Kinos gezeigt wurde, veröffentlicht eine Tageszeitung das Ergebnis einer repräsentativen Umfrage unter Jugendlichen. Der Umfrage zufolge hatten 88% der befragten Jugendlichen den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen, 18% sahen die Verfilmung. Von den Befragten, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen hatten, gaben 60% an, die Verfilmung gesehen zu haben.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

R : „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person hatte laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen.“

V : „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person sah laut Umfrage die Verfilmung.“

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen hatte, angab, die Verfilmung gesehen zu haben.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{R} \cup \overline{V}$ im Sachzusammenhang und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Teilaufgabe 2 (5 BE)

Ein Jahr später möchte die Tageszeitung ermitteln, ob sich durch die Verfilmung der Anteil p der Jugendlichen, die den Roman gelesen haben, wesentlich erhöht hat. Die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,15$ soll mithilfe einer Stichprobe von 100 Jugendlichen auf einem Signifikanzniveau von 10% getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Der Kurs Theater und Film eines Gymnasiums führt die Bühnenversion des Romans auf.

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Für die Premiere wird die Aula der Schule bestuhlt; in der ersten Reihe werden acht Plätze für Ehrengäste reserviert. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die die fünf erschienenen Ehrengäste haben, sich auf die reservierten Plätze zu verteilen, wenn

- α) die Personen nicht unterschieden werden;
- β) die Personen unterschieden werden.

Nennen Sie im Sachzusammenhang einen möglichen Grund dafür, dass die möglichen Anordnungen der Ehrengäste auf den reservierten Plätzen nicht gleichwahrscheinlich sind - unabhängig davon, ob die Personen unterschieden werden oder nicht.

Bei jeder Aufführung wird der Vorhang 15-mal geschlossen; dafür ist ein automatischer Mechanismus vorgesehen. Erfahrungsgemäß funktioniert der Mechanismus bei jedem Schließen des Vorhangs mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Nur dann, wenn der Mechanismus nicht funktioniert, wird der Vorhang von Hand zugezogen.

Teilaufgabe 4a (5 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A : „Bei einer Aufführung wird der Vorhang kein einziges Mal von Hand zugezogen.“

B : „Bei einer Aufführung lässt sich der Vorhang zunächst viermal automatisch schließen, insgesamt wird der Vorhang jedoch genau zweimal von Hand zugezogen“

Teilaufgabe 4b (2 BE)

Beschreiben Sie ein Urnenexperiment, mit dem sich das Verhalten des Mechanismus bei 15-maligem Schließen des Vorhangs simulieren lässt.

Teilaufgabe 4c (5 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt, wie oft der Mechanismus beim Schließen des Vorhangs im Verlauf einer Aufführung nicht funktioniert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Nachdem die Verfilmung eines bekannten Romans erfolgreich in den Kinos gezeigt wurde, veröffentlicht eine Tageszeitung das Ergebnis einer repräsentativen Umfrage unter Jugendlichen. Der Umfrage zufolge hatten 88% der befragten Jugendlichen den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen, 18% sahen die Verfilmung. Von den Befragten, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen hatten, gaben 60% an, die Verfilmung gesehen zu haben.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

R : „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person hatte laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen.“

V : „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person sah laut Umfrage die Verfilmung.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen hatte, angab, die Verfilmung gesehen zu haben.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ereignisse:

R : „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person hatte laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen.“

V : „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person sah laut Umfrage die Verfilmung.“

Aus der Einleitung:

„... hatten 88% der befragten Jugendlichen den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen...“

$$\Rightarrow P(\bar{R}) = 0,88$$

$$\Rightarrow P(R) = 1 - 0,88 = 0,12$$

„... 18% sahen die Verfilmung.“

$$\Rightarrow P(V) = 0,18$$

$$\Rightarrow P(\bar{V}) = 1 - 0,18 = 0,82$$

	V	\bar{V}	
R			$P(R) = 0,12$
\bar{R}			$P(\bar{R}) = 0,88$
	$P(V) = 0,18$	$P(\bar{V}) = 0,82$	1

„Von den Befragten, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen hatten, gaben 60% an, die Verfilmung gesehen zu haben.“

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Unter $P_R(V)$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis V unter der Bedingung des Ereignisses R .

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses R .

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_R(V)$ ist also die Wahrscheinlichkeit für V , wenn man nur R betrachtet.

Die Bedingung lautet hier:

„... die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen hatten ...“.

$$\Rightarrow P_R(V) = 0,6$$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)}$$

Auflösen nach $P(R \cap V)$:

$$P(R \cap V) = P(R) \cdot P_R(V)$$

$$P(R \cap V) = P(R) \cdot P_R(V)$$

$$P(R \cap V) = 0,12 \cdot 0,6$$

$$\Rightarrow P(R \cap V) = 0,072$$

$$\Rightarrow P(\bar{R} \cap V) = 0,18 - 0,072 = 0,108$$

	V	\bar{V}	
R	$P(R \cap V) = 0,072$		$P(R) = 0,12$
\bar{R}	$P(\bar{R} \cap V) = 0,108$		$P(\bar{R}) = 0,88$
	$P(V) = 0,18$	$P(\bar{V}) = 0,82$	1

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Die Aufgabenstellung lautet:

„Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen hatte (\bar{R}), angab, die Verfilmung gesehen zu haben (V).“

Unter $P_{\bar{R}}(V)$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis V unter der Bedingung des Ereignisses \bar{R} .

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses \bar{R} .

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{R}}(V)$ ist also die Wahrscheinlichkeit für V , wenn man nur \bar{R} betrachtet.

Gesucht ist $P_{\bar{R}}(V)$.

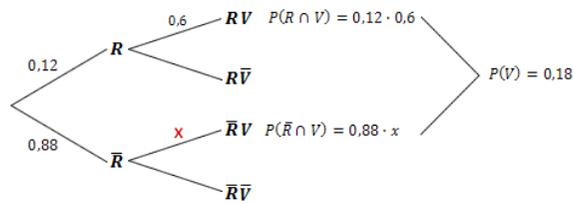
Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_{\bar{R}}(V) = \frac{P(\bar{R} \cap V)}{P(\bar{R})} = \frac{0,108}{0,88} \approx 12,3\%$$

Alternative Lösung

Alternative Berechnung über ein Baumdiagramm.



Gesucht ist $P_{\bar{R}}(V) = x$.

$$P(V) = P(R \cap V) + P(\bar{R} \cap V)$$

$$0,18 = 0,12 \cdot 0,6 + 0,88 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \frac{0,18 - 0,12 \cdot 0,6}{0,88} \approx 12,3\%$$

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $\bar{R} \cup \bar{V}$ im Sachzusammenhang und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Ereignis beschreiben

$\bar{R} \cup \bar{V}$: „Roman nicht gelesen **oder** Verfilmung nicht gesehen.“

Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse*

$\bar{R} \cup \bar{V}$ steht für die **Vereinigung** der Ereignisse „nicht R “ und „nicht V “.

Bei der Vereinigung von zwei Ereignissen tritt entweder das eine **oder** das andere Ereignis ein.

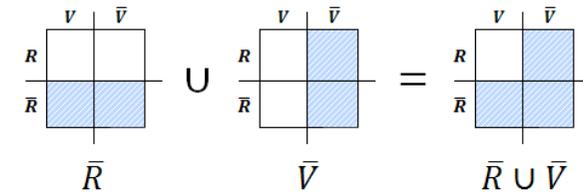
Bei dem Durchschnitt von zwei Ereignissen tritt das eine **und** das andere Ereignis gleichzeitig ein. Er ist Teil der Vereinigung!

Wahrscheinlichkeit

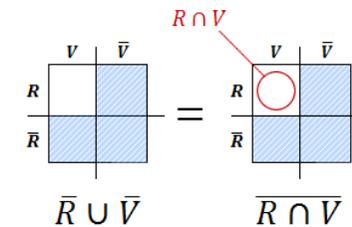
$$P(\bar{R} \cup \bar{V}) = P(\overline{R \cap V}) = 1 - P(R \cap V) = 1 - 0,072 = 92,8\%$$

Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse*

Vereinigung der Mengen \bar{R} und \bar{V} :



Die Menge $\bar{R} \cup \bar{V}$ kann man nun auch als das Komplement („die genau andere Menge“) von $R \cap V$ betrachten:



Alternative Lösung

Veranschaulichung des Ereignis in der (ausgefüllten) Vierfeldertafel aus Teilaufgabe 1a:

	V	\bar{V}	
R	$P(R \cap V) = 0,072$	$P(R \cap \bar{V}) = 0,048$	$P(R) = 0,12$
\bar{R}	$P(\bar{R} \cap V) = 0,108$	$P(\bar{R} \cap \bar{V}) = 0,772$	$P(\bar{R}) = 0,88$
	$P(V) = 0,18$	$P(\bar{V}) = 0,82$	1

$$P(\bar{R} \cup \bar{V}) = P(\bar{R} \cap V) + P(\bar{R} \cap \bar{V}) + P(R \cap \bar{V})$$

$$P(\bar{R} \cup \bar{V}) = 0,108 + 0,772 + 0,048$$

$$P(\bar{R} \cup \bar{V}) = 92,8\%$$

Teilaufgabe 2 (5 BE)

Ein Jahr später möchte die Tageszeitung ermitteln, ob sich durch die Verfilmung der Anteil p der Jugendlichen, die den Roman gelesen haben, wesentlich erhöht hat. Die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,15$ soll mithilfe einer Stichprobe von 100 Jugendlichen auf einem Signifikanzniveau von 10% getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung zu Teilaufgabe 2

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,15$

Stichprobenumfang: $n = 100$

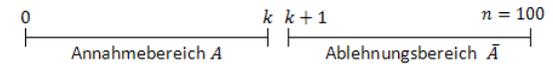
Signifikanzniveau: $\alpha = 10\%$

Annahmehbereich von H_0 : $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = [k + 1, 100]$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,15$ bedeutet, dass **höchstens** 15% der Jugendlichen den Roman gelesen haben. Somit liegt der Annahmehbereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1. Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn, die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \geq k + 1$).

$$\Rightarrow \text{Fehler erster Art: } P_{0,15}^{100}(Z \geq k + 1) \leq 0,1$$

$$P_{0,15}^{100}(Z \geq k + 1) \leq 0,1$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$$P(\text{mindestens } k+1 \text{ Treffer}) = 1 - P(\text{höchstens } k \text{ Treffer})$$

In mathematischen Zeichen:

$$P(Z \geq k + 1) = 1 - P(Z \leq k)$$

$$1 - P_{0,15}^{100}(Z \leq k) \leq 0,1 \quad | \quad -1$$

$$-P_{0,15}^{100}(Z \leq k) \leq -0,9 \quad | \quad \cdot(-1)$$

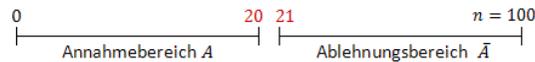
(da die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationssymbol)

$$P_{0,15}^{100}(Z \leq k) \geq 0,9$$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k = 20$

\Rightarrow ab $Z = 21$ wird die Nullhypothese abgelehnt

Entscheidungsregel:



Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{21, 22, \dots, 100\}$

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Der Kurs Theater und Film eines Gymnasiums führt die Bühnenversion des Romans auf.

Für die Premiere wird die Aula der Schule bestuhlt; in der ersten Reihe werden acht Plätze für Ehrengäste reserviert. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die die fünf erschienenen Ehrengäste haben, sich auf die reservierten Plätze zu verteilen, wenn

- α) die Personen nicht unterschieden werden;
- β) die Personen unterschieden werden.

Nennen Sie im Sachzusammenhang einen möglichen Grund dafür, dass die möglichen Anordnungen der Ehrengäste auf den reservierten Plätzen nicht gleichwahrscheinlich sind - unabhängig davon, ob die Personen unterschieden werden oder nicht.

Lösung zu Teilaufgabe 3

Kombinatorik

$n = 8$ Plätze

$k = 5$ Gäste \Rightarrow 5 mal Ziehen

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Im Fall α) werden die Personen nicht unterschieden, d.h. welcher Gast auf einem Platz sitzt, ist nicht relevant, sondern nur, dass der Platz belegt ist.

Es handelt sich somit um Ziehen ohne Reihenfolge (Personen werden nicht unterschieden) und ohne Zurücklegen (ein Gast kann keine zwei Plätze belegen).

Ansatz: „Lotto-Prinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\alpha) \quad |A| = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen*

Im Fall β) werden die Personen unterschieden, d.h. welcher Gast auf einem Platz sitzt, ist relevant.

Es handelt sich somit um Ziehen mit Reihenfolge (Personen werden unterschieden) und ohne Zurücklegen (ein Gast kann keine zwei Plätze belegen).

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\beta) \quad |B| = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

Möglicher Grund:

Gäste wollten nebeneinander sitzen (z.B. Ehepaare, Freunde)

Teilaufgabe 4a (5 BE)

Bei jeder Aufführung wird der Vorhang 15-mal geschlossen; dafür ist ein automatischer Mechanismus vorgesehen. Erfahrungsgemäß funktioniert der Mechanismus bei jedem

Schließen des Vorhangs mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Nur dann, wenn der Mechanismus nicht funktioniert, wird der Vorhang von Hand zugezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Bei einer Aufführung wird der Vorhang kein einziges Mal von Hand zugezogen.“

B: „Bei einer Aufführung lässt sich der Vorhang zunächst viermal automatisch schließen, insgesamt wird der Vorhang jedoch genau zweimal von Hand zugezogen.“

Lösung zu Teilaufgabe 4a

Binomialverteilung

Ereignis A:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,9$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 1 - 0,9 = 0,1$

In diesem Fall ist das Funktionieren des Schließmechanismus der Treffer.

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n	Anzahl der Züge („Länge“ der Bernoulli-Kette)	hier : $n = 15$
-----	---	-----------------

Bernoulli-Kette mit $n = 15$ und $p = 0,9$.

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis „Bei einer Aufführung wird der Vorhang kein einziges Mal von Hand zugezogen.“ kann umformuliert werden in „Bei einer Aufführung funktioniert der Schließmechanismus des Vorhangs 15 Mal.“

$\Rightarrow Z = 15$

$$P(A) = P_{0,9}^{15}(Z = 15)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$= \binom{15}{15} \cdot 0,9^{15} \cdot 0,1^0$$

$$\approx 20,6\%$$

(Wert kann auch vom Tafelwerk abgelesen werden: 0,20589)

Ereignis B:

Erläuterung: *Ereignis*

Beim Ereignis B wird, im Gegensatz zum Ereignis A , teilweise der Erfolg des automatischen Mechanismus festgelegt (4 Mal):

4-Mal automatisch $\Rightarrow 0,9^4$

Bei den restlichen 11-Mal soll der Vorhang 2-Mal per Hand zugezogen werden, also 9-Mal automatisch.

9 von 11-Mal automatisch $\Rightarrow P_{0,9}^{11}(Z = 9)$

$$P(B) = 0,9^4 \cdot P_{0,9}^{11}(Z = 9)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1-p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$= 0,9^4 \cdot \binom{11}{9} \cdot 0,9^9 \cdot 0,1^2$$

$$\approx 14,0\%$$

Teilaufgabe 4b (2 BE)

Beschreiben Sie ein Urnenexperiment, mit dem sich das Verhalten des Mechanismus bei 15-maligem Schließen des Vorhangs simulieren lässt.

Lösung zu Teilaufgabe 4b

Ziehen mit Zurücklegen

Beschreibung:

15-maliges Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen aus einer Urne mit 10 Kugeln, davon 9 weiße und 1 schwarze.

Erläuterung: *Urnenmodell*

Weißer Kugel = Vorhang schließt sich automatisch.

Schwarze Kugel = Vorhang muss per Hand zugezogen werden.

$$p = P(\text{weiss}) = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$q = P(\text{schwarz}) = \frac{1}{10} = 0,1$$

Es muss mit Zurücklegen gezogen werden, damit die Wahrscheinlichkeit eines Treffers gleich bleibt.

Teilaufgabe 4c (5 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt, wie oft der Mechanismus beim Schließen des Vorhangs im Verlauf einer Aufführung nicht funktioniert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe 4c

Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert μ_X bestimmen:

Erläuterung: *Binomialverteilte Zufallsgröße*

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt, wenn es genau zwei Ergebnisse gibt: Niete und Treffer.

In diesem Fall:

Treffer = Vorhang schließt nicht automatisch ($p = 0,1$)

Niete = Vorhang schließt automatisch ($q = 0,9$)

$$p = 0,1$$

$$q = 0,9$$

$\approx 39,0\%$

Alternative Lösung

$$P_{0,1}^{15}(X = 0 \vee X \geq 3) = 1 - P_{0,1}^{15}(1 \leq X \leq 2) = 1 - [0,34315 + 0,26690] \approx 39,0\%$$